Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Topologie Agébrique

Contrôle terminal - Vendredi 23 mai 2025 - durée 2h

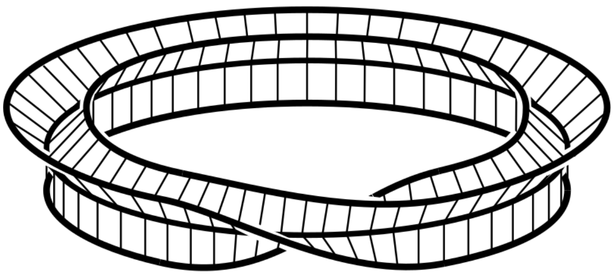
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] On considère le CW-complexe X composé d'un point, d'une 1-cellule et d'une 2-cellule :

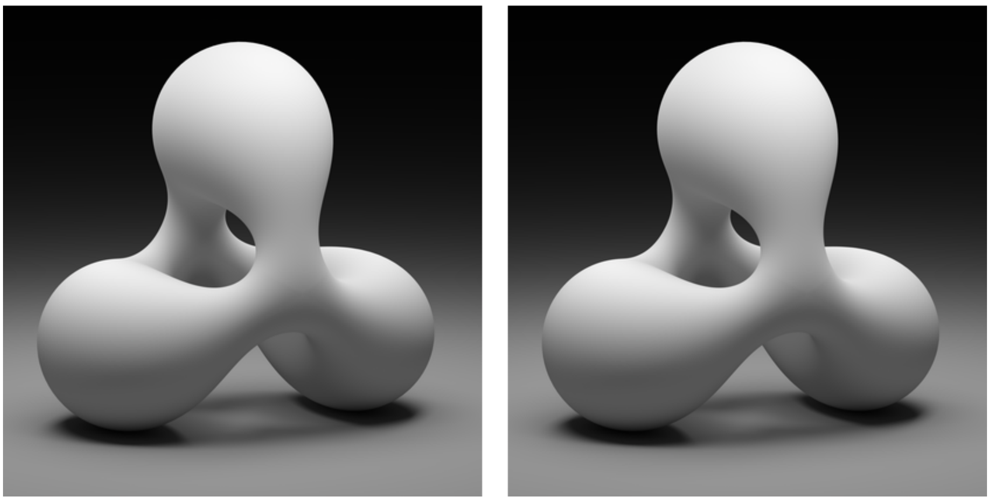
$$X^0 = \{x_0\}, \quad X^1 = \mathbb{S}^1 \quad \text{et} \quad X^2 = X.$$

Dans l'égalité $X^1 = \mathbb{S}^1$ on considère $\mathbb{S}^1$ comme le cercle unité des complexes et on identifie x_0 au nombre 1. L'application d'attachement $\varphi : \partial e_2 = \mathbb{S}^1 \longrightarrow X^1 = \mathbb{S}^1$ est donnée par $z \to z^3$. On affirme que X est simplement connexe.



L'espace X ne se représente pas facilement dans $\mathbb{R}^3$. La figure ci-dessus est une visualisation partielle. Pour obtenir X il faut recoller un disque le long de la courbe qui tourne trois fois autour de $\mathbb{S}^1$.

2.– [2pts] On affirme que le genre g de la surface ci-dessous est trois.



La surface est en deux exemplaires : n'hésitez pas à dessiner par dessus pour mieux la comprendre et/ou présenter vos arguments. Dans ce cas, mettez votre nom sur l'énoncé et joignez-le à votre copie.

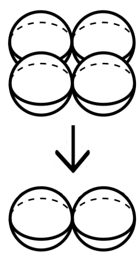
3.– [2pts] Soient $p : \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ le revêtement donné par

$$p(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) := (e^{2i\theta_1}, e^{2i\theta_2})$$

et $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ l'application diagonale $f(z) = (z, z)$. On affirme que f se relève en une application $\widetilde{f}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T}^2 \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

4.– [2pts] On appelle *collier de n sphères*, $n \geq 2$, l'espace $Y_n = col(\mathbb{S}^2_1, ..., \mathbb{S}^2_n)$ obtenu à partir de n sphères disjointes que l'on assemble en collier en identifiant le pôle Nord de $\mathbb{S}^2_i$ avec le pôle Sud de $\mathbb{S}^2_{i+1}$. Puis on réalise une boucle en identifiant le pôle Nord de $\mathbb{S}^2_n$ avec le pôle Sud de $\mathbb{S}^2_1$. On crée ainsi un espace dont le groupe fondamental $\pi_1(Y_n, y) = \mathbb{Z}$ est celui du cercle (quel que soit le point y). On affirme qu'il n'existe pas de revêtement du bouquet $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$ par Y_n.



