# CM-C2 : Propriétés métriques des courbes

Vincent Borrelli

Université de Lyon


*Spirales logarithmiques*

# Longueur et courbure

• A partir de maintenant $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire.

**Définition.–** Soit $I = (a, b)$ et $\gamma : I \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. La LONGUEUR de $\gamma$ est la quantité

$$Long(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leq +\infty.$$

L'ABSCISSE CURVILIGNE est la fonction

$$t \longmapsto S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du.$$

# Longueur et courbure

**Exemple 1.–** Soient

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \gamma_1 & := & \gamma_{|[0,2\pi]} \\ \gamma_2 & := & \gamma_{|[0,4\pi]} \end{array} \right.$$

alors

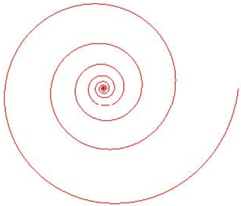
$$Long(\gamma) = +\infty, \quad Long(\gamma_1) = 2\pi \;\text{ et }\; Long(\gamma_2) = 4\pi.$$

# Longueur et courbure

**Exemple 2 : la spirale logarithmique ou *Spira Mirabilis*.–** C'est la courbe paramétrée plane $\gamma$ définie en polaire par

$$r(\theta) = ae^{b\theta}$$

où $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.



• Notons que $\lim\limits_{\theta \longrightarrow -\infty} \gamma(\theta) = O$, i. e. l'origine est point asymptote.

# Longueur et courbure

- Rappelons que

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\|^2 &= r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 \\ &= a^2(1+b^2)e^{2b\theta}. \end{aligned}$$

- Soit $X > 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_{-X}^{\theta} \|\gamma'(u)\| du &= \int_{-X}^{\theta} a\sqrt{1+b^2}\, e^{bu} du \\ &= \left[\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\, e^{bu}\right]_{-X}^{\theta} \\ &= \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\left(r(\theta) - r(-X)\right). \end{aligned}$$

- D'où, en passant à la limite

$$S(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} \|\gamma'(u)\| du = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} r(\theta).$$

# Longueur et courbure

**Définition.–** On dit qu'une courbe $\gamma$ est PARAMÉTRÉE PAR LA LONGUEUR D'ARC (ou encore PARAMÉTRÉE PAR L'ABSCISSE CURVILIGNE) si pour tout $t$ on a $\|\gamma'(t)\| = 1$.

**Proposition.–** *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe $C^k$, $k \geq 1$, régulière. Alors, existe un $C^k$-reparamétrage $\varphi : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ tel que $\beta = \gamma \circ \varphi$ soit paramétrée par la longueur d'arc.*

**Démonstration.–** La fonction abscisse curviligne est dérivable et

$$S'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

Par conséquent $S$ est une fonction $C^k$ strictement croissante, c'est donc un $C^k$-difféomorphisme de $[a, b]$ dans $[0, L]$.

# Longueur et courbure

• On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi = S^{-1} : & [0, L] & \longrightarrow & [a, b] \\ & s & \longmapsto & t = \varphi(s) \end{array}$$

et on a

$$\varphi'(s) = \frac{1}{S'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

• Posons $\beta := \gamma \circ \varphi : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On a

$$\beta'(s) = \gamma'(\varphi(s)).\varphi'(s)$$

d'où

$$\|\beta'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\|.\frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|} = 1.$$

$\square$

# Longueur et courbure

**Proposition.–** *Soit $\beta = \gamma \circ \varphi$ un $C^k$-reparamétrage ($k \geq 1$) de $\gamma$ alors $Long(\gamma) = Long(\beta)$.*

**Démonstration.–** Il s'agit d'appliquer la formule de changement de variables dans une intégrale. En effet

$$\begin{aligned}
Long(\beta) &= \int_J \|\beta'(t)\| dt \\
&= \int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \\
&= \int_J \|\gamma'(\varphi(t))\|.\|\varphi'(t)\| dt \\
&= \int_I \|\gamma'(u)\| du \\
&= Long(\gamma).
\end{aligned}$$

$\square$

# Longueur et courbure

**Définition.–** Soit $\gamma : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ paramétrée par la l.a. Le nombre

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|$$

est appelé LA COURBURE de $\gamma$ en $s$ (ou encore, COURBURE PRINCIPALE).

