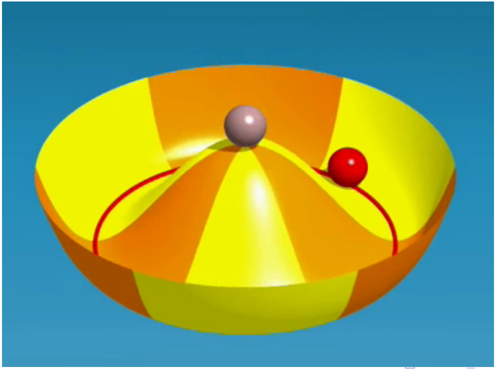
CM 6 - Extrema - Théorème fondamental de l'analyse

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Adresses utiles

Deux adresses :

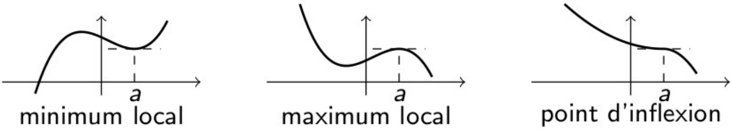
`http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Cours_Math2`

`http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/`

Extrema

Rappel.– Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2.

• Un point $a \in D$ tel que $f'(a) = 0$ est appelé *point critique* de f, le réel $f(a)$ est appelé *valeur critique* de f.



Extrema

• Si $f''(a) > 0$, le point critique est un *minimum local* de f, i.e. il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \,]a-\epsilon, a+\epsilon[\quad f(x) \geqslant f(a).$$

• Si $f''(a) < 0$, le point critique est un *maximum local* de f, i.e. il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \,]a-\epsilon, a+\epsilon[\quad f(x) \leqslant f(a).$$

• Dans les deux cas, on dit que le point critique est un *extremum local* de f.

Extrema

Supposons désormais que f est de classe C^k avec $k \geqslant 3$.

- Si $f''(a) = 0$, le point critique est dit *plat*.
- Si $f'''(a) \neq 0$ ce point plat est appelé *point d'inflexion* de f.
- Plus généralement, si

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{2p}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{2p+1}(a) \neq 0$$

alors ce point plat est appelé *point d'inflexion* de f.

- Plus généralement, si

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{2p-1}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{2p}(a) \neq 0$$

alors ce point plat est un extremum local de f.

Extrema

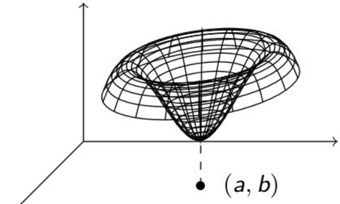
Définition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(a,b) \in D$. On dit que (a,b) est

• un *minimum local* s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (a,b) tel que

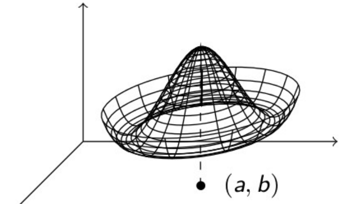
$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

• un *maximum local* s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (a,b) tel que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad f(x,y) \geqslant f(a,b).$$



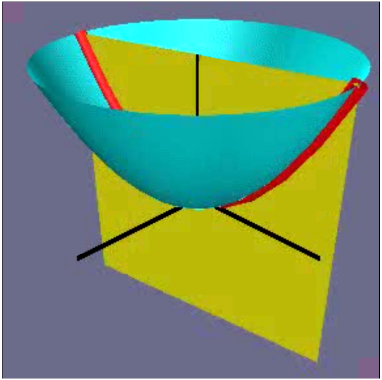
minimum local

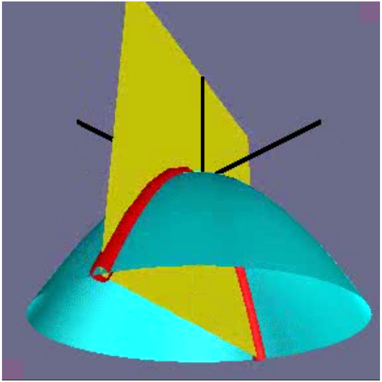


maximum local

Extrema

- Dans les deux cas, on dit que le point critique est un *extremum local* de f.





Un minimum local et un maximum local

Extrema

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2. On dit que $(a, b) \in D$ est un *point critique* de f si $\overrightarrow{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$.

