

# CM1 - Champs de vecteurs

Vincent Borrelli

Université de Lyon

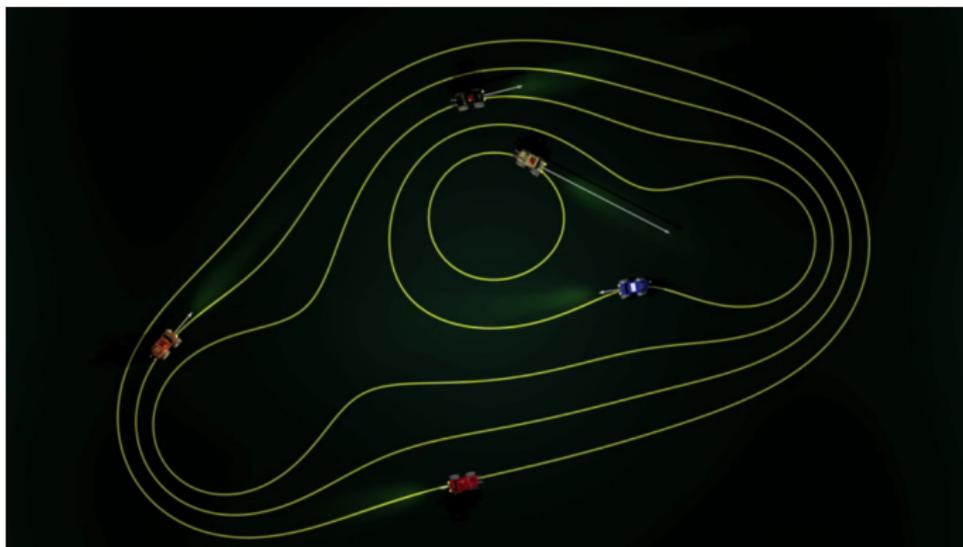
Champs de  
vecteurs

Repères  
mobiles

Champ radial,  
champ central

Champ  
scalaire

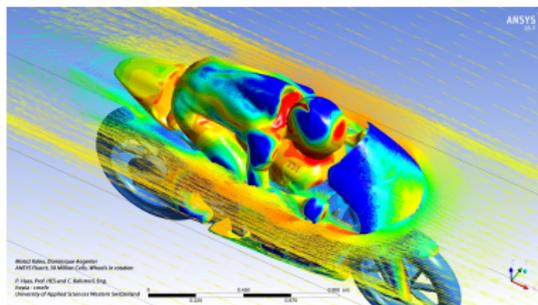
La pause  
culture



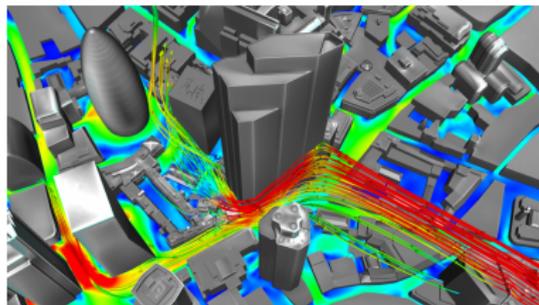
# Champs de vecteurs

La notion de champ de vecteurs intervient sous plusieurs formes en physique.

- **Champ de vitesse** : Le mouvement d'un fluide (liquide ou gazeux), le transport de la chaleur, de l'énergie ou du courant électrique, sont décrits au niveau macroscopique par des champs de vecteurs qui associent à chaque point la vitesse du transport en ce point.



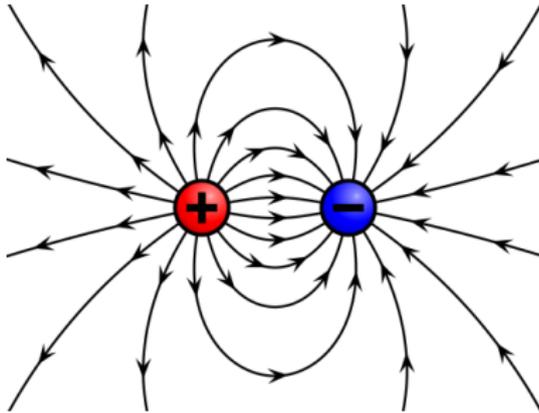
By Patrick Haas (wikipedia), CC BY-SA 4.0



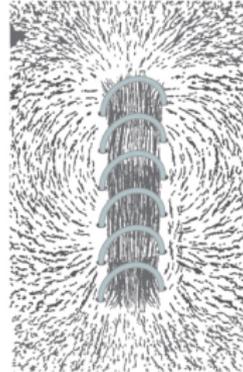
© by Wirth Research

# Champs de vecteurs

- **Champ de forces** : Le champ en un point représente la force qu'une particule subirait si elle était placée en ce point. Exemples : le champ gravitationnel, le champ électrique ou le champ magnétique.

