Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Topologie Agébrique

Corrigé du contrôle terminal du 23 mai 2025 - durée 2h

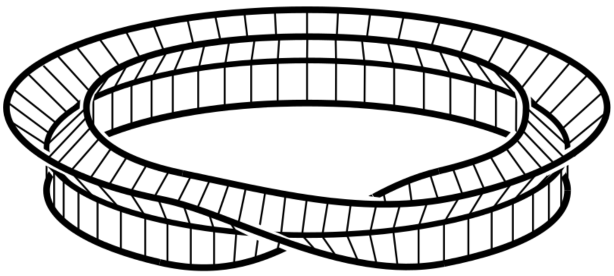
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] On considère le CW-complexe X composé d'un point, d'une 1-cellule et d'une 2-cellule :

$$X^0 = \{x_0\}, \quad X^1 = \mathbb{S}^1 \quad \text{et} \quad X^2 = X.$$

Dans l'égalité $X^1 = \mathbb{S}^1$ on considère $\mathbb{S}^1$ comme le cercle unité des complexes et on identifie x_0 au nombre 1. L'application d'attachement $\varphi : \partial e_2 = \mathbb{S}^1 \longrightarrow X^1 = \mathbb{S}^1$ est donnée par $z \to z^3$. On affirme que X est simplement connexe.



L'espace X ne se représente pas facilement dans $\mathbb{R}^3$. La figure ci-dessus est une visualisation partielle. Pour obtenir X il faut recoller un disque le long de la courbe qui tourne trois fois autour de $\mathbb{S}^1$.

Rép.– FAUX. D'après le cours (TA6), on a

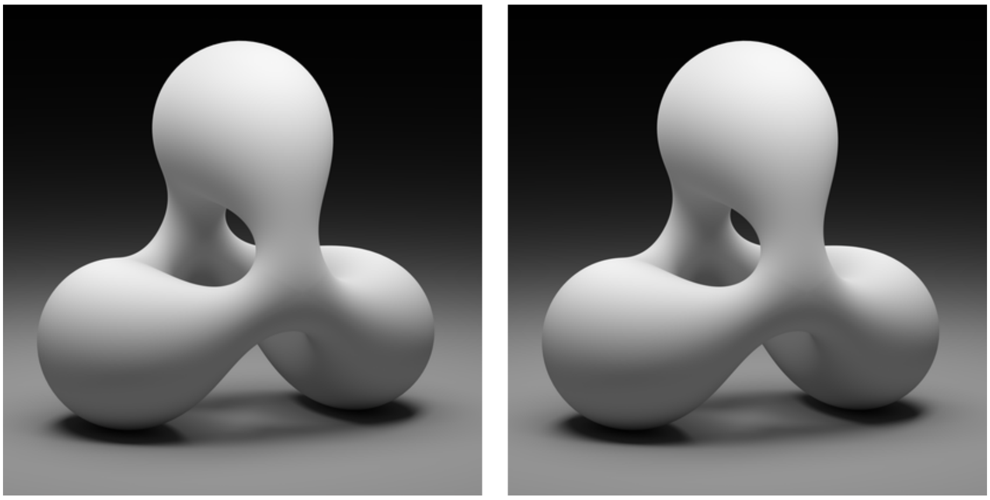
$$\pi_1(X, 1) = \pi_1(X^1, 1)/N$$

où N est le sous-groupe normal engendré par $[\varphi_\omega]$. Or d'après l'énoncé φ_* est l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_* : & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & 3n \end{array}$$