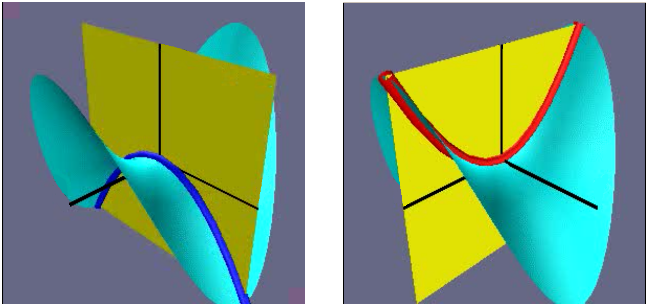
Proposition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et $(a, b) \in D$ un point critique. Si $\det H_f(a, b) > 0$ alors le point (a, b) est un extremum local. De plus

- si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$ alors c'est un minimum local.
- si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$ alors c'est un maximum local.

Point col

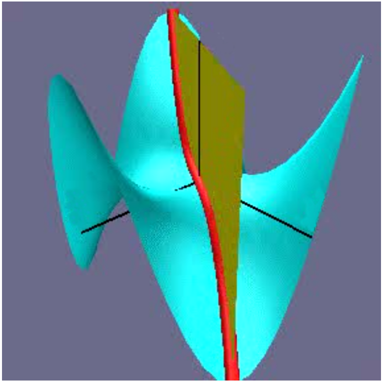
Définition.– Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et $(a, b) \in D$ un point critique.

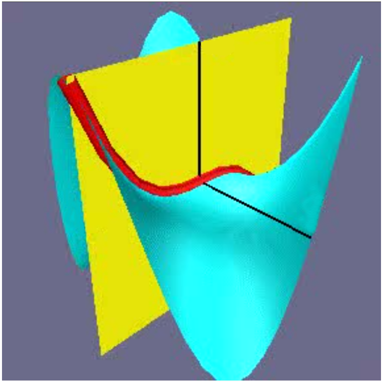
- Si $\det H_f(a, b) < 0$ on dit que (a, b) est un *point col* ou un *point selle*
- Si $\det H_f(a, b) = 0$ on dit que (a, b) est un *point plat*



Un point col

Point plat





Un exemple de point plat : la selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé.– Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et, si possible, leur nature.

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \text{ et } H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

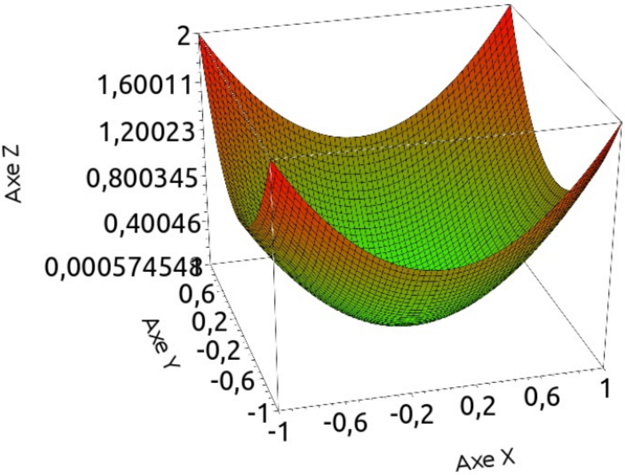
$$\vec{\nabla} f(x, y) = (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$$

et $(0, 0)$ est l'unique point critique de f. Puisque

$$\det H_f(0, 0) = 4 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$$

c'est un minimum local.

Exercice



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exercice

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \text{ et } H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

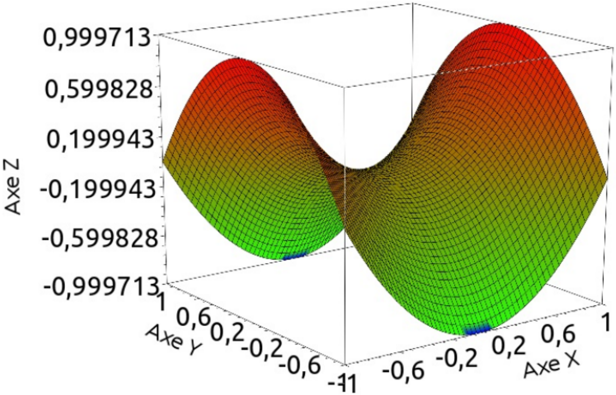
$$\vec{\nabla} f(x, y) = (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$$

et $(0, 0)$ est l'unique point critique de f. Puisque

$$\det H_f(0, 0) = -4 < 0$$

c'est un point col.