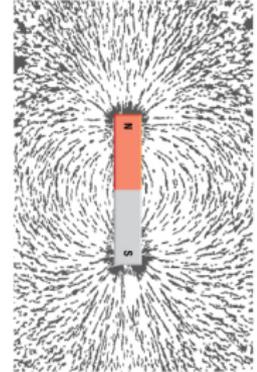


By Geek3 (wikipedia), CC BY-SA 4.0



(a)

By OpenStax, CC BY-SA 4.0



(b)

# Champs de vecteurs

**Définition.**– On appelle *champ de vecteurs* toute application

$$\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \vec{E}$$

à valeur dans un espace vectoriel dont la dimension est  $\dim_{\mathbb{R}} \vec{E} = n$ .

**Remarque.**– De nombreuses applications provenant de la physique sont des champs de vecteurs : le champ gravitationnel  $\vec{G}$ , le champ électrique  $\vec{E}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$ , le champ des vitesses d'un écoulement.

# Champs de vecteurs

- Toute base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\vec{E}$ , permet d'écrire  $\vec{V}$  en coordonnées, i. e. il existe  $a_1, \dots, a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in D, \quad \vec{V}(x) = a_1(x)\vec{e}_1 + \dots + a_n(x)\vec{e}_n.$$

- Le choix d'une base induit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\vec{E}$  une identification entre  $\vec{E}$  et  $\mathbb{R}^n$ . Il permet d'écrire le champ de vecteurs  $\vec{V}$  comme l'application  $D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix}$$

# Champs de vecteurs

**Définition.**— On dit que le champ de vecteurs  $\vec{V}$  est de *classe*  $C^k$  si ses applications coordonnées

$$a_1, \dots, a_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont de classe  $C^k$ .

- Cette définition ne dépend pas de la base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  choisie pour l'identification de  $\vec{E}$  à  $\mathbb{R}^n$ .

## Repère mobile

**Définition.**— Un repère mobile sur un espace affine  $E$  est une application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad A \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow E \times \vec{E} \times \vec{E} \times \vec{E} \\ p = (x, y, z) &\longmapsto (\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p)) \end{aligned}$$

telle que pour tout  $p$ ,  $(\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p))$  soit un repère de  $E$ .

**Exemple 1 : le repère mobile cartésien.**— Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base standard de  $\mathbb{R}^3$ . Il s'agit du repère mobile défini par

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ p = (x, y, z) &\longmapsto (p; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{aligned}$$

## Exemple

**Exemple 2 : le repère mobile cylindrique.**— Il s'agit du repère mobile défini par

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k} \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ (\rho, \varphi, z) &\longmapsto (\Omega; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}) \end{aligned}$$

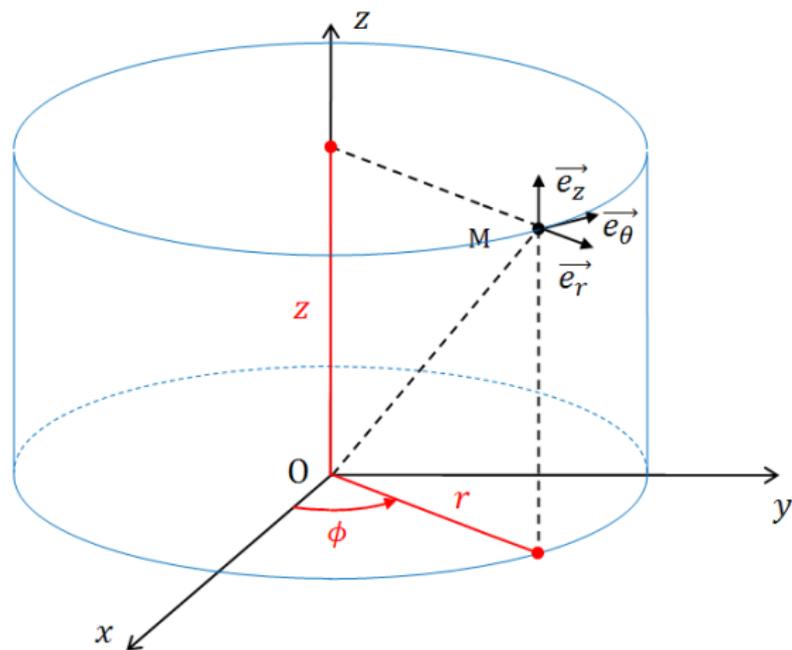
avec

$$\Omega(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho(\rho, \varphi, z) = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi(\rho, \varphi, z) = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

# Le repère mobile cylindrique



## Exemple

**Exemple 3 : le repère mobile sphérique.**— Il s'agit du repère mobile défini par

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k} \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ &\longmapsto (\Omega; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