Un (hypothétique) revêtement de $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$ par Y_4 ?

5.– [2pts] On considère les colliers de sphères $Y_6 = col(\mathbb{S}^2_1, ..., \mathbb{S}^2_6)$ et $Y_2 = col(\mathbb{S}^2_{pair}, \mathbb{S}^2_{impair})$ ainsi que le revêtement $p : Y_6 \to Y_2$ qui envoie les sphères d'indice pair sur $\mathbb{S}^2_{pair}$ et les autres sur $\mathbb{S}^2_{impair}$. On définit une application "décalage de deux indices" $s_2 : Y_6 \to Y_6$ qui, pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, envoie les points de la sphère $\mathbb{S}^2_i$ sur les points correspondants de la sphère $\mathbb{S}^2_{i+2}$. Circulairement, pour $i = 5$, elle envoie $\mathbb{S}^2_5$ sur $\mathbb{S}^2_1$ et pour $i = 6$, $\mathbb{S}^2_6$ sur $\mathbb{S}^2_2$. On affirme que s_2 est un automorphisme du revêtement p.

Problème.– Le but de ce problème est de découvrir le revêtement d'Arnold. Ce revêtement lui a permis de donner une preuve topologique du théorème d'Abel-Ruffini : il n'existe pas de formule par radicaux donnant les racines d'un polynôme de degré cinq.

Vladimir Arnold (1937-2010)
(Photographie : Jürgen Moser).

Partie 1 : L'espace de configuration $\mathrm{Conf}_k(X)$.– Soit X un ensemble et $k \geq 2$ un entier. L'espace des k configurations (ordonnées) de X est l'ensemble des k-uplets $(x_1, ..., x_k)$ de points de X deux-à-deux distincts

$$\mathrm{Conf}_k(X) := \{(x_1, ..., x_k) \in X^k \,|\, x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

1) On suppose $X = \mathbb{C}$ et $k = 2$. Soit

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & (z_1 + z_2, |z_2 - z_1|, \dfrac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}). \end{array}$$

a) Montrer que h est bijective puis que c'est un homéomorphisme.

b) Montrer que la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (z, r, e^{i\theta}) & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie dont un inverse homotopique est $j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ donné par $j(e^{i\theta}) = (0, 1, e^{i\theta})$.

c) En déduire le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}), x_0)$ où $x_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2) Dans cette question, on suppose $X = \mathbb{C}$ et $k = 3$. On considère la projection

$$\begin{array}{rccc} p_{3;2}: & \mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \\ & (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & (z_1, z_2). \end{array}$$

a) Montrer que tout élément $p_{3;2}^{-1}(z_1, z_2)$ s'écrit sous la forme $(z_1, z_2, z_1 + w.(z_2 - z_1))$ où w parcourt un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ que l'on déterminera.

b) Soit

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \times A & \longrightarrow & \mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}) \\ & (z_1, z_2, w) & \longmapsto & (z_1, z_2, z_1 + w.(z_2 - z_1)). \end{array}$$

Montrer que g est un homéomorphisme.

c) En déduire le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}), y_0)$ où $y_0 = (x_0, i)$. On admettra que le plan auquel on a enlevé k points est homotopiquement équivalent à un bouquet de k cercles.

Partie 2 : L'espace de configuration non ordonné $\mathrm{UConf}_k(X)$.– Soit S_k le groupe des permutations de k éléments. On considère l'action à gauche

$$\begin{array}{rccc} \phi : & S_k \times \mathrm{Conf}_k(X) & \longrightarrow & \mathrm{Conf}_k(X) \\ & (\sigma, x_1, ..., x_k) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}). \end{array}$$

On note $\{x_1, ..., x_k\}$ l'orbite de $(x_1, ..., x_k)$ et $\mathrm{UConf}_k(X) = \mathrm{Conf}_k(X)/S_k$ l'ensemble des orbites qui est appelé le *k-ème espace de configuration non ordonnée de X*.

3) On suppose que X est un espace topologique localement compact. On rappelle qu'il découle immédiatement de la topologie d'un produit que chaque application

$$\begin{array}{rccc} \phi_\sigma : & X^k & \longrightarrow & X^k \\ & (x_1, ..., x_k) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) \end{array}$$

est continue.

a) Montrer que ϕ opère continûment, proprement discontinûment et librement.

b) On admet que $\mathrm{Conf}_k(X)$ est localement compact. Montrer que l'espace quotient $\mathrm{UConf}_k(X)$ est séparé.

c) Montrer que l'application quotient $p_U : \mathrm{Conf}_k(X) \to \mathrm{UConf}_k(X)$ est un revêtement.