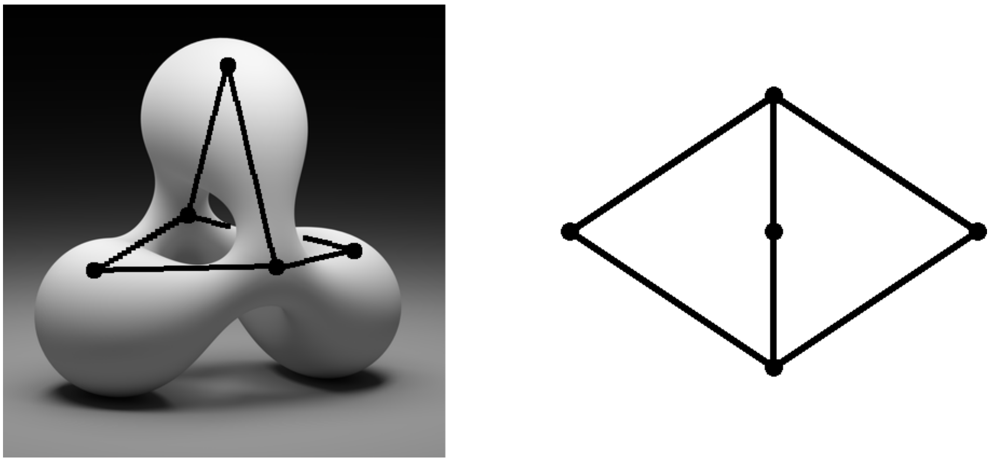
ainsi $N = 3\mathbb{Z}$ et $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.– [2pts] On affirme que le genre g de la surface ci-dessous est trois.



La surface est en deux exemplaires : n'hésitez pas à dessiner par dessus pour mieux la comprendre et/ou présenter vos arguments. Dans ce cas, mettez votre nom sur l'énoncé et joignez-le à votre copie.

Rép.– FAUX. La surface est de genre 2. Pour s'en convaincre, on constate que c'est l'épaississement du graphe figuré à gauche sur la figure ci-dessous. Lorsque l'on met ce graphe à plat et que l'on épaissit, une surface de genre 2 apparaît.



3.– [2pts] Soient $p : \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ le revêtement donné par

$$p(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) := (e^{2i\theta_1}, e^{2i\theta_2})$$

et $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ l'application diagonale $f(z) = (z, z)$. On affirme que f se relève en une application $\widetilde{f}$:

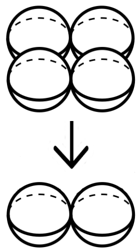
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T}^2 \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

Rép.– FAUX. L'application f se relève ssi

$$f_*\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \subset p_*\pi_1(\mathbb{T}^2, (1,1)).$$

Or $p_*\pi_1(\mathbb{T}^2, (1,1)) = 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} = \{(2n, 2m) \,|\, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $f_*\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}(1,1) = \{(n,n) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

4.– [2pts] On appelle *collier de n sphères*, $n \geq 2$, l'espace $Y_n = col(\mathbb{S}^2_1, ..., \mathbb{S}^2_n)$ obtenu à partir de n sphères disjointes que l'on assemble en collier en identifiant le pôle Nord de $\mathbb{S}^2_i$ avec le pôle Sud de $\mathbb{S}^2_{i+1}$. Puis on réalise une boucle en identifiant le pôle Nord de $\mathbb{S}^2_n$ avec le pôle Sud de $\mathbb{S}^2_1$. On crée ainsi un espace dont le groupe fondamental $\pi_1(Y_n, y) = \mathbb{Z}$ est celui du cercle (quel que soit le point y). On affirme qu'il n'existe pas de revêtement du bouquet $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$ par Y_n.



Un (hypothétique) revêtement de $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$ par Y_4 ?

Rép.– VRAI. Si un tel revêtement p existait, d'après le théorème d'injectivité (TA8) le morphisme

$$p_* : \pi(Y_n, y) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2, b)$$

serait injectif. Ce n'est pas possible car d'une part, d'après l'énoncé, $\pi_1(Y_n, x) = \mathbb{Z}$ et d'autre part $\pi_1(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2, b)$ est trivial.