Exercice



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Exercice

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

et

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Exercice

Par conséquent, f admet un cercle de points critiques d'équation $x^2 + y^2 = 2$ et un point critique isolé de coordonnées $(0, 0)$.

• On a

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

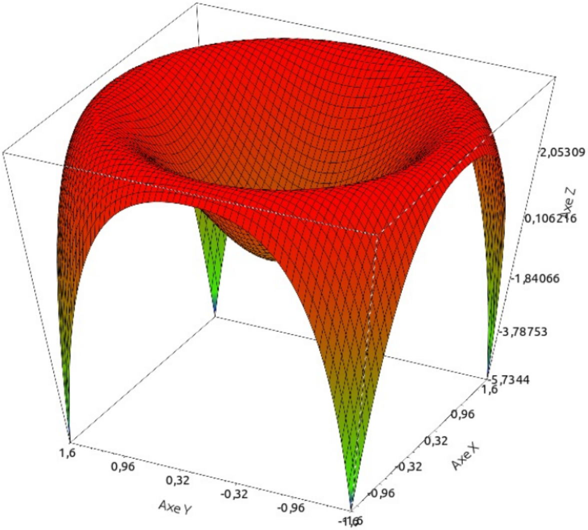
On en déduit que $(0, 0)$ est un minimum local.

• Soit (x, y) tel que $x^2 + y^2 = 2$ alors

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui montre que tous les points du cercle $x^2 + y^2 = 2$ sont plats.

Exercice



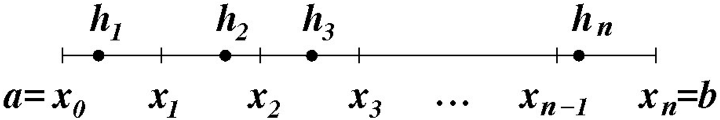
Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$

Intégrale simple de Riemann

Rappel. – On appelle SUBDIVISION de $[a, b]$ un ensemble fini de points $\mathcal{S} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le PAS $\delta(\mathcal{S})$ de la subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ où $i \in \{1, \ldots, n\}$.

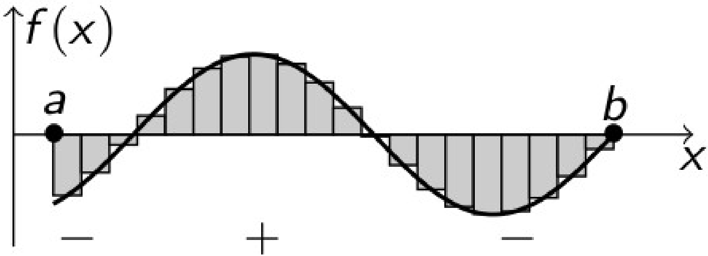


• Pour tout choix de n points $h_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle SOMME DE RIEMANN DE f le nombre

$$R(f; \mathcal{S}, \{h_1, \ldots, h_n\}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(h_i)$$

Intégrale simple de Riemann

• Dans cette somme, chaque terme $(x_i - x_{i-1})f(h_i)$ représente l'aire algébrique du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.



Intégrale simple de Riemann

Théorème.– *Si la limite* $\lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} R(f; \mathcal{S}, \{h_i\})$ *existe alors elle est indépendante du choix des points* $h_i \in I_i$*, on la note*

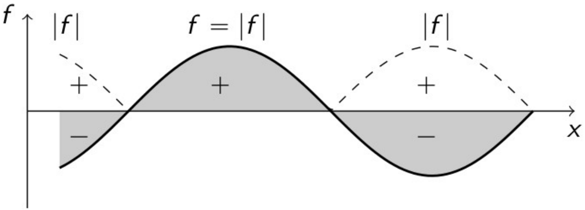
$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} R(f; \mathcal{S}, \{h_i\})$$

Définition.– Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite l'INTÉGRALE DE f SUR $[a, b]$ et on dit que f est INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN

Proposition.– *Toute fonction continue* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann. Toute fonction monotone sur* $[a, b]$ *est intégrable au sens de Riemann.*

Intégrale simple de Riemann

Signification géométrique de l'intégrale simple.– Cette limite s'interprète comme l'« aire algébrique » de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses.