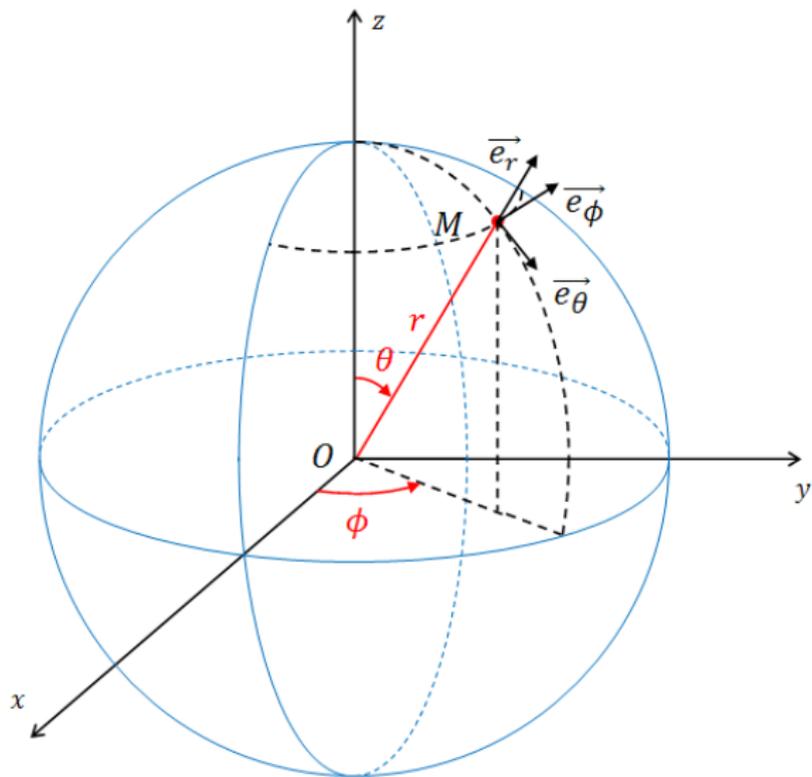
avec

$$\Omega(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta) = \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi(r, \varphi, \theta) = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\theta(r, \varphi, \theta) = \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + \sin \varphi \cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \end{cases}$$

# Le repère mobile sphérique



## Changement de coordonnées

- Il est parfois très pratique d'exprimer un champ de vecteurs  $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dans un repère mobile

$$\begin{aligned} \Phi : \quad A \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow E \times \vec{E} \times \vec{E} \times \vec{E} \\ p = (x, y, z) &\longmapsto (\Omega(p); \vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p)) \end{aligned}$$

- On note  $\vec{V}^\Phi(p)$  le *vecteur*  $\vec{V}(\Omega(p))$ .
- Exprimer  $\vec{V}$  dans le repère mobile  $\Phi$  c'est, pour tout point  $p \in A$ , décomposer  $\vec{V}^\Phi(p)$  dans la base  $\vec{e}_1(p), \vec{e}_2(p), \vec{e}_3(p)$ , autrement dit, c'est déterminer  $a_1^\Phi, a_2^\Phi$  et  $a_3^\Phi$  telles que

$$\forall p \in A, \quad \vec{V}^\Phi(p) = a_1^\Phi(p) \vec{e}_1(p) + a_2^\Phi(p) \vec{e}_2(p) + a_3^\Phi(p) \vec{e}_3(p)$$

**Un abus de notation.**– Dans la pratique, on n'écrit jamais l'exposant  $\Phi$ ... il est sous-entendu.

## Exemple

**Un exemple : expression du champ gravitationnel en coordonnées sphériques.**– Le champ gravitationnel

$\vec{\mathcal{G}} : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  a pour expression :

$$\vec{\mathcal{G}}(x, y, z) = -\frac{GM}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Déterminer  $\vec{\mathcal{G}}$  dans le repère mobile sphérique

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k} \times (\mathbb{R}^3)^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\longmapsto (\Omega; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

c'est trouver  $a^\Phi$ ,  $b^\Phi$  et  $c^\Phi$  telles que

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{G}}(\Omega(r, \varphi, \theta)) &= a^\Phi(r, \varphi, \theta) \vec{e}_r(r, \varphi, \theta) \\ &+ b^\Phi(r, \varphi, \theta) \vec{e}_\varphi(r, \varphi, \theta) + c^\Phi(r, \varphi, \theta) \vec{e}_\theta(r, \varphi, \theta) \end{aligned}$$

## Exemple

Puisque

$$\Omega(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

on a

$$\vec{\mathcal{G}}(\Omega(r, \varphi, \theta)) = -\frac{GM}{r^2} \frac{r \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + r \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}}{r}$$

d'où

$$\vec{\mathcal{G}}(\Omega(r, \varphi, \theta)) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta).$$

Ainsi

$$a^\Phi(r, \varphi, \theta) = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{et} \quad b^\Phi(r, \varphi, \theta) = c^\Phi(r, \varphi, \theta) = 0.$$

En fin de compte

$$\vec{\mathcal{G}}^\Phi(r, \varphi, \theta) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta)$$