• Un point $s \in I$ où $k(s) \neq 0$ est dit BIRÉGULIER.

• Soit $s$ un point birégulier, on appelle NORMALE PRINCIPALE en $s$ le vecteur

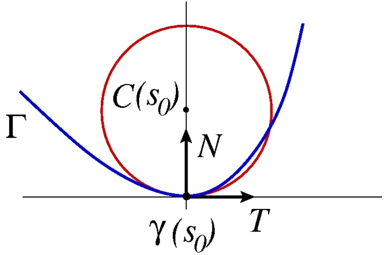
$$N(s) := \frac{1}{\|\gamma''(s)\|}\gamma''(s).$$

• Si $\gamma : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est régulière et n'est pas paramétrée par la l.a. alors la COURBURE de $\gamma$ en $t$ est celle de $\gamma \circ \varphi$ ($\varphi = S^{-1}$) au point $t = \varphi(s)$.

# Longueur et courbure

**Définition.–** On appelle CENTRE DE COURBURE en un point $s_0$ d'une courbe birégulière paramétrée par la l.a. le point

$$C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0).$$




• Le CERCLE DE COURBURE au point $s_0$ est le cercle de centre $C(s_0)$ et de rayon $\dfrac{1}{k(s_0)}$.

# Longueur et courbure

**Interprétation géométrique.–** Le développement de Taylor de $\gamma$ s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma(s)-\gamma(s_0) &= (s-s_0)\gamma'(s_0)+\frac{(s-s_0)^2}{2}\gamma''(s_0)+o((s-s_0)^2)\\ &= (s-s_0)T+k(s_0)\frac{(s-s_0)^2}{2}N+o((s-s_0)^2)\end{aligned}$$

• Un paramétrage par la l.a. $\delta$ du cercle de centre $C=\gamma(s_0)+\dfrac{1}{k(s_0)}N$ et de rayon $\dfrac{1}{k(s_0)}$ est donné par

$$\delta(s)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{k(s_0)}\end{pmatrix}+\frac{1}{k(s_0)}\begin{pmatrix}\sin(k(s_0)(s-s_0))\\ -\cos(k(s_0)(s-s_0))\end{pmatrix}$$

(dans le repère $(\gamma(s_0),T,N)$).

# Longueur et courbure

• Le développement de Taylor de $\delta$ s'écrit

$$\delta(s)-\delta(s_0)=(s-s_0)T+k(s_0)\frac{(s-s_0)^2}{2}N+o((s-s_0)^2).$$

• Ainsi *le cercle de courbure en $s_0$ à $\gamma$ approche $\gamma$ à l'ordre 2 en $s_0$.*

**Proposition.–** *Si $\gamma$ est $C^3$, birégulière et si $k'(s_0)\neq 0$ alors le support de $\gamma$ traverse le cercle osculateur en $s_0$.*

**Démonstration.–** Se placer dans le repère $(C(s_0),T,N)$ et définir

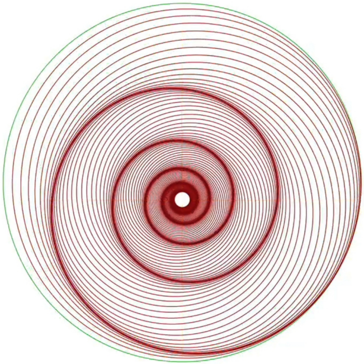
$$s\longmapsto f(s)=\langle\gamma(s),\gamma(s)\rangle.$$

