

# CM 7 - Intégrales doubles et théorème de Fubini

Vincent Borrelli

Université de Lyon



## Intégrale double

**Définition.**— Une SUBDIVISION  $\mathcal{S}$  de  $[a, b] \times [c, d]$  est une partition du pavé  $[a, b] \times [c, d]$  en  $nm$  pavés

$$I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$$

avec  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $y_0 = c$  et  $y_m = d$ . Le PAS  $\delta(\mathcal{S})$  de la partition est le maximum des  $x_i - x_{i-1}$  et  $y_j - y_{j-1}$ .

- Pour tout choix de  $nm$  points  $h_{ij} \in I_i \times J_j$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , on appelle SOMME DE RIEMANN DE  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  le nombre

$$R(f; \mathcal{S}, \{h_{ij}\}) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})f(h_{ij})$$

## Intégrale double

**Théorème.**— *Si la limite  $\lim_{\delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0} R(f; \mathcal{S}, \{h_{ij}\})$  existe alors elle est indépendante du choix des points  $h_{ij} \in I_i \times J_j$ , on la note*

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx dy := \lim_{\delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0} R(f; \mathcal{S}, \{h_{ij}\})$$

**Définition.**— *Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite l'INTÉGRALE DOUBLE DE  $f$  SUR  $[a, b] \times [c, d]$  et on dit que  $f$  est INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN sur  $[a, b] \times [c, d]$*

**Proposition.**— *Toute fonction continue  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Riemann.*

## Intégrale double

- On note  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  contenu dans un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  (autrement dit,  $D$  est bornée).

**Définition.**— On appelle FONCTION INDICATRICE de  $D$  l'application notée  $\mathbb{1}_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

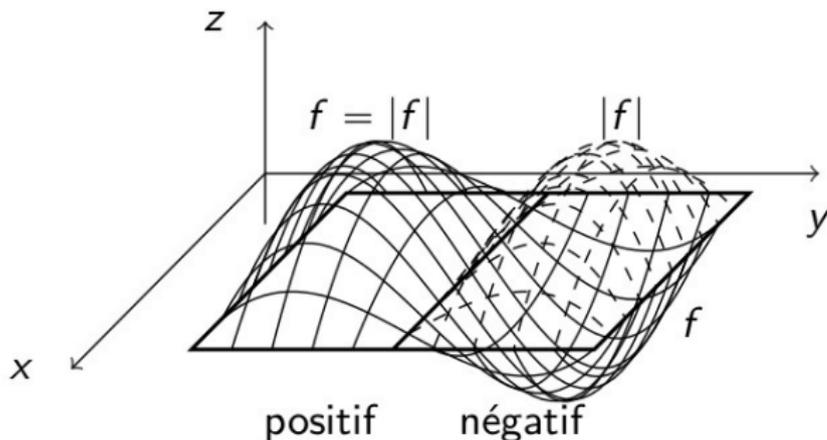
$$\mathbb{1}_D(x, y) = 1 \text{ si } (x, y) \in D, \quad \mathbb{1}_D(x, y) = 0 \text{ sinon.}$$

**Définition.**— On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  est INTÉGRABLE sur  $D \subset [a, b] \times [c, d]$  si  $\mathbb{1}_D f$  est intégrable sur  $[a, b] \times [c, d]$  et on pose

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_{[a, b] \times [c, d]} \mathbb{1}_D(x, y) f(x, y) dx dy$$

## Intégrale double

**Signification géométrique de l'intégrale double.**– On interprète l'intégrale double de  $f$  sur  $D$  comme le « volume algébrique » de la portion de l'espace comprise entre le graphe de  $f$  et le plan  $(Oxy)$ .



## Exemple : volume de la boule

**Expression intégrale du volume de la boule.**– Le volume de la boule

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\},$$

comprise entre le plan ( $Oxy$ ) et le graphe de la fonction  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . On a

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

# Intégrale double

**Définition.**— Si  $\mathbb{1}_D$  est intégrable, on dit que

$$\iint_D \mathbb{1}_D dx dy$$

est l'aire de  $D$ .

- Si  $D$  est un point, un segment, un cercle ou plus généralement une courbe régulière, alors  $\text{Aire}(D) = 0$ .