## Exercices

**Énoncé (passage cartésiennes->cylindriques).**— Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteur de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k}$  donné par

$$\vec{V}(x, y, z) = a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k}$$

Déterminer l'expression de ce champ en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \alpha(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + \beta(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + \gamma(\rho, \varphi, z)\vec{k}$$

**Réponse.**— En inversant les formules de l'exemple 2, on trouve

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

## Exercices

D'où

$$\begin{aligned}
 \vec{V}(x, y, z) &= a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k} \\
 &= a(x, y, z)(\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \\
 &\quad + b(x, y, z)(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) + c(x, y, z)\vec{k} \\
 &= (a(x, y, z) \cos \varphi + b(x, y, z) \sin \varphi) \vec{e}_\rho \\
 &\quad + (b(x, y, z) \cos \varphi - a(x, y, z) \sin \varphi) \vec{e}_\varphi \\
 &\quad + c(x, y, z)\vec{k}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \alpha(\rho, \varphi, z) &= a(x, y, z) \cos \varphi + b(x, y, z) \sin \varphi \\
 \beta(\rho, \varphi, z) &= b(x, y, z) \cos \varphi - a(x, y, z) \sin \varphi \\
 \gamma(\rho, \varphi, z) &= c(x, y, z)
 \end{aligned}$$

avec  $x = \rho \cos \varphi$  et  $y = \rho \sin \varphi$ .

## Exercices

**Énoncé (passage cartésiennes->sphériques).**– Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteur de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k}$  donné par

$$\vec{V}(x, y, z) = a(x, y, z)\vec{i} + b(x, y, z)\vec{j} + c(x, y, z)\vec{k}$$

Déterminer l'expression de

$$\vec{V}(r, \varphi, \theta) = \alpha(r, \varphi, \theta)\vec{e}_r + \beta(r, \varphi, \theta)\vec{e}_\varphi + \gamma(r, \varphi, \theta)\vec{e}_\theta$$

en coordonnées sphériques.

**Réponse.**– En inversant les formules de l'exemple 3, on trouve

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{j} = \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{k} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \vec{V} &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\
 &= a(\cos \varphi \sin \theta \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta) \\
 &\quad + b(\sin \varphi \sin \theta \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta) \\
 &\quad + c(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \\
 &= (a \cos \varphi \sin \theta + b \sin \varphi \sin \theta + c \cos \theta) \vec{e}_r \\
 &\quad + (b \cos \varphi - a \sin \varphi) \vec{e}_\varphi \\
 &\quad + (a \cos \varphi \cos \theta + b \sin \varphi \cos \theta - c \sin \theta) \vec{e}_\theta
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \alpha(r, \varphi, \theta) &= a \cos \varphi \sin \theta + b \sin \varphi \sin \theta + c \cos \theta \\
 \beta(r, \varphi, \theta) &= b \cos \varphi - a \sin \varphi \\
 \gamma(r, \varphi, \theta) &= a \cos \varphi \cos \theta + b \sin \varphi \cos \theta - c \sin \theta
 \end{aligned}$$

avec  $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$  et  $z = r \cos \theta$

# Champ radial, champ central

Champs de  
vecteursRepères  
mobilesChamp radial,  
champ centralChamp  
scalaireLa pause  
culture

**Définition.**— Un champ de vecteurs  $\vec{V} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est dit *radial* par rapport à un axe  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  si dans des coordonnées cylindriques telle que  $\mathbb{R}\vec{k} = \vec{\Delta}$ , il a pour expression

$$\vec{V}(\rho, \varphi, z) = a(\rho)\vec{e}_\rho$$

Un champ de vecteurs  $\vec{V} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est dit *central* par rapport à un point  $O \in \mathbb{R}^3$  si dans des coordonnées sphériques ayant  $O$  pour centre, il a pour expression

$$\vec{V}(r, \varphi, \theta) = a(r)\vec{e}_r$$

## Exemples provenant de la physique

- Le **vecteur position** est le champ vectoriel défini en tout point  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par

$$\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Ses expressions en coordonnées cylindriques

$$\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

et en coordonnées sphériques

$$\vec{V}(r, \varphi, \theta) = r \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + r \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k} = r \vec{e}_r$$

s'obtiennent en utilisant les formules vues précédemment. Elles montrent en particulier que  $\vec{V}$  est un champ central.