• Faire un d.l. à l'ordre 3 pour constater que

$$f(s)-R^2=-\frac{k'(s_0)}{3k(s_0)}(s-s_0)^3+o((s-s_0)^3).$$

# Longueur et courbure

**Définition.–** On appelle SPIRALE une courbe $C^3$ birégulière et telle que pour tout $t$, $k'(t) \neq 0$.

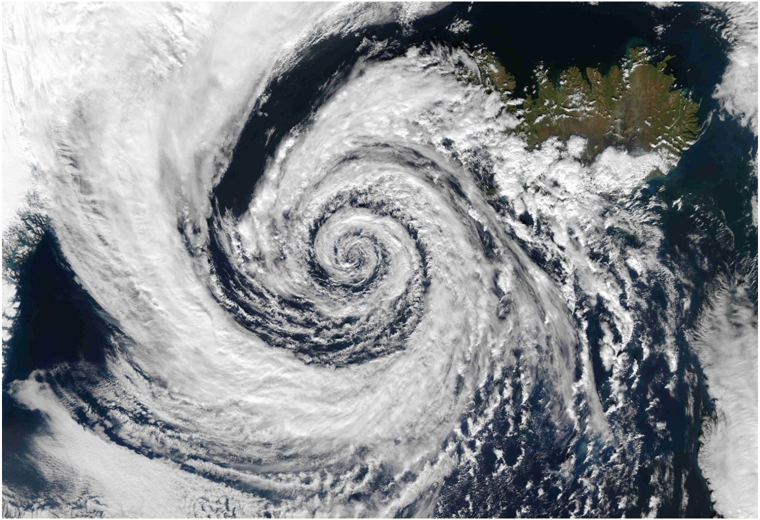


- De telles courbes traversent en tout point leur cercle osculateur.

# Spirales dans la Nature

*Une spirale logarithmique*

# Spirales dans la Nature



*Une dépression en forme de spirale logarithmique*

# Spirales dans la Nature

*Une galaxie en forme de spirale logarithmique*

# Spirales dans la Nature

*Des escargots*

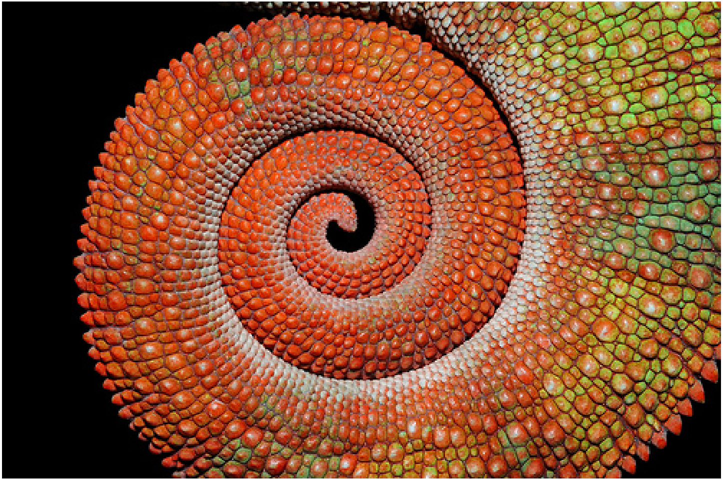
# Spirales dans la Nature

*Le cœur d'un tournesol*

# Spirales dans la Nature

*La queue d'un caméléon*

# Spirales dans la Nature



*La queue d'un caméléon*

# Spirales dans la Nature

*Un chou romanesco*

# Spirales dans la Nature

*Une fougère*

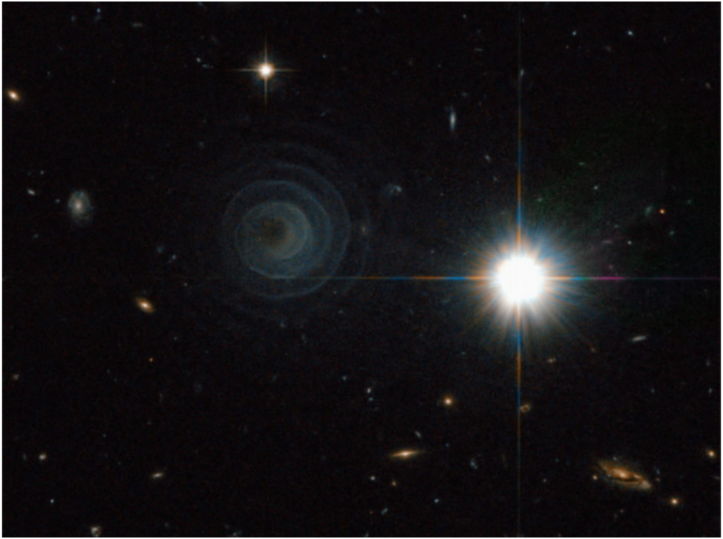
# Spirales dans la Nature

*Une fougère*

# Spirales dans la Nature

*Un coeur d'aloès*

# Spirales dans la Nature



*Une nébuleuse en forme de spirale d'Archimède*

# Courbes du plan

• Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane paramétrée par l.a. Pour tout $s \in I$, $(T(s), N(s))$ est une b.o.n. de $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle ., . \rangle)$.