5.– [2pts] On considère les colliers de sphères $Y_6 = col(\mathbb{S}^2_1, ..., \mathbb{S}^2_6)$ et $Y_2 = col(\mathbb{S}^2_{pair}, \mathbb{S}^2_{impair})$ ainsi que le revêtement $p : Y_6 \to Y_2$ qui envoie les sphères d'indice pair sur $\mathbb{S}^2_{pair}$ et les autres sur $\mathbb{S}^2_{impair}$. On définit une application "décalage de deux indices" $s_2 : Y_6 \to Y_6$ qui, pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, envoie les points de la sphère $\mathbb{S}^2_i$ sur les points correspondants de la sphère $\mathbb{S}^2_{i+2}$. Circulairement, pour $i = 5$, elle envoie $\mathbb{S}^2_5$ sur $\mathbb{S}^2_1$ et pour $i = 6$, $\mathbb{S}^2_6$ sur $\mathbb{S}^2_2$. On affirme que s_2 est un automorphisme du revêtement p.

Rép.– VRAI. Le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd} Y_6 \arrow[rr, "s_2"] \arrow[dr, "p"'] & & Y_6 \arrow[dl, "p"] \\ & Y_2 & \end{tikzcd}$$

En effet, à cause de la parité dans le décalage des indices, l'application s_2 laisse stable toutes les fibres $p^{-1}(y)$ avec $y \in Y_2$. Il en est de même des deux autres décalages s_4 et $s_6 = id$. En revanche, les décalages s_1, s_3 et s_5 permutent les fibres et ne sont donc pas des automorphismes de revêtements.

Problème.– Le but de ce problème est de découvrir le revêtement d'Arnold. Ce revêtement lui a permis de donner une preuve topologique du théorème d'Abel-Ruffini : il n'existe pas de formule par radicaux donnant les racines d'un polynôme de degré cinq.

Vladimir Arnold (1937-2010)
(Photographie : Jürgen Moser).

Partie 1 : L'espace de configuration $\text{Conf}_k(X)$.– Soit X un ensemble et $k \geq 2$ un entier. L'espace des k configurations (ordonnées) de X est l'ensemble des k-uplets $(x_1, ..., x_k)$ de points de X deux-à-deux distincts

$$\text{Conf}_k(X) := \{(x_1, ..., x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

1) On suppose $X = \mathbb{C}$ et $k = 2$. Soit

$$\begin{array}{rccc} h: & \text{Conf}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & (z_1 + z_2, |z_2 - z_1|, \dfrac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}). \end{array}$$

a) Montrer que h est bijective puis que c'est un homéomorphisme.
b) Montrer que la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (z, r, e^{i\theta}) & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie dont un inverse homotopique est $j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ donné par $j(e^{i\theta}) = (0, 1, e^{i\theta})$.
c) En déduire le groupe fondamental $\pi_1(\text{Conf}_2(\mathbb{C}), x_0)$ où $x_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Rép.– 1) a) Soit $(z, r, e^{i\theta}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$. Cherchons à résoudre l'équation $h(z_1, z_2) = (z, r, e^{i\theta})$. On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & z \\ |z_2 - z_1| & = & r \\ \dfrac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|} & = & e^{i\theta} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_2 + z_1 & = & z \\ z_2 - z_1 & = & re^{i\theta} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & \frac{1}{2}(z - re^{i\theta}) \\ z_2 & = & \frac{1}{2}(z + re^{i\theta}) \end{array} \right.$$

Ainsi h est bijective et

$$h^{-1}(z, r, e^{i\theta}) = (\frac{1}{2}(z - re^{i\theta}), \frac{1}{2}(z + re^{i\theta})).$$

Les expressions analytiques montrent que h et h^{-1} sont continues. Ainsi h est un homéomorphisme.
b) Il est immédiat que $\pi \circ j = id_{\mathbb{S}^1}$. On a aussi $j \circ \pi(z, r, e^{i\theta}) = (0, 1, e^{i\theta})$. La famille d'applications

$$H_t(z, r, e^{i\theta}) = (tz, (1 - t) + tr, e^{i\theta})$$

est telle que $H_0 = j \circ \pi$ et $H_1 = id_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{S}^1}$. Puisque $(1-t)+tr > 0$ comme somme de deux quantités positives, chaque élément de la famille est à valeur dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$. Ceci montre que j est un inverse homotopique de π et que par conséquent π est une équivalence d'homotopie.
c) Puisque l'application π est une équivalence d'homotopie, elle induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux

$$\pi_1(C, (0,1,1)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$$

et puisque h est un homéomorphisme et que $h(x_0) = (0,1,1)$

$$\pi_1(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}), x_0) \xrightarrow{h_*} \pi_1(C, (0,1,1)).$$

Enfin, d'après le cours $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$. On en déduit $\pi_1(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}), x_0) = \mathbb{Z}$.