## Exemples provenant de la physique

- On a déjà rencontré le **champ gravitationnel** engendré par un corps de masse  $M$  :

$$\vec{\mathcal{G}}(r, \varphi, \theta) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta)$$

où  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  est la constante gravitationnelle. Il s'agit d'un champ central. Un corps de masse  $m$  situé à une distance  $r$  du corps la masse  $M$  est alors soumis à la **force gravitationnelle**

$$\vec{F}(r, \varphi, \theta) = m\vec{\mathcal{G}}(r, \varphi, \theta) = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta)$$

## Exemples provenant de la physique

- Le **champ électrique** engendré par une charge  $Q$  est le champ central

$$\vec{E}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta),$$

où  $\epsilon$  est la permittivité diélectrique du matériau sur lequel agit le champ. Une charge  $q$  située à distance  $r$  de la charge  $Q$  est alors soumise à la **force de Coulomb**

$$\vec{F}(r, \varphi, \theta) = q\vec{E}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r(r, \varphi, \theta)$$

## Exercices

**Énoncé.**— Soit  $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  le champ de vecteurs défini par

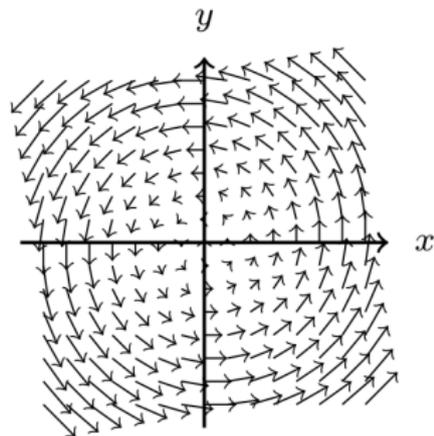
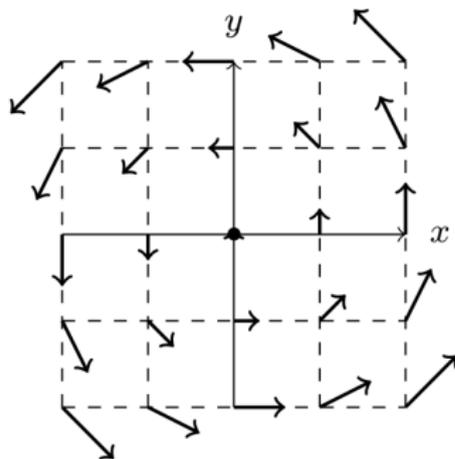
$$\vec{V}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$$

Écrire  $\vec{V}$  en coordonnées polaires puis dessiner l'allure du champ.

**Réponse.**— Il suffit d'utiliser les formules de passage coordonnées cylindriques  $\longleftrightarrow$  coordonnées cartésiennes, en posant  $z = 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} \vec{V}(\rho, \varphi) &= -y \vec{i} + x \vec{j} \\ &= -\rho \sin \varphi (\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \\ &\quad + \rho \cos \varphi (\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \rho (-\sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \cos \varphi \sin \varphi) \vec{e}_\rho + \rho (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \vec{e}_\varphi \\ &= \rho \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

# Exercices



## Exercices

**Énoncé.**— Soit  $\vec{V} : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\varphi$$

Justifier le choix du domaine de définition. Écrire  $\vec{V}$  en coordonnées cartésiennes.

**Réponse.**— Le repère mobile polaire n'est pas défini en l'origine, il faut donc  $\rho \neq 0$ . Quant à l'angle  $\varphi$ , il suffit qu'il décrive un intervalle de longueur  $2\pi$ .

Pour l'écriture en coordonnées cartésiennes, on s'appuie sur les formules de passage coordonnées cylindriques  $\longleftrightarrow$  coordonnées cartésiennes, avec  $z = 0$ .

## Exercices

On a

$$\begin{aligned}\vec{V}(x, y) &= \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\varphi \\ &= \left( \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \right) \\ &\quad + \rho \left( -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \right) \\ &= \left( \cos \varphi - \rho \sin \varphi \right) \vec{i} \\ &\quad + \left( \sin \varphi + \rho \cos \varphi \right) \vec{j} \\ &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y \right) \vec{i} \\ &\quad + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right) \vec{j}.\end{aligned}$$

## Exercices

**Énoncé.**— Soit  $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = (z, y, x) = z \vec{i} + y \vec{j} + x \vec{k}$$

Écrire  $\vec{V}$  en coordonnées cylindriques et sphériques puis dessiner l'allure du champ.

**Réponse.**— En s'appuyant sur les formules de passage coordonnées cylindriques  $\longleftrightarrow$  coordonnées cartésiennes, on obtient