**Proposition.**— Si  $D = D_1 \cup D_2$  et  $\text{Aire}(D_1 \cap D_2) = 0$  alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

## Proposition

**Proposition.**— 1) Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\iint_D (\lambda f + \mu g) \, dx dy = \lambda \iint_D f \, dx dy + \mu \iint_D g \, dx dy$$

2) On a

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy$$

3) Si  $f(x, y) \leq g(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in D$ , alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy$$

## Le théorème de Fubini

**Théorème de Fubini sur le rectangle.**– Soit

$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, on a

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

et on note

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy := \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

**Corollaire.**– On a

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f_1(x) f_2(y) \, dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$$

## Exemples

### • Exemple 1.-

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1] \times [0,\pi/2]} x \cos y \, dx dy &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \left[ \sin y \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

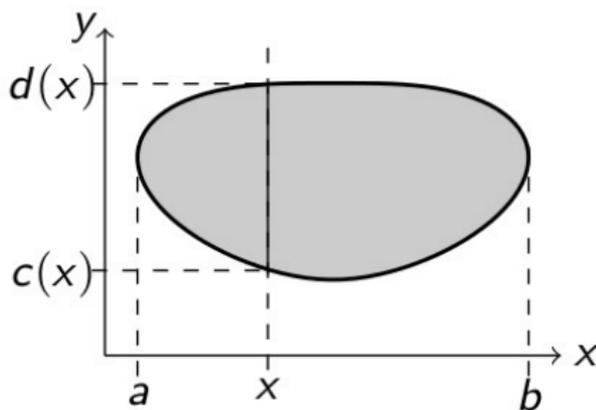
### • Exemple 2.-

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2 y - 1) \, dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2 y - 1) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 - y \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} x^2 - 1 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{6} x^3 - x \right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

## Le théorème de Fubini

- Soit  $D$  un domaine délimité par deux courbes, c'est-à-dire un domaine pour lequel il existe deux applications continues  $c, d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$$



## Le théorème de Fubini

**Théorème de Fubini sur  $D$ .** – Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Si  $D$  est décrit avec deux applications continues  
 $a, b : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

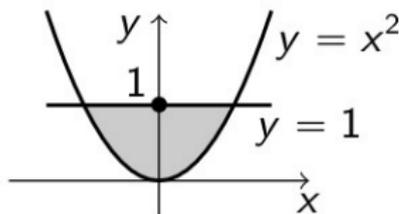
alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

## Exemples

• **Exemple 1.**– Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [x^2, 1]\}.$$



On a

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 x^2 \, dx \int_{x^2}^1 y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^1 \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (x^2 - x^6) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{21} \end{aligned}$$

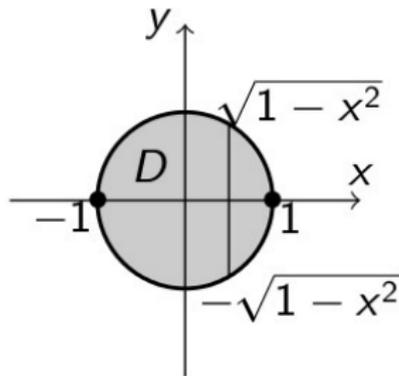
## Exemples

- **Exemple 2 : Volume de la boule (suite).** – Rappelons que

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



On a donc aussi

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \right\}$$

## Exemples

Ainsi

$$\begin{aligned}\text{Vol}(B) &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} dy.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable

$$y = y(t) = \sqrt{1-x^2} \sin t, \quad dy = \sqrt{1-x^2} \cos t dt$$

d'où

$$\text{Vol}(B) = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\sin^2 t} \sqrt{1-x^2} \cos t dt$$

## Exemples

Par conséquent

$$\text{Vol}(B) = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - x^2) \cos^2 t \, dt$$