2) Dans cette question, on suppose $X = \mathbb{C}$ et $k = 3$. On considère la projection

$$\begin{array}{rccc} p_{3;2}: & \mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \\ & (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & (z_1, z_2). \end{array}$$

a) Montrer que tout élément $p_{3;2}^{-1}(z_1, z_2)$ s'écrit sous la forme $(z_1, z_2, z_1 + w.(z_2 - z_1))$ où w parcourt un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ que l'on déterminera.
b) Soit

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \times A & \longrightarrow & \mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}) \\ & (z_1, z_2, w) & \longmapsto & (z_1, z_2, z_1 + w.(z_2 - z_1)). \end{array}$$

Montrer que g est un homéomorphisme.
c) En déduire le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}), y_0)$ où $y_0 = (x_0, i)$. On admettra que le plan auquel on a enlevé k points est homotopiquement équivalent à un bouquet de k cercles.

Rép.– 2a) On a

$$p_{3;2}^{-1}(z_1, z_2) = \{(z_1, z_2, z) \mid z \neq z_1, z \neq z_2\}.$$

Autrement dit, il s'agit de tous les points (z_1, z_2, z) avec $z = z_1 + w.(z_2 - z_1)$ et $w \neq 0$, $w \neq 1$. Ainsi $A = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
b) D'après la question a, l'application g est bijective. Son inverse se calcule facilement

$$g^{-1}(z_1, z_2, z) = (z_1, z_2, \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}).$$

Les deux applications étant continues, on en déduit que g est un homéomorphisme.
c) On a

$$\pi_1(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}), y_0) = \pi_1(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}), x_0) \times \pi_1(A, i)$$

D'après la question précédente et ce qu'il est demandé d'admettre dans l'énoncé, on déduit

$$\pi_1(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{C}), y_0) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, i) = \mathbb{Z} \times F_2$$

où F_2 est le groupe libre à deux éléments.

Partie 2 : L'espace de configuration non ordonné $\mathrm{UConf}_k(X)$.– Soit S_k le groupe des permutations de k éléments. On considère l'action à gauche

$$\begin{array}{rccc} \phi: & S_k \times \mathrm{Conf}_k(X) & \longrightarrow & \mathrm{Conf}_k(X) \\ & (\sigma, x_1, ..., x_k) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}). \end{array}$$

On note $\{x_1, ..., x_k\}$ l'orbite de $(x_1, ..., x_k)$ et $\mathrm{UConf}_k(X) = \mathrm{Conf}_k(X)/S_k$ l'ensemble des orbites qui est appelé le *k-ème espace de configuration non ordonnée de X.*

3) On suppose que X est un espace topologique localement compact. On rappelle qu'il découle immédiatement de la topologie d'un produit que chaque application

$$\begin{array}{rccc} \phi_\sigma: & X^k & \longrightarrow & X^k \\ & (x_1, ..., x_k) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) \end{array}$$

est continue.

a) Montrer que ϕ opère continûment, proprement discontinûment et librement.

b) On admet que $\mathrm{Conf}_k(X)$ est localement compact. Montrer que l'espace quotient $\mathrm{UConf}_k(X)$ est séparé.

c) Montrer que l'application quotient $p_U : \mathrm{Conf}_k(X) \to \mathrm{UConf}_k(X)$ est un revêtement.

d) Montrer que le cardinal de la fibre de p_U est k!

