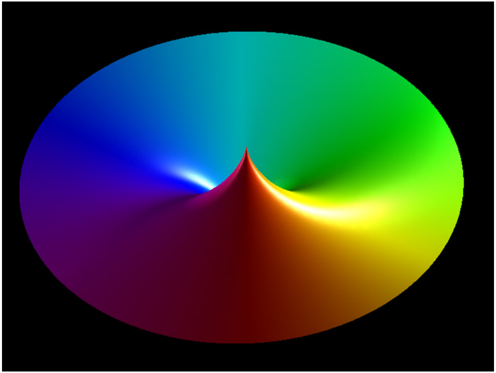
# CM 3 - Différentielles

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une surface non différentiable en un point

# Adresses utiles

Deux adresses :

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Cours_Math2

http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/Math2/

# Dérivées directionnelles

**Définition.–** Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE DE $f$ DANS LA DIRECTION $\vec{v}$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(x) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{array}$$

• La $i$-ème dérivée partielle se confond donc avec la dérivée directionnelle dans la direction du vecteurs $\vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ où le nombre 1 est en $i$ème position :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f$$

# Exemples

**Exemple 1.–** La dérivée directionnelle de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy^2 + 3x \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y)$ et au point $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = (3 + y^2)X + 2xyY$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

# Exemples

**Exemple 2.–** La dérivée directionnelle de l'application

$$f = (f_1, f_2) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (xy^2 + 3x, yz^2) \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$ et au point $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = ((3 + y^2)X + 2xyY, z^2 Y + 2zyZ)$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix}$$

# Exemples

**Exemple 3.–** La dérivée directionnelle de l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\varphi,\theta) & \longmapsto & \varphi^2 + r\sin\theta \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$ et au point $a = (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\partial_{(X,Y,Z)} f(r,\varphi,\theta) = \sin\theta\ X + 2\varphi\ Y + r\cos\theta\ Z$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

# Croissance et décroissance

**Théorème.–** Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $D_f$, $x \in D_f$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

• Si $\partial_{\vec{v}} f(x) > 0$ alors $f$ est croissante au point $x$ dans la direction de $\vec{v}$

• Si $\partial_{\vec{v}} f(x) < 0$ alors $f$ est décroissante au point $x$ dans la direction de $\vec{v}$.

# Exercice

**Énoncé.–** La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$ est-elle croissante ou décroissante au point $(3,1)$ et dans les directions $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ $(1,-2)$ ?

**Réponse.–** Pour tout vecteur $\vec{v} = (X, Y)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \ (y^2+3)\, X + 2xy\, Y$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = \ 4\, X + 6\, Y$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \Rightarrow f$ est croissante dans la direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \Rightarrow f$ est croissante dans la direction $(1,2)$

# Exercice

- $\partial_{(1,-1)}f(3,1) = -2 \Rightarrow f$ est décroissante dans la direction $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)}f(3,1) = -8 \Rightarrow f$ est décroissante dans la direction $(1,-2)$

**Énoncé (suite).–** Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?

**Réponse.–** Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

# Exercice

*Croissance.* – Puisque $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$, on recalcule

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

De même $\|(1,2)\| = \sqrt{3}$ conduit à

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2)} f(3,1) = \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

Or $\frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{3}}$ car $(10\sqrt{3})^2 = 300 < (16\sqrt{2})^2 = 512$.

Ainsi, au point $(3,1)$, $f$ croît plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

# Exercice

*Décroissance.* – De même, $\|(1,-1)\| = \sqrt{2}$ et $\|(1,-2)\| = \sqrt{3}$, il faut donc calculer

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

et

$$\partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-2)} f(3,1) = -\frac{8}{\sqrt{3}}$$

On a $-\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{3}}$ car si $(2\sqrt{3})^2 = 12 < (8\sqrt{2})^2 = 128$.