Intégrale simple de Riemann

Définition.– On dit que $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une PRIMITIVE de $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si F est dérivable et que

$$\forall x \in [a,b], \quad F'(x) := f(x).$$

Théorème fondamental de l'analyse (partie I).– *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann et $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors F est continue sur $[a,b]$. Si, de plus, f est continue alors F est dérivable et $F' = f$; autrement dit, F est une primitive de f.

Intégrale simple de Riemann

Théorème fondamental de l'analyse (partie II).– *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable et admet une primitive F alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Cas des fonctions continues.– Au bilan, toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, admet une primitive F donnée par

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

et l'on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Techniques pour calculer une intégrale

- Le **changement de variable** : on pose $x = h(t)$ où h est un difféomorphisme c'est-à-dire une bijection dérivable telle que la réciproque h^{-1} soit aussi dérivable. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\,h'(t)\,dt.$$

- L'**intégration par parties** :

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Exemple

Aire d'un disque.– On désire calculer l'intégrale suivante

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

On effectue pour cela le changement de variable $x = \sin t$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Puisque $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ et $dx = \cos t\ dt$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\ dt \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \left(0+\frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

Exemple

• Notons que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

s'interprète comme l'aire de la portion de plan située en dessous du graphe de $y = \sqrt{1-x^2}$ et au dessus de l'axe des abscisses. Cette portion de plan est un demi-disque centré en l'origine et de rayon 1. L'intégrale

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

s'interprète donc comme l'aire d'un disque de rayon 1.


CELEBRATING
BLACK
HISTORY
MONTH
FEBRUARY

Neil deGrasse Tyson

Neil deGrasse Tyson

• Un des scientifiques américains les plus populaires, il est astrophysicien.

Neil deGrasse Tyson

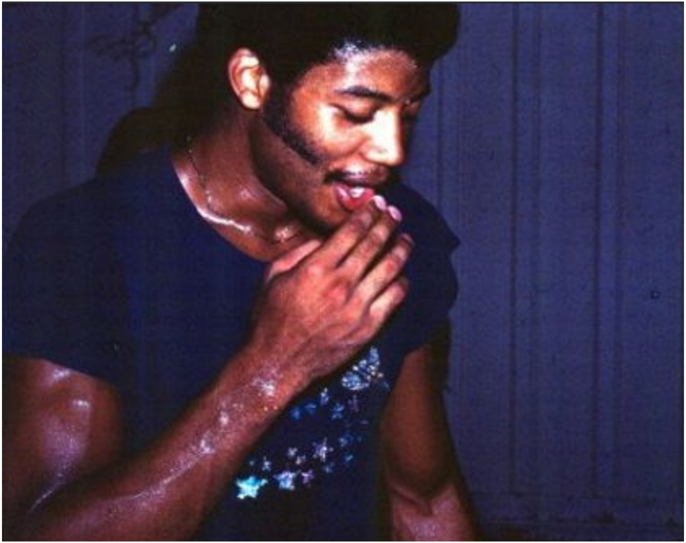
• Un des scientifiques américains les plus populaires, il est astrophysicien.
• Né dans le Bronx (New York) en 1958 d'une famille d'origine afro-caribéenne.

Neil deGrasse Tyson

• Un des scientifiques américains les plus populaires, il est astrophysicien.
• Né dans le Bronx (New York) en 1958 d'une famille d'origine afro-caribéenne.
• Passionné d'astronomie, il est remarqué à 17 ans par Carl Sagan qui l'invite personnellement à venir faire ses études à Cornell University. Tyson refuse (!) et préfère poursuivre ses études à Harvard.

Membre de l'équipe d'aviron de l'université de Cornell

Capitaine d'une équipe de lutteurs du Bronx



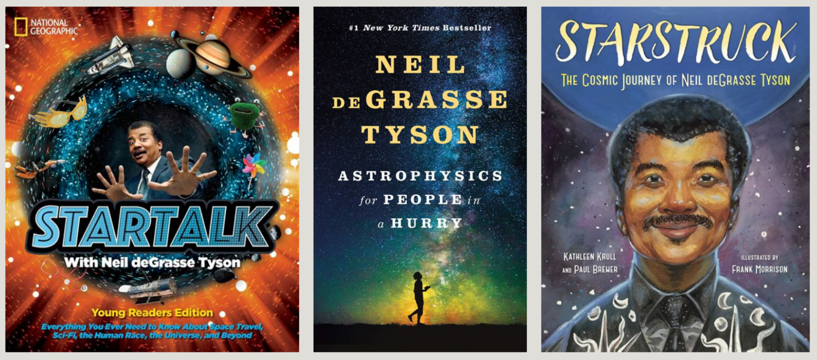
Médaille d'or avec l'équipe de danse de l'université du Texas