Rép.– a) L'action est continue car d'après le rappel, chaque application ϕ_σ est continue. Puisque le groupe S_k est de cardinal fini, ϕ opère proprement discontinûment. Enfin

$$\phi(\sigma, (x_1, ..., x_k)) = (x_1, ..., x_k) \iff (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) = (x_1, ..., x_k)$$

et puisque les composantes $x_1, ..., x_k$ sont distinctes deux-à-deux

$$(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) = (x_1, ..., x_k) \iff \sigma(1) = 1, ..., \sigma(k) = k \iff \sigma = id.$$

Ainsi l'action est libre.

b) D'après une proposition du cours, le groupe S_k étant discret et opérant continûment, proprement discontinûment et librement sur l'espace localement compact $\mathrm{Conf}_k(X)$, l'espace quotient $\mathrm{UConf}_k(X)$ est séparé.

c) D'après le cours, le groupe S_k étant discret et opérant continûment, proprement discontinûment et librement sur l'espace localement compact $\mathrm{UConf}_k(X)$, l'application quotient

$$p_U : \mathrm{Conf}_k(X) \longrightarrow \mathrm{UConf}_k(X)$$

est un revêtement.

d) L'action étant libre chaque orbite contient Card $S_k = k!$ éléments. Le revêtement est donc à $k!$ feuillets.

4) On pose $C = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ et on considère $\Phi : \mathbb{Z}_2 \times C \to C$ l'action donnée par

$$\Phi(-1, (z, r, e^{i\theta})) = (z, r, -e^{i\theta})$$

et où $\mathbb{Z}_2$ est vu comme le groupe multiplicatif à deux éléments $\{-1, 1\}$. On note $[(z, r, e^{i\theta})]$ la classe de l'élément $(z, r, e^{i\theta})$ et $UC = C/\mathbb{Z}_2$ l'espace de toutes les classes. Puisque Φ n'agit que sur le dernier facteur de C, on a $UC = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \times (\mathbb{S}^1/\sim)$ où $\sim$ est la relation d'antipodie. On admet que l'espace quotient $\mathbb{S}^1/\sim$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

a) Montrer que $q : C \to UC$ est un revêtement à deux feuillets.

b) Montrer que $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$ est contractile.

c) On considère la restriction $q_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to (\mathbb{S}^1/\sim)$ de ce revêtement au facteur $\mathbb{S}^1$ de C. Montrer que l'application $S : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ donnée par $S(z) = z^2$ passe au quotient en une application continue $\overline{S} : (\mathbb{S}^1/\sim) \to \mathbb{S}^1$.

d) Montrer que $\overline{S}$ est un homéomorphisme.

e) Montrer que $\pi_1(UC, [(0, 1, 1)]) = \mathbb{Z}$.

f) Soit $s \in [0, 1]$. Parmi les trois lacets

$$s \mapsto q(0, 1, e^{i\pi s}), \quad s \mapsto S(0, 1, e^{i\pi s}), \quad s \mapsto q(0, 1, e^{2i\pi s})$$

lequel est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(UC, [(0, 1, 1)])$ de UC ?

Rép.– a) L'espace C est localement compact, l'expression de l'action montre que le groupe $\mathbb{Z}_2$ agit continûment, et puisque ce groupe est fini, il agit proprement discontinûment. L'action est libre car

$$\Phi(-1, (z, r, e^{i\theta})) = (z, r, e^{i\theta}) \iff (z, r, -e^{i\theta}) = (z, r, e^{i\theta}) \iff e^{i\theta} = -e^{i\theta}.$$

La dernière équation n'ayant aucune solution, l'action de -1 ne fixe aucun élément. On en déduit que q est un revêtement à Card $\mathbb{Z}_2 = 2$ feuillets.

b) Soit c l'application constante $c(z, r) = (0, 1)$. Il faut montrer qu'elle est homotope à $id_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*}$. Pour cela il suffit de considérer l'homotopie

$$c_t(z, r) = (1 - t)(0, 1) + t(z, r).$$

On a $c_0 = c$ et $c_1 = id_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}_+^*}$.
c) On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "q_{|\mathbb{S}^1}"'] & \mathbb{S}^1 \\ (\mathbb{S}^1/\sim) \arrow[ur, "\overline{S}"] & \end{tikzcd}$$