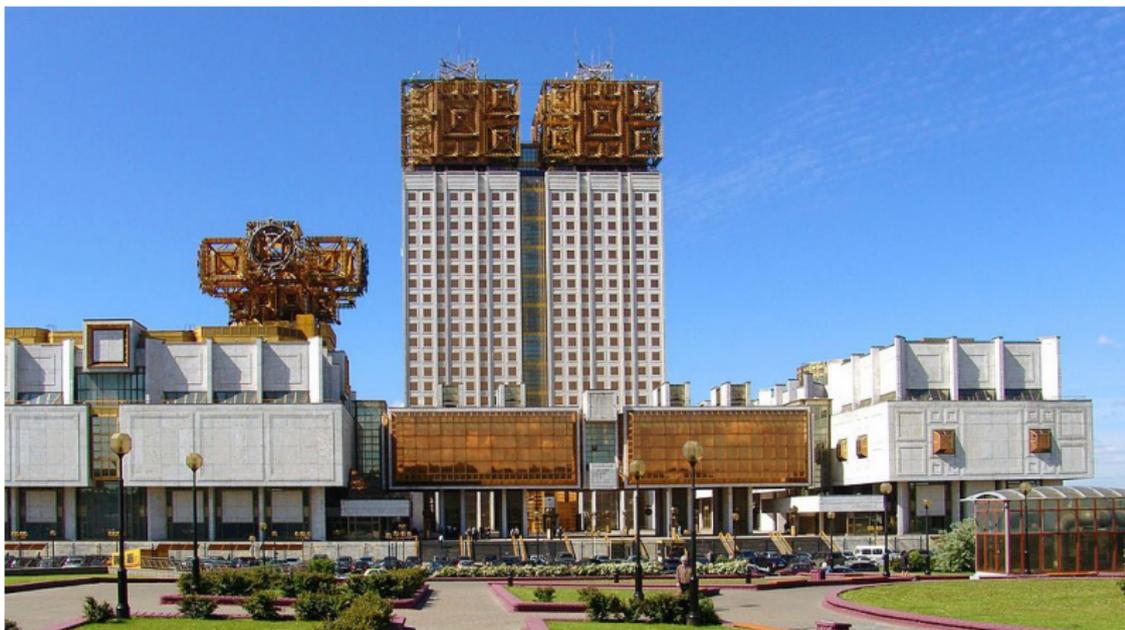
Or, d'après l'exemple précédent,

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \pi$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

# Les scientifiques contre la guerre



L'Académie des Sciences de Russie

Déclaration du 24 février *We are against war* signée par plus de 7000  
scientifiques russes. □ ◀ ▶ 🔍

# Les scientifiques contre la guerre

Четверг, 10 марта, 2022 | Бытие науки | Наука и общество | Авторские колонки | Исследования | Просвещение | Страницы истории | TrV онлайн | Гайд-парк онлайн

trv-science.ru

Троицкий вариант - наука

О ГАЗЕТЕ ▾ ПОДПИСКА ▾ АРХИВ ▾ НАШ МАГАЗИН ▾ ОТ ПАРТНЕРОВ ▾ ПОМОЩЬ TRV ▾ КОРОНАВИРУС ▾

БУМАЖНЫЙ НОМЕР ВЫЙДЕТ 15 МАРТА ЯЗЫКИ

Home / 404 Not Found

**Oops! That page can't be found.**

It looks like nothing was found at this location. May be please check the URL for typing errors or start a new search to find the page you are looking for.

We are against war

© 2022 Троицкий вариант – Наука

Дeclaration publiée sur le site indépendant *TrV-Naukadu* et retirée par les  
autorités russes depuis.

# Les scientifiques contre la guerre

*Nous, scientifiques et journalistes scientifiques russes, exprimons une vive protestation contre l'action militaire initiée par les forces armées de notre pays sur le territoire de l'Ukraine [...]*

*La responsabilité du déclenchement d'une nouvelle guerre en Europe incombe entièrement à la Russie [...]*

*Il est clair que l'Ukraine ne représente pas une menace pour la sécurité de notre pays. Une guerre contre elle est injuste et franchement inutile [...]*

*En déclenchant la guerre, la Russie s'est condamnée à l'isolement international, à la position de pays paria. Cela signifie que nous, les scientifiques, ne serons plus en mesure de faire notre travail correctement : la recherche scientifique est inconcevable sans une coopération totale avec des collègues d'autres pays [...]*