Joseph Serret jeune et moins jeune

**Formules de Serret-Frenet.–** *On a*

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s) \quad et \quad \frac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s).$$

# Courbes du plan

**Démonstration.–** On a d'une part

$$\forall s \in I, \quad \langle N(s), N(s)\rangle = 1 \Longrightarrow \forall s \in I, \quad \langle \frac{dN}{ds}(s), N(s)\rangle = 0$$

donc il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{dN}{ds}(s) = \alpha(s)T(s).$$

• D'autre part

$$\forall s \in I, \quad \langle N(s), T(s)\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s \in I, \quad \langle \frac{dN}{ds}(s), T(s)\rangle = -\langle N(s), \frac{dT}{ds}(s)\rangle.$$

• Or

$$\frac{dT}{ds}(s) = \gamma''(s) = k(s)N(s)$$

d'où

$$\alpha(s) = \langle \frac{dN}{ds}(s), T(s)\rangle = -k(s).$$

# Courbes du plan

**Définition.–** Soit $\gamma$ une courbe birégulière paramétrée par la l.a. de $\mathbb{E}^2$ orienté. La NORMALE ALGÉBRIQUE est le vecteur

$$N_{alg} := Rot_{+\frac{\pi}{2}}(T).$$

La COURBURE ALGÉBRIQUE est le nombre $k_{alg}$ tel que

$$\frac{dT}{ds} = k_{alg} N_{alg}.$$

• Courbure et normale algébriques ne diffèrent au plus que d'un signe de la courbure et la normale principales. Si $N = N_{alg}$ alors $k = k_{alg}$ et si $N = -N_{alg}$ alors $k = -k_{alg}$. Dans tous les cas $|k_{alg}| = k$.

# Courbes du plan

**Proposition.–** *Soit* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$ *une courbe plane régulière mais non nécessairement paramétrée par la l.a. Alors*

$$\forall t \in I, \quad k_{alg}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Démonstration.–** Par définition

$$k_{alg}(t) := \langle (\gamma \circ \varphi)''(s), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle$$

avec $\varphi = S^{-1}$ et $t = \varphi(s)$.

• On a

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \varphi)''(s) &= (\gamma'(\varphi(s)).\varphi'(s))' \\ &= \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2 + \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s).\end{aligned}$$

# Courbes du plan

• On a

$$k_{alg}(t) = \langle (\gamma \circ \varphi)''(s), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle$$

et puisque

$$\langle \gamma'(\varphi(s)), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle = 0$$

on en déduit

$$k_{alg}(t) = \langle \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2, N_{alg}(\varphi(s)) \rangle.$$

• La normale algébrique est donnée par

$$N_{alg}(\varphi(s)) = \frac{1}{\sqrt{x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2}} \begin{pmatrix} -y'(\varphi(s)) \\ x'(\varphi(s)) \end{pmatrix}$$

où $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

# Courbes du plan

• Puisque

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi'(s))\|^2} = \frac{1}{x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2}$$

on déduit

$$k_{alg} = \frac{1}{(x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2)^{\frac{3}{2}}} \langle \begin{pmatrix} x''(\varphi(s)) \\ y''(\varphi(s)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(\varphi(s)) \\ x'(\varphi(s)) \end{pmatrix} \rangle$$

Ce qui est l'expression recherchée. $\square$

**Corollaire immédiat.–** *Pour une courbe en polaire on a*

$$k_{alg}(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

# Courbes du plan

**Exemple : la spirale logarithmique (suite).–**

• Puisque $r(\theta) = ae^{b\theta}$ on a

$$r' = br \quad \text{et} \quad r'' = b^2 r$$

d'où

$$r^2 + 2(r')^2 - rr'' = (1+b^2)r^2 \quad \text{et} \quad r^2 + (r')^2 = (1+b^2)r^2.$$

• Ainsi

$$\begin{aligned} k_{alg} &= \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1+b^2)r^2}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}} r^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}\, r}. \end{aligned}$$

# Courbes du plan

• Le rayon de courbure au point $\theta$ est donc

$$R(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} = \sqrt{1+b^2}\, r(\theta).$$

• Rappelons que

$$S(\theta) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} r(\theta)$$

ainsi

$$R(\theta) = bS(\theta).$$

• Pour une spirale logarithmique, rayon de courbure et longueur d'arc sont donc proportionnels.