L'application S passe au quotient car $S(-e^{i\theta}) = e^{2i\theta} = S(e^{i\theta})$. D'après la proposition de transfert de continuité au quotient, l'application quotient $\overline{S}$ est bien définie et continue.
d) L'application $\overline{S}$ est surjective car S est surjective. Elle est bijective car $S(z_1) = S(z_2)$ est équivalent à $z_2 = \pm z_1$. et donc $z_1 \sim z_2$. L'espace $\mathbb{S}^1$ étant compact, l'espace $(\mathbb{S}^1/\sim)$ séparé, $q_{|\mathbb{S}^1}$ continue, $\mathbb{S}^1/\sim = q_{|\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1)$ est compact. Enfin $\overline{S}$ qui est une application continue d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.
e) D'après les questions précédentes, on a

$$\pi_1(UC, [(0,1,1)]) = \pi_1(\mathbb{S}^1/\sim, [1]) = \mathbb{Z}.$$

f) Un lacet générateur est donné par $\delta(s) = q(0, 1, e^{i\pi s})$ avec $s \in [0,1]$).

5) On s'intéresse à l'espace $\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C})$.
 a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \overline{h}: & \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & UC \\ & \{z_1, z_2\} & \longmapsto & [h(z_1, z_2)] \end{array}$$

est bien définie (h est l'homéomorphisme défini à la question 1).
 b) Montrer que $\overline{h}$ est continue. On pourra s'appuyer sur le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_U"'] & C \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\overline{h}"] & UC \end{tikzcd}$$

et en utiliser le fait que h est continue.
 c) Pour des questions de temps, on admet que $\overline{h}$ est un homéomorphisme [1]. Déterminer le groupe fondamental de $\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C})$ au point $\{x_0\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

Rép.– a) Il suffit de vérifier que $[h(z_2, z_1)] = [h(z_1, z_2)]$. Or, d'après l'expression de h :

$$h(z_2, z_1) = (z_2 + z_1, |z_1 - z_2|, \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|}) = (z_1 + z_2, |z_2 - z_1|, -\frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}) = \Phi(h(z_1, z_2)))$$

il en découle que $[h(z_2, z_1)] = [h(z_1, z_2)]$.
b) Par définition de la topologie quotient, q est continue. Puisque h est continue, on en déduit que $q \circ h$ est continue. Puis par la proposition de transfert de continuité au quotient, il s'en suit que $\overline{h}$ est continue.
c) Puisque $\overline{h}$ est un homéomorphisme et que $\overline{h}(\{x_0\}) = [(0,1,1)]$, on a

$$\pi_1(\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}), \{x_0\}) = \pi_1(UC, [(0,1,1)]) = \mathbb{Z}.$$

PARTIE 3 : LE REVÊTEMENT D'ARNOLD.– On considère l'espace affine des polynômes de degré k et dont le cœfficient dominant est 1 :

$$\mathrm{Poly}_k(\mathbb{C}) := \{X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_0 \mid (a_0, \cdots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k\}.$$

1. Le démontrer n'est pas difficile. En adaptant les arguments de la question b) à l'application h^{-1}, on montre que $\overline{h^{-1}}$ est continue. En utilisant le fait que $h \circ h^{-1} = id_C$ et $h^{-1} \circ h = id_{\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})}$, on montre ensuite que $\overline{h}$ est inversible d'inverse $(\overline{h})^{-1} = \overline{h^{-1}}$.

On note $D_k \subset \mathrm{Poly}_k(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des polynômes ayant au moins une racine multiple et on pose

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}) := \mathrm{Poly}_k(\mathbb{C}) \setminus D_k.$$

Le *revêtement d'Arnold* est l'application

$$\begin{array}{rccc} p_A : & \mathrm{Conf}_k(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) \\ & (z_1, ..., z_k) & \longmapsto & \prod_{\ell=1}^k (X - z_\ell) \end{array}$$

6) On considère les applications quotients $\bar{p}_A$ et $\bar{p}_U$ figurées dans les diagrammes ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "p_U"'] \arrow[dr, "p_A"] & \\ \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{p}_A"] & \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "p_A"'] \arrow[dr, "p_U"] & \\ \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{p}_U"] & \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Écrire explicitement $\bar{p}_A$ et $\bar{p}_U$ et dire pourquoi ce sont des homéomorphismes.