# Les congrès Solvay

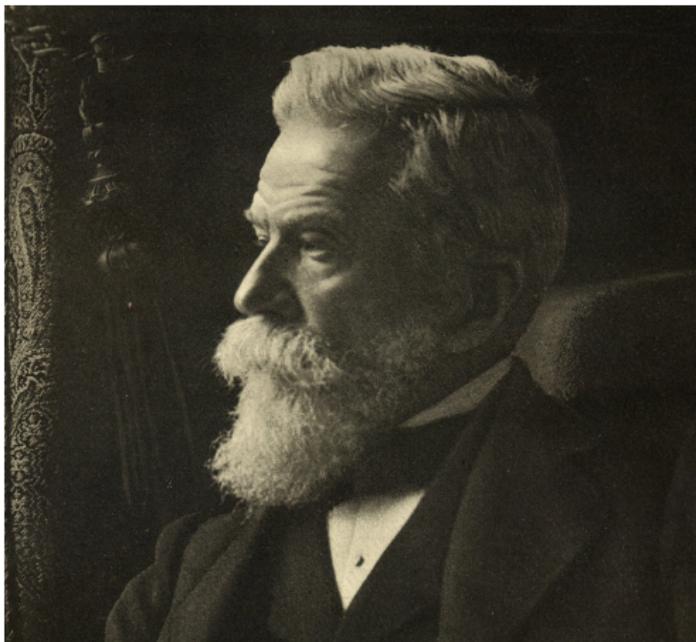


A. PICCARD    E. HENRIOT   P. EHRENFEST   EG. HERZEN   TH. DE DONDER   E. SCHRÖDINGER   E. VERSCHAFFELT   W. PAULI   W. HEISENBERG   R.H. FOWLER   L. BRILLOUIN  
P. DEBYE    M. KNUDSEN    W.L. BRAGG    H.A. KRAMERS    P.A.M. DIRAC    A.H. COMPTON    L. de BROGLIE    M. BORN    N. BOHR  
I. LANGMUIR    M. PLANCK    Mme CURIE    H.A. LORENTZ    A. EINSTEIN    P. LANGEVIN    C.M.E. GUYE    C.T.R. WILSON    O.W. RICHARDSON

Absents : Sir W.H. BRAGG, H. DESLANDRES et E. VAN AUBEL

COLOR BY PASTINCOLOR.COM

# Les congrès Solvay



Ernest Solvay, industriel belge et grand mécène scientifique (1838-1922)

Les Congrès Solvay, surtout les 12 premiers, ont joué un rôle capital dans l'élaboration de la Physique moderne.

## Les congrès Solvay

- Ils ont été un lieu de partage, mais aussi de confrontation des grandes idées émergentes de la Physique : un travail en communauté, des débats, voir des confrontations qualifiées par certains auteurs de « titanesques » (débats Einstein – Bohr).
- Ils ont eu un impact considérable, voire mythique, tant des points de vue scientifique que philosophique, dans la construction des théories physiques (notamment la théorie quantique).
- Tous les plus grands scientifiques, d'abord européens, et plus tard internationaux (USA, russes...) ont participé à ces rencontres.

Extraits de la conférence « Les Congrès Solvay » de Godefroy Kugel

# L'Union Mathématique Internationale



Congrès International de 1932 à Zürich, Suisse

- Fondée en 1919, elle regroupe 65 organisations mathématiques nationales.
- Elle organise tous les quatre ans le *Congrès international des mathématiciens* lors duquel sont décernées les *Médailles Fields*.

# L'Union internationale de physique pure et appliquée



Fondée en 1922, elle fête ses 100 ans cette année !

# L'Union internationale de chimie pure et appliquée



Le conseil de l'union internationale de chimie pure et appliquée

Fondée en 1919, elle établit (entre autres) la nomenclature  
en chimie et biochimie.

# L'union fait la force : Tuna Altinel



# L'union fait la force : Tuna Altinel

Tuna Altinel, professeur de mathématiques à Lyon, a participé en 2019 à une réunion publique à Lyon au sujet de massacres présumés au sud-est de la Turquie. Le consul local de Turquie a rendu compte de cette réunion aux autorités turques d'Ankara, mentionnant que le Dr. Altinel avait servi d'observateur. Une accusation d'appartenance à un groupe terroriste armé s'en est suivie et lors d'une visite en avril en Turquie, son pays natal, le passeport d'Altinel lui a été confisqué. Il a ensuite été arrêté et placé en détention provisoire pendant 81 jours. Les charges ont été ultérieurement réduites à celle de propagande pour un groupe terroriste. Dr. Altinel a été acquitté de cette dernière accusation en janvier 2020, mais son passeport n'a pas été restitué ; il demeure dans l'incapacité de quitter la Turquie.