Ainsi, au point $(3,1)$, $f$ décroît plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

# Gradient d'une fonction réelle

**Définition.–** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable. Le *gradient* de $f$ en un point $x \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x) = \vec{\nabla} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\ \vec{e}_n$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ &= \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

# Gradient d'une fonction réelle

**Remarque.–** Le gradient de $f$ est donc une fonction vectorielle

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f : & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le symbole $\vec{\nabla}$ se lit « nabla ».

# Exemples

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy^2 + 3x.$$

Le gradient de $f$ vaut

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

# Exemples

• Soit $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, y, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(x^2 + z^2).$$

Le gradient de $f$ vaut

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) + \dfrac{2x}{x^2 + z^2} \\ x \cos(xy) \\ \dfrac{2z}{x^2 + z^2} \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$\vec{\nabla} f(0, \pi, 1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Interprétation géométrique

**Observation. –** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable de deux variables. Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x)$ est « orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ » avec $a = f(x)$. Il indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe $\Gamma_f$

# Exemple

- Soit $f : B_O(1) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

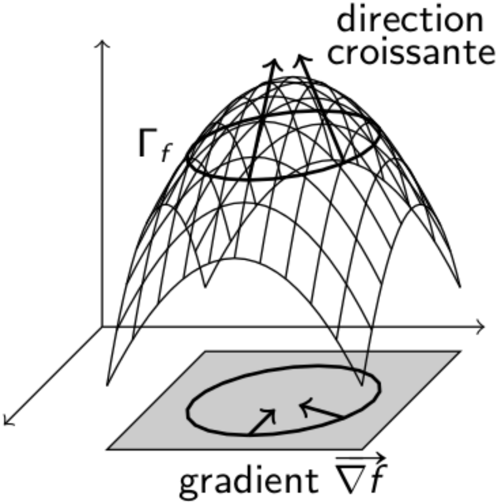
D'une part, les lignes de niveaux $L_a(f)$ de $f$ sont des cercles de rayon $\sqrt{1-a^2}$ avec $a \in ]0,1]$. La ligne de niveau $L_1(f)$ est réduite à un point. La ligne de niveau $L_0(f)$ est vide car $f$ est définie sur la boule ouverte $B_O(1)$.

D'autre part, $f$ est différentiable sur $B_O(1)$ et on a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in ]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point $(x,y,a)$.

# Exemple


direction
croissante
$\Gamma_f$
gradient $\overrightarrow{\nabla} f$

# Différentielle

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. Par définition, pour tout $x \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \partial_{\bullet} f(x) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(x) \end{array}$$

est linéaire.

**Définition.–** Cette application linéaire s'appelle la *différentielle* de $f$ au point $x$. Il est d'usage de la noter $df_x$.

Soit $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$df_x(\vec{v}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; v_n$$

# Différentielle

• Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x \in D$. la différentielle $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrit au moyen du gradient de $f$

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df_x(\vec{v}) = \langle \overrightarrow{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle$$

• Soient

$$f = (f_1, ..., f_m) : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

une fonction d'une seule variable et $x \in D$. La différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s'écrit

$$\forall \vec{v} = v\vec{e}_1 \in \mathbb{R}, \quad df_x(\vec{v}) = \Big( f_1'(x)\, v \,, \ldots , \; f_m'(x)\, v \Big)$$

# Exemples

• Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x^5$ alors $f'(x) = 2x - 5x^4$ et $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_x(\vec{v}) = (2x - 5x^4)\vec{v}.$$

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y^3 - 7y$ alors pour tout $\vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ la différentielle $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(\vec{v}) = 2xy^3\ X + (3x^2y^2 - 7)\ Y$$

En particulier

$$df_{(x,y)}(2,1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7 \text{ et } df_{(1,1)}(X,Y) = 2X - 4Y$$

et $df_{(1,1)}(2,1) = 0$.

# Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

alors pour tout $\vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ la différentielle $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(\vec{v}) = X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y^2X + 2xyY \\ Y \\ 2xX - 2yY \end{pmatrix}$$

# Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix}$$

alors pour tout $\vec{v} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$ la différentielle $df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$df_{(x,y,z)}(\vec{v}) = X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y^2X + 2xyY \\ z^3Y + 3yz^2Z \end{pmatrix}$$

# Différentielles

**Définition.–** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. L'application

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x & \longmapsto & df_x \end{array}$$

est appelée la *différentielle* de $f$ et elle est notée $df$.

**Notation.–** Pour tout $i = 1, ..., n$, on note

$$dx_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} = (v_1, ..., v_n) & \longmapsto & dx_i(\vec{v}) = v_i \end{array}$$

$n$ applications linéaires formant une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

# Différentielle

• Toute forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'exprime alors comme combinaison linéaire des $dx_i$ :

$$L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$.

# Différentielle

• Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors sa différentielle $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $x \in D$ s'écrit

$$df_x \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx_n$$

• La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n.$$

# Exemples

• Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x^5$ alors $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_x = (2x - 5x^4)dx.$$

En particulier $df_1 = -3\ dx$.

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y^3 - 7y$ alors la différentielle $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)} = 2xy^3\ dx + (3x^2y^2 - 7)\ dy$$

En particulier $df_{(1,1)} = 2\ dx - 4\ dy$.

# Exemples

• Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2y^3z - 7yz^2$ alors la différentielle $df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\, dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\, dy + (x^2y^3 - 14yz)\, dz$$

En particulier $df_{(1,1,1)} = 2\, dx - 4\, dy - 13\, dz$

# Exercices

**Énoncé.–** *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$.

*i) Déterminer* $D$.

*ii) Déterminer la différentielle en tout point* $(x,y) \in D$.

*iii) Calculer* $df_{(2,0)}$ *en les vecteurs* $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$, $\vec{v} = (1,1)$ *et* $\vec{u} = (3,-3)$.

**Réponse.–** i) On doit avoir $1 - x^2 + 5y > 0$ ainsi

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 + 5y > 0\Big\}$$

$=$ portion du plan au-dessus de la parabole

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

# Exercices

ii) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy \\ &= \frac{-2x}{1-x^2+5y}\,dx + \frac{5}{1-x^2+5y}\,dy \end{aligned}$$

iii) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\,dx + \frac{5}{1-4}\,dy = \frac{4}{3}\,dx - \frac{5}{3}\,dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{i}) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \tfrac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{j}) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,0) = -\tfrac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1,1) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3,-3) = \tfrac{4}{3}\,3 - \tfrac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

# Exercices

**Énoncé.–** *On note $(x,y,z)$, $(\rho,\varphi,z)$ et $(r,\varphi,\theta)$ les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que*

$$(\rho,\varphi)\in[0,\infty[\times[0,2\pi[\longmapsto\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{array}\right.$$

*et*

$$(r,\varphi,\theta)\in[0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi]\longmapsto\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{array}\right.$$

# Exercices

*Montrer que*

$$i)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi \\ dy = \sin\varphi\ d\rho + \rho\cos\varphi\ d\varphi \\ dz = dz \end{cases}$$

$$i')\ \begin{cases} d\rho = \cos\varphi\ dx + \sin\varphi\ dy \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ dz = dz \end{cases}$$

Formules de passage « cartésiennes $\longleftrightarrow$ cylindriques »

# Exercices

$$ii)\left\{\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\ \sin\theta\ dr - r\sin\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\ d\theta \\ dy &= \sin\varphi\ \sin\theta\ dr + r\cos\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\sin\varphi\ \cos\theta\ d\theta \\ dz &= \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{aligned}\right.$$

$$ii')\left\{\begin{aligned} dr &= \cos\varphi\ \sin\theta\ dx + \sin\varphi\ \sin\theta\ dy + \cos\theta\ dz \\ r\sin\theta\ d\varphi &= -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ rd\theta &= \cos\varphi\ \cos\theta\ dx + \sin\varphi\ \cos\theta\ dy + \sin\theta\ dz \end{aligned}\right.$$