Rép.– On a immédiatement

$$\bar{p}_A(\{z_1, ..., z_k\}) = p_A(z_1, ..., z_k) = \prod_{\ell=1}^{k} (X - z_\ell)$$

et

$$\bar{p}_U \left(\prod_{\ell=1}^{k} (X - z_\ell) \right) = p_U(z_1, ..., z_k) = \{z_1, ..., z_k\}.$$

Ainsi les applications $\bar{p}_A$ et $\bar{p}_U$ sont inverses l'une de l'autre. Elles sont continues comme quotients d'applications continues. Ce sont donc des homéomorphismes.

7) On suppose $k = 2$. On considère le lacet

$$s \longmapsto \gamma(s) := \left(-\frac{1}{2} e^{2i\pi s}, \frac{1}{2} e^{2i\pi s} \right) \in \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})$$

où $s \in [0, 1]$.

a) Le lacet γ est-il contractible dans $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})$?

b) Le lacet $p_A \circ \gamma$ est-il contractible dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$?

c) On considère la famille de polynômes

$$P_s(X) := X^2 - \frac{1}{4} e^{2i\pi s}$$

où $s \in [0, 1]$. Montrer que le lacet $s \longmapsto P_s(X)$ est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{P}_2(\mathbb{C}), P_0)$. On pourra s'appuyer sur le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}) \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[d, "p_U"] & C \arrow[l, "h^{-1}"'] \arrow[d, "q"] \\ \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) & \mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}) \arrow[l, "\bar{p}_A"'] & UC \arrow[l, "\bar{h}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Rép.– a) Utilisons l'homéomorphisme h pour transporter γ dans l'espace C que l'on maîtrise mieux. Soit

$$\widetilde{\gamma}(s) := h(\gamma(s)) = (0, 1, e^{2i\pi s})$$

Il est clair d'après l'étude faite précédemment que $\widetilde{\gamma}$ est un générateur du $\pi_1(C,(0,1,1)) = \mathbb{Z}$. En particulier, ni $\widetilde{\gamma}$ ni γ ne peuvent être contractibles.
b) Notons que $p_A(x_0) = p_A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = X^2 - \frac{1}{4} = P_0$. Le théorème de l'injectivité assure que

$$(p_A)_* : \pi_1(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C}), x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{P}_2(\mathbb{C}), P_0)$$

est injectif. Puisque $[\gamma] \neq 0$ on ne peut avoir $[p_A \circ \gamma] = 0$ ce qui montre que $p_A \circ \gamma$ n'est pas contractible dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$.
c) D'après la question 4f) un lacet générateur du $\pi_1(UC, [(0,1,1)])$ est $\delta(s) = q(0,1,e^{i\pi s})$ avec $s \in [0,1]$). On en déduit qu'un lacet générateur η du $\pi_1(\mathrm{UConf}_2(\mathbb{C}), \{x_0\})$ est donné par :

$$\eta(s) = (\bar{p}_A \circ \overline{h}^{-1} \circ \delta)(s) = (\bar{p}_A \circ \overline{h}^{-1} \circ q)(0,1,e^{i\pi s}).$$

Or, on lit sur le diagramme que

$$\bar{p}_A \circ \overline{h}^{-1} \circ q = p_A \circ h^{-1}$$

et donc

$$\eta(s) = p_A \circ h^{-1}(0,1,e^{i\pi s}) = p_A \left(\frac{1}{2}(0 - 1 \times e^{i\pi s}), \frac{1}{2}(0 + 1 \times e^{i\pi s}) \right) = p_A(-\frac{1}{2}e^{i\pi s}, \frac{1}{2}e^{i\pi s}).$$

Par définition du revêtement d'Arnold, on a

$$p_A(-\frac{1}{2}e^{i\pi s}, \frac{1}{2}e^{i\pi s}) = (X + \frac{1}{2}e^{i\pi s})(X - \frac{1}{2}e^{i\pi s}) = X^2 - \frac{1}{4}e^{2i\pi s} = P_s(X).$$