# Courbes du plan

**Théorème fondamental des courbes planes.–** *Soit* $k_{alg} : [a,b] \stackrel{C^0}{\longrightarrow} \mathbb{R}$. *Alors il existe une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ *paramétrée par la l.a. telle que sa courbure algébrique soit* $k_{alg}$. *De plus* $\gamma$ *est unique à déplacement près.*

**Démonstration.–** Soit

$$\begin{array}{rccc} \theta_0 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_a^s k_{alg}(u)du \end{array}$$

et $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s) & = & \displaystyle\int_a^s \cos\theta_0(u)\, du \\ y(s) & = & \displaystyle\int_a^s \sin\theta_0(u)\, du \end{array} \right.$$

# Courbes du plan

• On a immédiatement $\|\gamma_0'(s)\| = 1$ et $\gamma_0''(s) = k_{alg}(s)N_{alg}(s)$ d'où l'existence.

• Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ ayant la fonction $k_{alg}$ pour courbure algébrique, $\gamma$ étant paramétrée par la l.a. Il existe

$$\theta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que

$$\forall s \in \ [a,b], \qquad \gamma'(s) = \cos\theta(s)\ e_1 + \sin\theta(s)\ e_2$$

où $(e_1, e_2)$ est la base standard de $\mathbb{E}^2$.

• En particulier

$$\forall s \in \ [a,b], \qquad \theta'(s) = k_{alg}(s).$$

# Courbes du plan

• On a donc

$$\theta(s) = \theta(a) + \int_a^s k_{alg}(u)\,du = \theta(a) + \theta_0(s).$$

• Quitte à effectuer une rotation d'angle $-\theta(a)$ on peut supposer que

$$\forall s \in [a, b], \quad \theta(s) = \theta_0(s).$$

• En intégrant il vient

$$\begin{cases} x(s) & = & x_0 + \displaystyle\int_a^s \cos\theta_0(u)\,du \\ y(s) & = & y_0 + \displaystyle\int_a^s \sin\theta_0(u)\,du \end{cases}$$

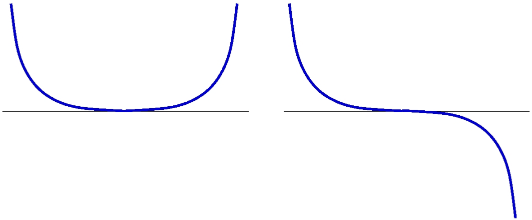
# Courbes du plan

• Quitte à effectuer une translation de vecteur $-(x_0, y_0)$, on a donc

$$\forall s \in \ [a, b], \qquad \gamma(s) = \gamma_0(s).$$

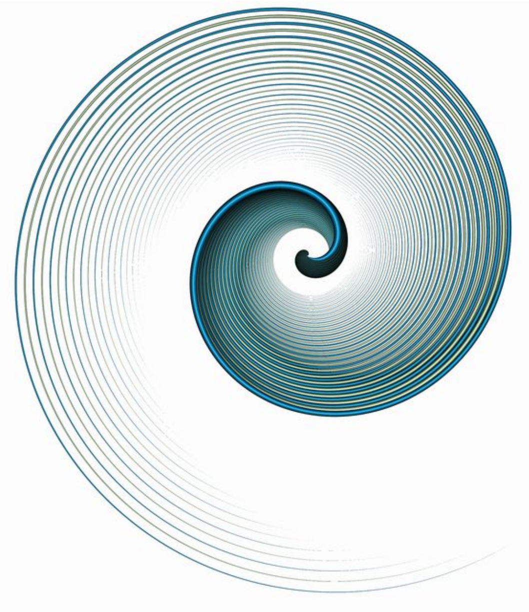
$\square$

• On ne peut pas remplacer $k_{alg}$ par $k$ pour l'unicité.