Formules de passage « cartésiennes $\longleftrightarrow$ sphériques »

# Exercices

$$(iii)\begin{cases} dr = \sin\theta\; d\rho + \cos\theta\; dz \\ d\varphi = d\varphi \\ r d\theta = \cos\theta\; d\rho - \sin\theta\; dz \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} d\rho = \sin\theta\; dr + \cos\theta\; d\theta \\ d\varphi = d\varphi \\ dz = r\cos\theta\; dr - r\sin\theta\; d\theta \end{cases}$$

Formules de passage « cylindriques $\longleftrightarrow$ sphériques »

# Exercices

**Réponse.–** Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables « cylindriques → cartésiennes » donne les formules $i$.

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\, dz \\
&= \cos\varphi\, d\rho - \rho \sin\varphi\, d\varphi \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz \\
&= \sin\varphi\, d\rho + \cos\varphi\, d\varphi \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\, dz \\
&= dz
\end{aligned}$$

Les formules $i'$ s'obtiennent en inversant le système. On procède similairement pour les autres formules.

# Richard Feynman (1918-1988)

# Richard Feynman (1918-1988)

- Le plus grand physicien de la seconde moitié du XXème siècle (ou sur le podium au minimum)
- Généralise le principe de moindre action en mécanique quantique avec son **intégrale de chemin**

# Richard Feynman (1918-1988)

• Invente les diagrammes qui portent son nom et qui sont massivement utilisés en QFT (mécanique quantique des champs)

• Reçoit le prix Nobel de physique en 1965 pour ses travaux en QED (électrodynamique quantique).

# Richard Feynman (1918-1988)

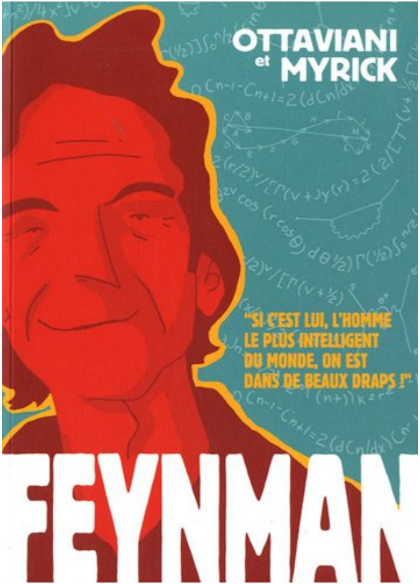
• Durant la seconde guerre mondiale il participe au projet Manhattan.

• En 1986, il joue un rôle majeur au sein de la commission d'enquête sur l'accident de la navette *Challenger*.

# Richard Feynman (1918-1988)

- Il meurt d'un cancer de l'estomac en 1988
- Ces derniers mots furent : « I would hate to die twice. It is so boring (Je détesterais mourir deux fois. C'est si ennuyeux) ».