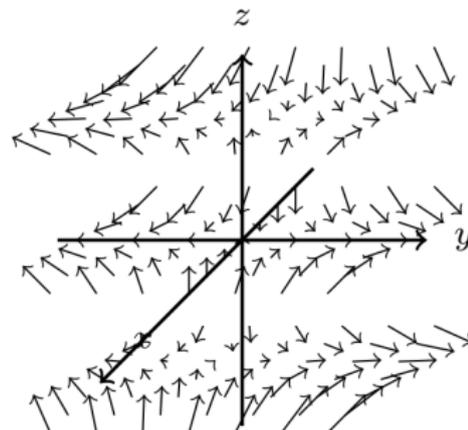
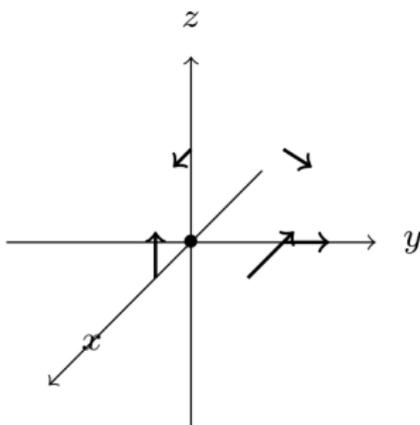
$$\begin{aligned} \vec{V}(\rho, \varphi, z) &= z (\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \\ &\quad + \rho \sin \varphi (\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \\ &\quad + \rho \cos \varphi \vec{k} \\ &= (z \cos \varphi + \rho \sin^2 \varphi) \vec{e}_\rho \\ &\quad + (-z \sin \varphi + \rho \cos^2 \varphi) \vec{e}_\varphi + \rho \cos \varphi \vec{k}. \end{aligned}$$

## Exercices

En s'appuyant maintenant sur les formules de passage coordonnées sphériques  $\longleftrightarrow$  coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\begin{aligned}
 \vec{V}(r, \varphi, \theta) &= r \cos \theta \left( \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \right) \\
 &\quad + r \sin \varphi \sin \theta \left( \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_r \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \vec{e}_\varphi + \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta \right) \\
 &\quad + r \cos \varphi \sin \theta \left( \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \right) \\
 &= r \left( \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + r \left( -\sin \varphi \cos \theta + \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \right) \vec{e}_\varphi \\
 &\quad + r \left( \cos \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - \cos \varphi \sin^2 \theta \right) \vec{e}_\theta \\
 &= r \sin \theta \left( 2 \cos \varphi \cos \theta + \sin^2 \varphi \sin \theta \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + r \sin \varphi \left( -\cos \theta + \cos \varphi \sin \theta \right) \vec{e}_\varphi \\
 &\quad - r \left( \cos \varphi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \right) \vec{e}_\theta .
 \end{aligned}$$

# Exercices



## Lignes de champ

**Définition.**— Une *ligne de champ* ou *courbe intégrale* d'un champ vectoriel  $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ) est une courbe  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$  telle que en tout point  $t \in I$  on a :

$$\gamma'(t) = \vec{V}(\gamma(t)).$$

- Par conséquent,

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

est une ligne de champ de  $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = c(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

# Champ scalaire

**Définition.**– Un *champ scalaire* est une application  
 $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ .

- Les mots « champ scalaire » et « fonction réelle de plusieurs variables » sont donc synonymes. L'appellation « champ scalaire » est souvent utilisée par les physiciens.
- Dans la pratique  $n = 2$  ou  $3$ . Si  $n = 3$ , on représente le champ scalaire en dessinant ses surfaces de niveau

$$S_a(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x, y, z) = a\}$$

## Exemples

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , la **distance** depuis l'origine est le champ scalaire défini par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En coordonnées sphériques l'expression de ce champ est particulièrement simple puisque  $d(r, \varphi, \theta) = r$ .

- L'**évaluation** d'une coordonnée (ici la première coordonnée cartésienne) est le champ scalaire de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\pi(x, y, z) = x$$

## Exemples

- Le **potentiel gravitationnel** engendré par une masse  $M$  située en  $(0, 0, 0)$  est le champ scalaire de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$  défini par

$$V(x, y, z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

En coordonnées sphériques l'expression de ce champ est particulièrement simple puisque  $V(r, \varphi, \theta) = -\frac{GM}{r}$ .

- Le **potentiel électrostatique** engendré par une charge  $Q$  située en  $(0, 0, 0)$ , aussi appelé **potentiel de Coulomb**, est le champ scalaire de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$  défini par

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

En coordonnées sphériques l'expression de ce champ est particulièrement simple puisque  $\phi(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ .

## Exercices

**Énoncé.**— Décrire les surfaces de niveau des potentiels gravitationnel  $V$  et de Coulomb  $\phi$ .

**Réponse.**— Pour tout  $a \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$\begin{aligned} S_a(V) &= \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid -\frac{GM}{r} = a \right\} \\ &= \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid r = -\frac{GM}{a} \right\} \\ S_a(\phi) &= \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = a \right\} \\ &= \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \right\} \end{aligned}$$

Ces surfaces sont soit le vide, soit des sphères centrées en l'origine et dont le rayon dépend de  $a$  (attention au signe).

# Emmy Noether 1882-1935



## Emmy Noether 1882-1935



- Mathématicienne allemande d'une importance considérable, à l'origine d'avancées majeures en algèbre.
- Ses travaux en physique théorique conduisent à un résultat "aussi important que la théorie de la relativité" (wiki) qui porte désormais son nom : le théorème de Noether.