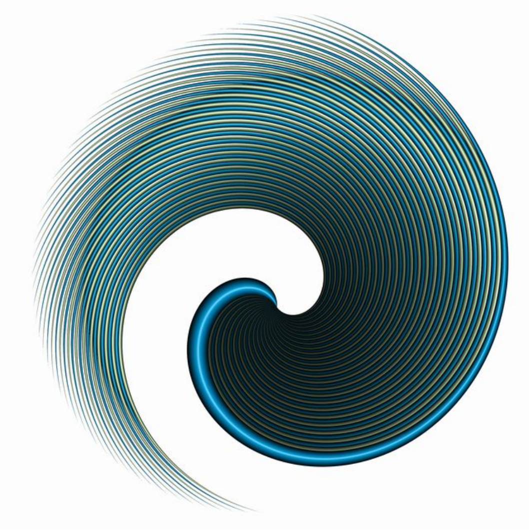


Fonctions $k_{alg}$ différentes mais fonctions $k$ identiques

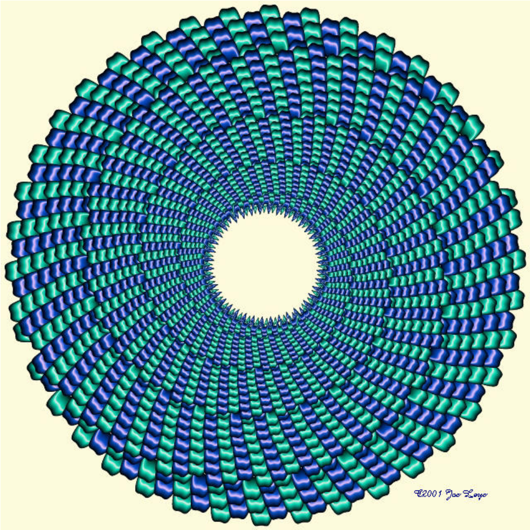
# Toujours des spirales



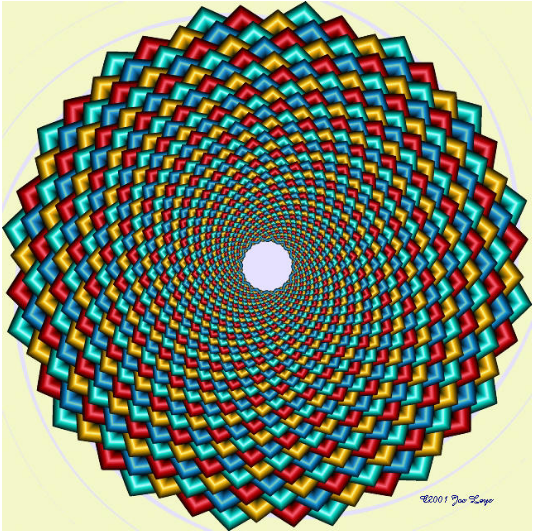
# Toujours des spirales



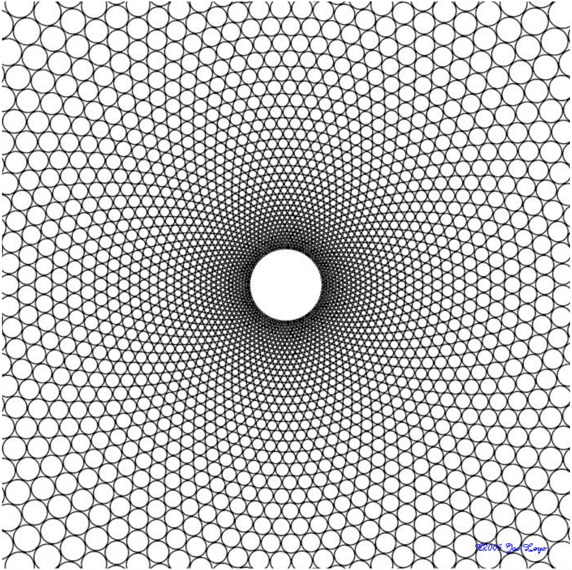
# Toujours des spirales



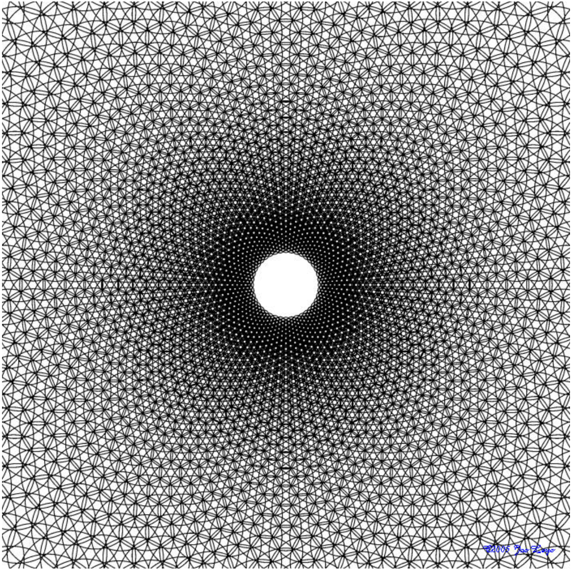
# Toujours des spirales



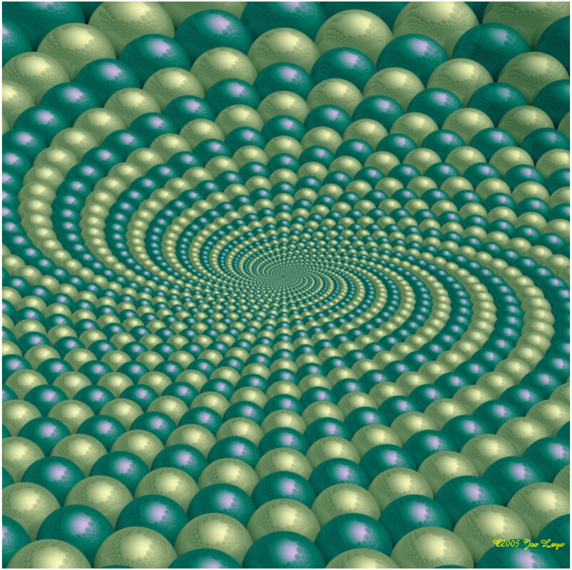
# Toujours des spirales



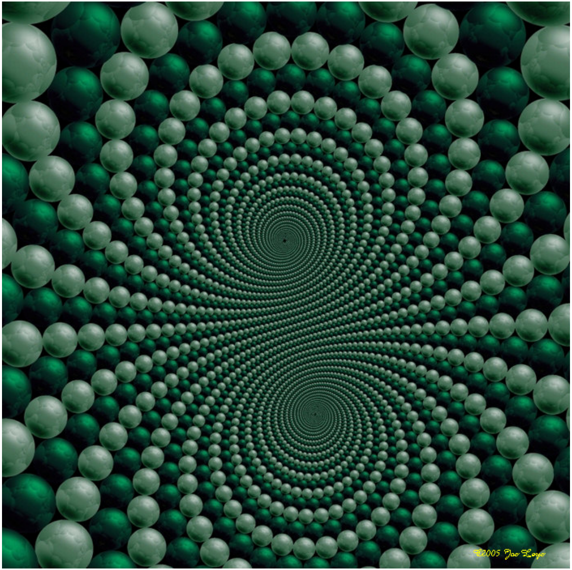
# Toujours des spirales



# Toujours des spirales



# Toujours des spirales



# Courbes de l'espace

• On suppose $\gamma : I \xrightarrow{C^3} \mathbb{E}^3$ paramétrée par la l.a. et $\mathbb{E}^3$ orienté.

**Définition.–** Soit $s \in I$ un point birégulier. Le vecteur $B(s) := T(s) \wedge N(s)$ s'appelle la BINORMALE en $s$ à $\gamma$.

• Pour tout $s \in I$, le triplet $(T(s), N(s), B(s))$ est une b.o.n. directe de $\mathbb{E}^3$. Compte tenu de ce que

$$\forall s \in I, \quad \langle N(s), N(s)\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle B(s), B(s)\rangle = 1$$

en dérivant, on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} T' & = & kN \\ N' & = & aT + bB \\ B' & = & cT + dN. \end{array}\right.$$

# Courbes de l'espace

**Définition.–** Le nombre $b = \langle N', B \rangle$ s'appelle la TORSION de $\gamma$ et se note $\tau$.

• Les relations

$$\langle N, T \rangle = 0, \quad \langle B, T \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle B, N \rangle = 0$$

montrent que $a = -k$, $c = 0$ et $d = -\tau$ d'où les **formules de Serret-Frenet** :

$$\begin{cases} T' & = & kN \\ N' & = & -kT + \tau B \\ B' & = & -\tau N. \end{cases}$$

• Rappelons que, dans ces formules, les dérivations se font par rapport à l'abscisse curviligne.