d) Montrer que le cardinal de la fibre de p_U est $k!$

4) On pose $C = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ et on considère $\Phi : \mathbb{Z}_2 \times C \to C$ l'action donnée par

$$\Phi(-1, (z, r, e^{i\theta})) = (z, r, -e^{i\theta})$$

et où $\mathbb{Z}_2$ est vu comme le groupe multiplicatif à deux éléments $\{-1, 1\}$. On note $[(z, r, e^{i\theta})]$ la classe de l'élément $(z, r, e^{i\theta})$ et $UC = C/\mathbb{Z}_2$ l'espace de toutes les classes. Puisque Φ n'agit que sur le dernier facteur de C, on a $UC = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times (\mathbb{S}^1/\sim)$ où $\sim$ est la relation d'antipodie. On admet que l'espace quotient $\mathbb{S}^1/\sim$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

a) Montrer que $q : C \to UC$ est un revêtement à deux feuillets.

b) Montrer que $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$ est contractile.

c) On considère la restriction $q_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to (\mathbb{S}^1/\sim)$ de ce revêtement au facteur $\mathbb{S}^1$ de C. Montrer que l'application $S : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ donnée par $S(z) = z^2$ passe au quotient en une application continue $\overline{S} : (\mathbb{S}^1/\sim) \to \mathbb{S}^1$.

d) Montrer que $\overline{S}$ est un homéomorphisme.

e) Montrer que $\pi_1(UC, [(0, 1, 1)]) = \mathbb{Z}$.

f) Soit $s \in [0, 1]$. Parmi les trois lacets

$$s \mapsto q(0, 1, e^{i\pi s}), \quad s \mapsto S(0, 1, e^{i\pi s}), \quad s \mapsto q(0, 1, e^{2i\pi s})$$

lequel est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(UC, [(0, 1, 1)])$ de UC ?

5) On s'intéresse à l'espace $\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \overline{h} : & \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & UC \\ & \{z_1, z_2\} & \longmapsto & [h(z_1, z_2)] \end{array}$$

est bien définie (h est l'homéomorphisme défini à la question 1).

b) Montrer que $\overline{h}$ est continue. On pourra s'appuyer sur le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_U"'] & C \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\overline{h}"] & UC
\end{tikzcd}$$

et en utiliser le fait que h est continue.

c) Pour des questions de temps, on admet que $\bar{h}$ est un homéomorphisme. Déterminer le groupe fondamental de $\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C})$ au point $\{x_0\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

Partie 3 : Le revêtement d'Arnold.– On considère l'espace affine des polynômes de degré k et dont le cœfficient dominant est 1 :

$$\mathrm{Poly}_k(\mathbb{C}) := \{X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_0 \,|\, (a_0, \cdots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k\}.$$

On note $D_k \subset \mathrm{Poly}_k(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des polynômes ayant au moins une racine multiple et on pose

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}) := \mathrm{Poly}_k(\mathbb{C}) \setminus D_k.$$

Le *revêtement d'Arnold* est l'application

$$\begin{array}{rccc} p_A : & \mathrm{Conf}_k(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) \\ & (z_1, ..., z_k) & \longmapsto & \prod_{\ell=1}^{k}(X - z_\ell) \end{array}$$

6) On considère les applications quotients $\bar{p}_A$ et $\bar{p}_U$ figurées dans les diagrammes ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "p_U"'] \arrow[dr, "p_A"] & \\
\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{p}_A"] & \mathcal{P}_2(\mathbb{C})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "p_A"'] \arrow[dr, "p_U"] & \\
\mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{p}_U"] & \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Écrire explicitement $\bar{p}_A$ et $\bar{p}_U$ et dire pourquoi ce sont des homéomorphismes.

7) On suppose $k = 2$. On considère le lacet

$$s \longmapsto \gamma(s) := \left(-\frac{1}{2}e^{2i\pi s}, \frac{1}{2}e^{2i\pi s}\right) \in \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})$$

où $s \in [0, 1]$.

a) Le lacet γ est-il contractible dans $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})$?

b) Le lacet $p_A \circ \gamma$ est-il contractible dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$?

c) On considère la famille de polynômes

$$P_s(X) := X^2 - \frac{1}{4}e^{2i\pi s}$$

où $s \in [0, 1]$. Montrer que le lacet $s \longmapsto P_s(X)$ est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{P}_2(\mathbb{C}), P_0)$. On pourra s'appuyer sur le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[d, "p_U"] & C \arrow[l, "h^{-1}"'] \arrow[d, "q"] \\
\mathcal{P}_2(\mathbb{C}) & \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \arrow[l, "\bar{p}_A"'] & UC \arrow[l, "\bar{h}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$