# 2 décembre 1915 - La relativité générale

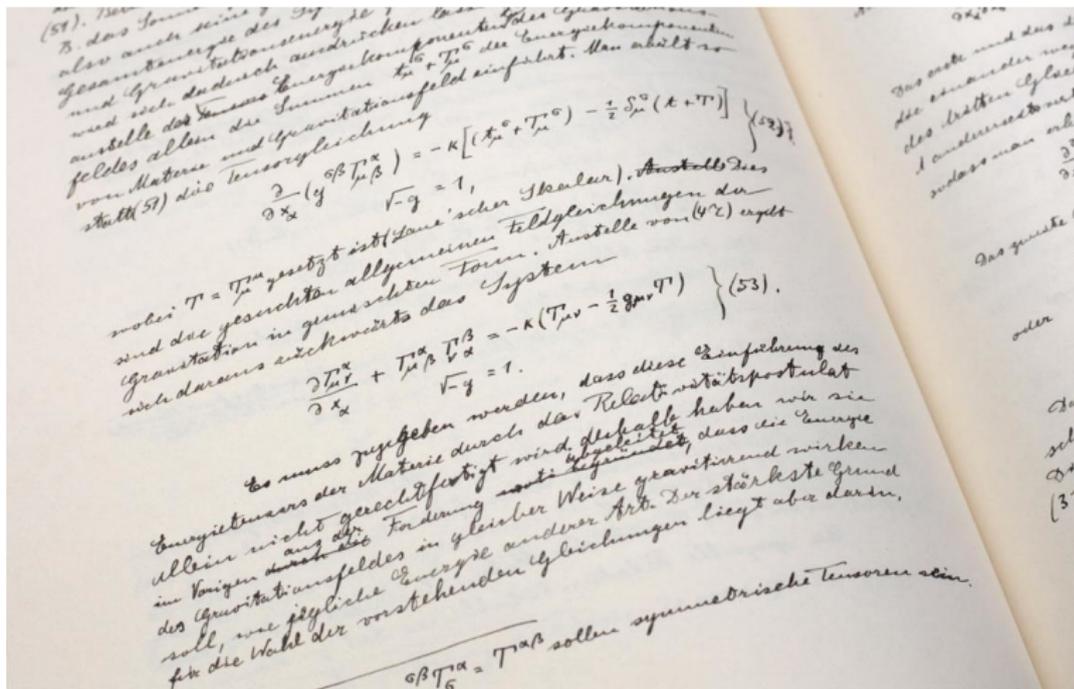
Champs de  
vecteurs

Repères  
mobiles

Champ radial,  
champ central

Champ  
scalaire

La pause  
culture



Manuscrit d'Albert Einstein décrivant la Relativité Générale.

## 2 décembre 1915 - La relativité générale

Champs de  
vecteurs

Repères  
mobiles

Champ radial,  
champ central

Champ  
scalaire

La pause  
culture



En relativité générale, l'énergie n'est pas conservée !  
Exemple : le redshift

## 2 décembre 1915 - La relativité générale



En relativité générale, l'énergie n'est pas conservée !

Exemple : le redshift

David Hilbert et Felix Klein font appel à Emmy Noether pour les aider à  
comprendre ce paradoxe.

« Un monument de la pensée  
mathématique », A. Einstein

# Théorème de Noether

The diagram illustrates Noether's theorem with four examples of symmetries and their corresponding conserved quantities:

- Translation:** A white cross with four arrows pointing up, down, left, and right, representing translational symmetry. Below it, a red sphere on a grid with a white arrow pointing right, representing the conservation of momentum.
- Rotation:** Two white circular arrows forming a loop, representing rotational symmetry. Below it, a wrench on a grid with two white circular arrows around it, representing the conservation of angular momentum.
- Time:** A white clock face, representing time translation symmetry. Below it, two glowing purple spheres on a grid, representing the conservation of energy.
- Gauge:** A rainbow-colored ring, representing gauge symmetry. Below it, a red glowing sphere with a white plus sign and a blue glowing sphere with a white minus sign on a grid, representing the conservation of electric charge.

*L'existence d'une famille continue de symétries implique la conservation  
d'une grandeur physique*