# Courbes de l'espace

**Proposition.–** *Soit* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ *une courbe* $C^3$ *birégulière mais non nécessairement paramétrée par la l.a. On a*

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \wedge T(t)$$

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \textit{et} \quad \tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

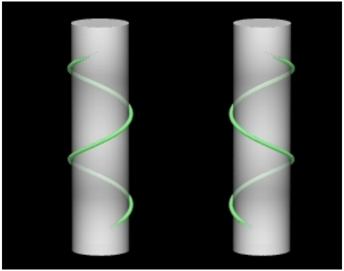
**Démonstration.–** Procéder de la même façon que pour les courbes planes... $\square$

# Courbes de l'espace

**Exemple : l'hélice circulaire.–** Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) & = & a\cos t \\ y(t) & = & \pm a\sin t \\ z(t) & = & bt \end{pmatrix}$$

où $a > 0$ et $b > 0$.



# Courbes de l'espace

• Un calcul direct montre que l'abscisse curviligne compté depuis $t = 0$ vaut

$$S(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\, t.$$

• Puis que

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

En particulier $k$ et $\tau$ sont des fonctions constantes.

# Courbes de l'espace

**Théorème fondamental des courbes gauches (admis).–** *Soit* $k : [a,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+^*$ *et* $\tau : [a,b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$. *Alors il existe une unique courbe (à déplacement près)* $\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^3} \mathbb{E}^3$ *paramétrée par la l.a. de courbure* $k$ *et de torsion* $\tau$.

- Ce résultat ne se généralise par au cas $k : [a,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+$.

# Interprétation cinématique

• Si on interprète $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ comme la trajectoire d'un point mobile alors $\gamma'(t)$ est le VECTEUR VITESSE à l'instant $t$ et $\gamma''(t)$ le VECTEUR ACCÉLÉRATION.

• On note $V(t)$ la norme du vecteur vitesse et $(\gamma'')^N$ la composante normale de l'accélération.

**Proposition.–** *On a*

$$\forall t \in I, \quad \|(\gamma''(t))^N\| = \frac{V^2(t)}{R(t)}$$

*où* $R(t) = \dfrac{1}{k(t)}$ *est le rayon de courbure.*

# Interprétation cinématique

**Démonstration.–** On reparamétrise $\gamma$ par $\varphi = S^{-1}$ de sorte que $\gamma \circ \varphi$ soit paramétrée par la l.a. On a vu précédemment que

$$(\gamma \circ \varphi)''(s) = \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2 + \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s).$$

• Par conséquent

$$\gamma''(\varphi(s)) = \frac{1}{\varphi'(s)^2}\left((\gamma \circ \varphi)''(s) - \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s)\right) \quad (*)$$

• Or

$$(\gamma \circ \varphi)''(s) = k(\varphi(s)).N(s) \quad \text{et} \quad \gamma'(\varphi(s)) = \|\gamma'(\varphi(s))\|.T(s)$$

# Interprétation cinématique

• Les deux termes du membre de droite de la formule $(*)$ donnent donc respectivement la composante normale et la composante tangentielle de l'accélération. En particulier

$$(\gamma''(t))^N = \frac{1}{\varphi'(s)^2}(\gamma\circ\varphi)''(s).$$

• Puisque

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}$$

on obtient donc

$$(\gamma''(t))^N = k(t)\|\gamma'(t)\|^2$$

ce qui est la formule recherchée. $\square$

# Spirales en architecture

*Newgrange, 3200 ans av. JC*

# Spirales en architecture

*L'intérieur*

# Spirales en architecture

*La « pierre d'entrée »*

# Spirales en architecture

*Spirales logarithmiques à Corinthe, II siècle avant JC*

# Spirales en architecture

*Les escaliers « Tulip Stairs » de la maison de la reine, à Greenwich 1635*

# Spirales en architecture

*Escaliers de l'abbaye de Melk, Autriche 1736*

# Spirales en architecture

*Escaliers « Giuseppe Momo » en double hélice au musée du Vatican, 1932*

# Spirales en architecture

*Triple hélice au musée Pobo Galego, Espagne 1976*

# Spirales en architecture

*Escaliers en hélice du musée Guggenheim, New York 1959*

# Spirales en architecture

*La "Pigna" du Vatican*