Sexiest Astrophysicist Alive, People magazine, 2000

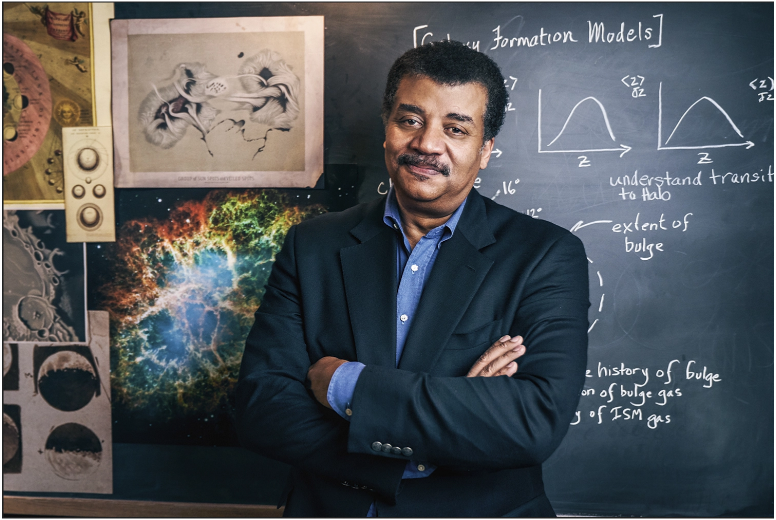
1995 : Directeur du Hayden Planetarium à New York

The Pluto Files

Quelques écrits



Des interviews/conférences en pagaille



Une interview à Brut

Une interview à Brut

Une interview à Brut

Une interview à Brut

Une interview à Brut

Une interview à Brut

Une interview à Brut

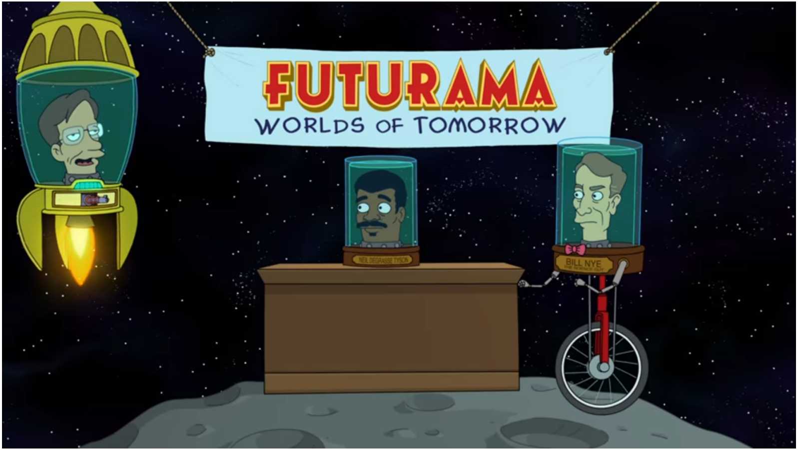
Une interview à Brut

Une interview à Brut

Dans la culture geek : BBT

S4E7, Dans le collimateur du FBI !, et S12E1, Configuration matrimoniale

Dans la culture geek : Futurama



Official launch date trailer of the game "Worlds of tomorrow"

Neil deBuck Weasel

L'âge de glace : Les lois de l'Univers

Metal Tyson !

"Exist" de l'album "The Stage"


INSPIRÉ D'UNE HISTOIRE VRAIE
LES FIGURES DE L'OMBRE
NASA
AU CINÉMA LE 8 MARS 2017
#LESFIGURESDELOMBRE

Les figures de l'ombre

Les figures de l'ombre

Les figures de l'ombre

Les figures de l'ombre

Les figures de l'ombre

Janelle Monàe

Mary Jackson

Les figures de l'ombre

Les figures de l'ombre

Octavia Spencer

Dorothy Vaughan

Les figures de l'ombre

Les figures de l'ombre