Tuna Altinel est incarcéré le 11 mai 2019 en Turquie

# # PassportForTuna @SoutienTuna @TunaALTINEL



## Comité de Soutien à Tuna Altinel

20 abonnés

ABONNE 🔔

ACCUEIL **VIDÉOS** PLAYLISTS CHAINES DISCUSSION À PROPOS 🔍

Vidéos mises en ligne **TOUT REGARDER** ☰ TRIER PAR

 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Ryzan Kim - équipe de logique - Yonsei University</p> <p>1 vue • il y a 2 heures</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Yannick Viossat - Université Paris Dauphine</p> <p>11 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Rizos Sklinos - Stevens Institute of Technology</p> <p>6 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Helene Esnault - Freie Universität Berlin</p> <p>13 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Thomas Lepoutre - INRIA &amp; Université Lyon 1</p> <p>6 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Kivanc Ersoy - Freie Universität Berlin</p> <p>11 vues • il y a 1 jour</p>
 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Charlotte Hardouin - Université Toulouse 3</p> <p>10 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Zoé Mesnil - Université de Paris</p> <p>7 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Sefa Feza Arslan - Mimar Sinan Güzel Sanatlar...</p> <p>16 vues • il y a 1 jour</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Tuna Altinel - Michel Broué : Mathématiciens engagés ...</p> <p>37 vues • il y a 2 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Christian D'Eibée - University of Jerusalem</p> <p>14 vues • il y a 2 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>François Huveneers - Université Paris Dauphine</p> <p>3 vues • il y a 2 jours</p>
 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Betül Tanbay - Bogaziçi University</p> <p>18 vues • il y a 2 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Francesco Fanelli - Université Lyon 1</p> <p>9 vues • il y a 2 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Benjamin Druart - Employé chez ThinkTank Maths</p> <p>8 vues • il y a 2 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Phillip Caldero - Université Lyon 1</p> <p>22 vues • il y a 2 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Vincent Borrelli - Université Lyon 1</p> <p>19 vues • il y a 3 jours</p>	 <p><b>EXPRESSIONS DE SOUTIEN À TUNA ALTINEL</b></p> <p>Fanny Delebecque - Université Toulouse 3</p> <p>14 vues • il y a 3 jours</p>

# 11 juin 2021 : Victoire !



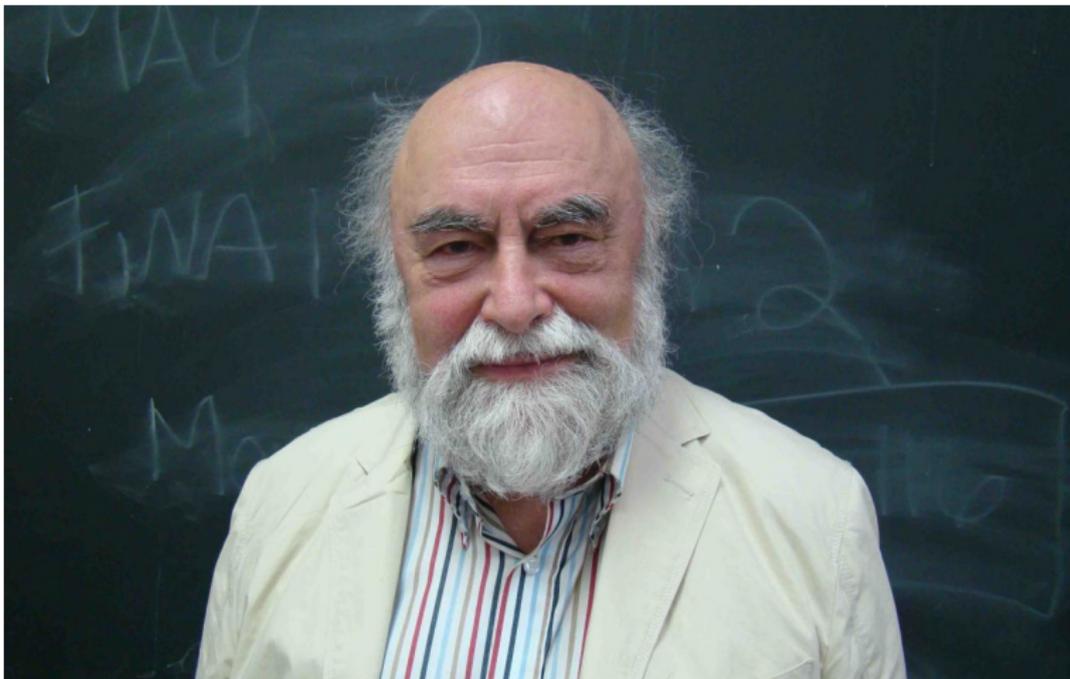
Tuna Altinel à son arrivée en France

# Azat Miftakhov



# Azat Miftakhov

Le cas d'[Azat Miftakhov](#) illustre les problèmes des droits humains en Russie. Miftakhov, un doctorant en mathématiques à l'université d'état de Moscou, a été arrêté en février 2019 à Moscou sur de prétendues charges de vandalisme, liées à un acte de protestation politique. Miftakhov, qui a plaidé non coupable pour ces charges, a été maintenu en détention provisoire pendant près de deux ans et soumis par les autorités à des mauvais traitements marqués et peut-être à de la torture. Malgré le soutien de nombreuses organisations mathématiques et scientifiques, un tribunal de Moscou a jugé le 18 janvier 2021 que Miftakhov était coupable d'hooliganisme et lui a octroyé une peine manifestement excessive de six ans de prison.



Anatoly Vershik, ancien président de l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg

Une lettre ouverte des mathématiciens russes à l'Union Mathématique  
Internationale.

# Azat Miftakhov



# Azat Miftakhov