# Richard Feynman (1918-1988)

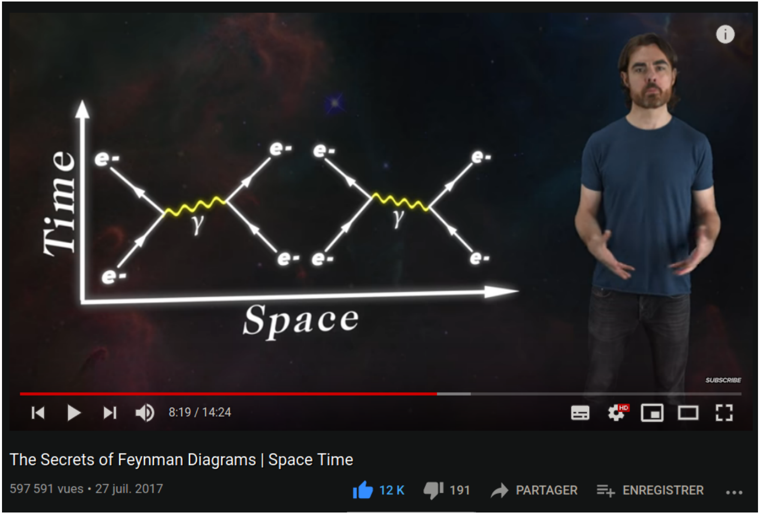


# Richard Feynman (1918-1988)

# Richard Feynman (1918-1988)

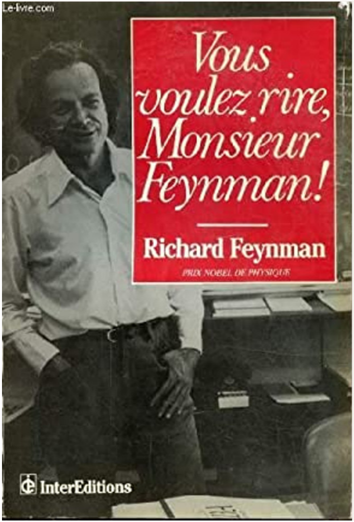

Feynman sur Passe-Science

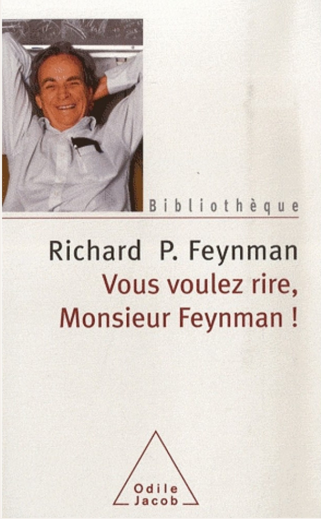
# Richard Feynman (1918-1988)



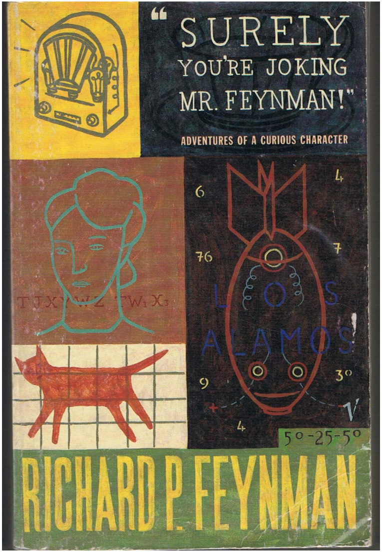

Feynman sur PBS Space Time

# Surely You're Joking, Mr. Feynman !

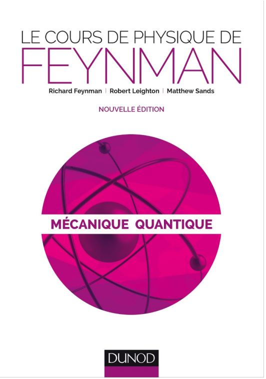


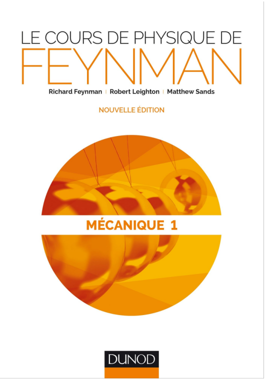



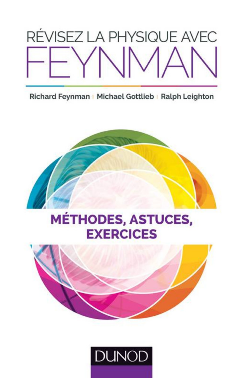
# Surely You're Joking, Mr. Feynman !



# Feynman Lectures on Physics



# Big Bang Theory

The Bachelor Party Corrosion (Corrosion, Crevaison, Oxydation) S9E3

# Une citation

« La théorie de l'électrodynamique quantique nous fournit une description de la nature qui est absurde du point de vue du sens commun. Mais elle est en accord parfait avec l'expérience. J'espère donc que vous accepterez la nature telle qu'Elle est : absurde. »