« Un monument de la pensée  
mathématique », A. Einstein

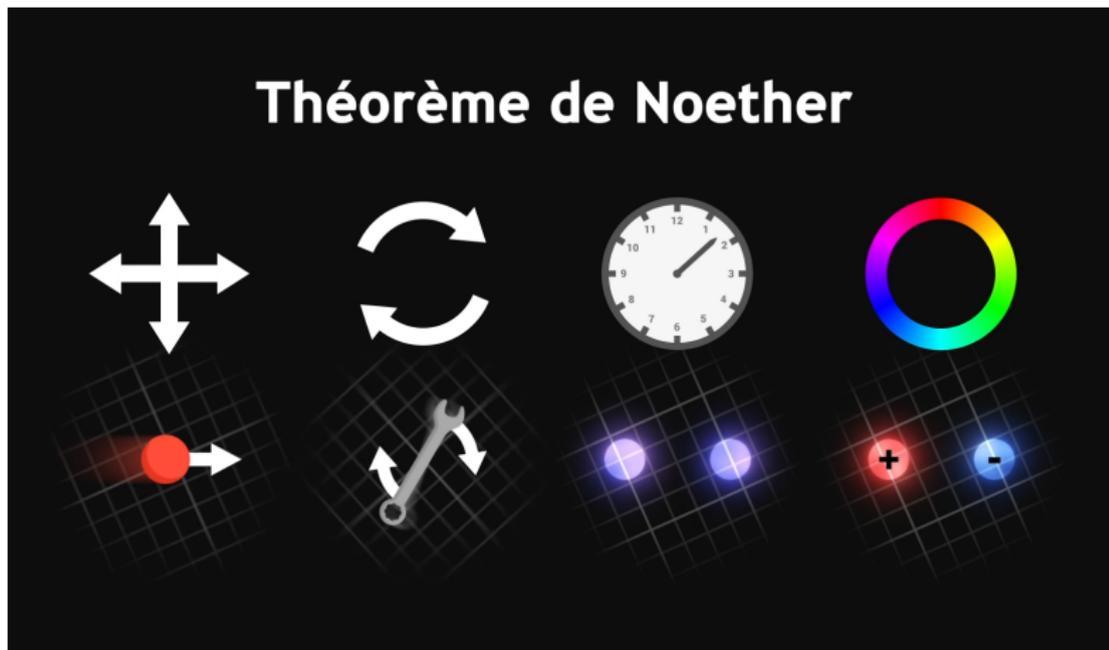
## Théorème de Noether



Existence d'une symétrie par rotation  $\implies$  conservation du moment  
angulaire

« Un monument de la pensée  
mathématique », A. Einstein

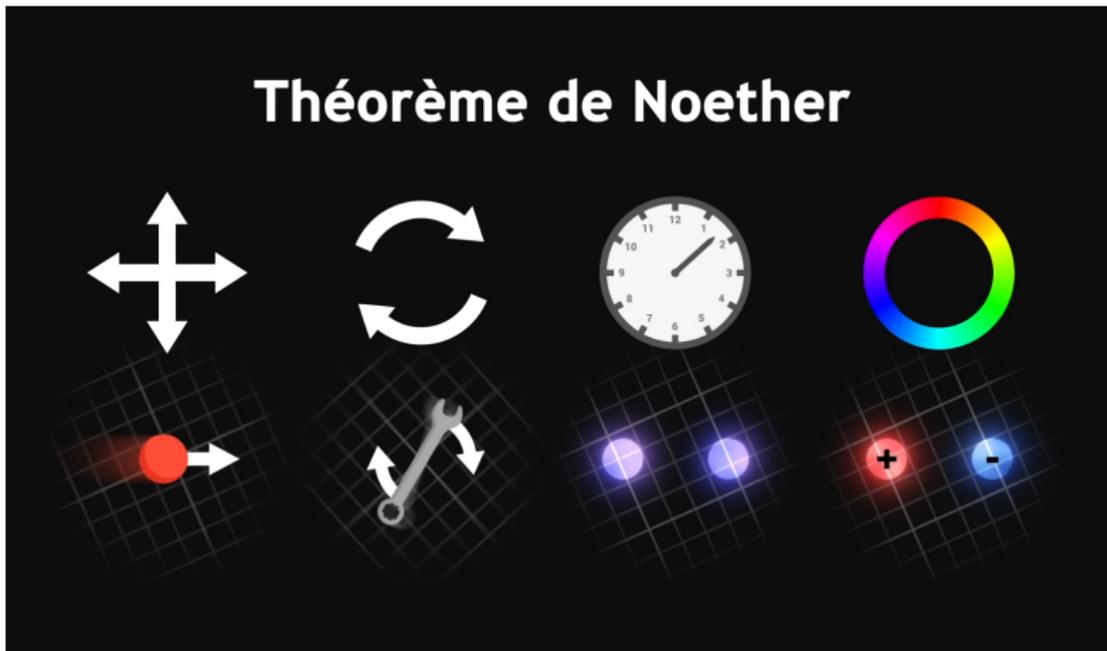
## Théorème de Noether



Existence d'une symétrie temporelle  $\implies$  conservation de l'énergie

« Un monument de la pensée  
mathématique », A. Einstein

## Théorème de Noether



Existence d'une symétrie par changement de phase  $\implies$  conservation de  
la charge électrique

## Résolution d'un paradoxe



L'énergie n'est pas conservée parce que l'Univers n'est pas invariant dans le temps : il est en expansion (même si ce fait ne sera pensé qu'à partir de 1927 par Georges Lemaître)

# Hommage



« Fräulein Noether était le génie mathématique créatif le plus  
considérable produit depuis que les femmes ont eu accès aux études  
supérieures jusqu'à aujourd'hui. »

Albert Einstein au New York Times en 1935

## Sexisme...



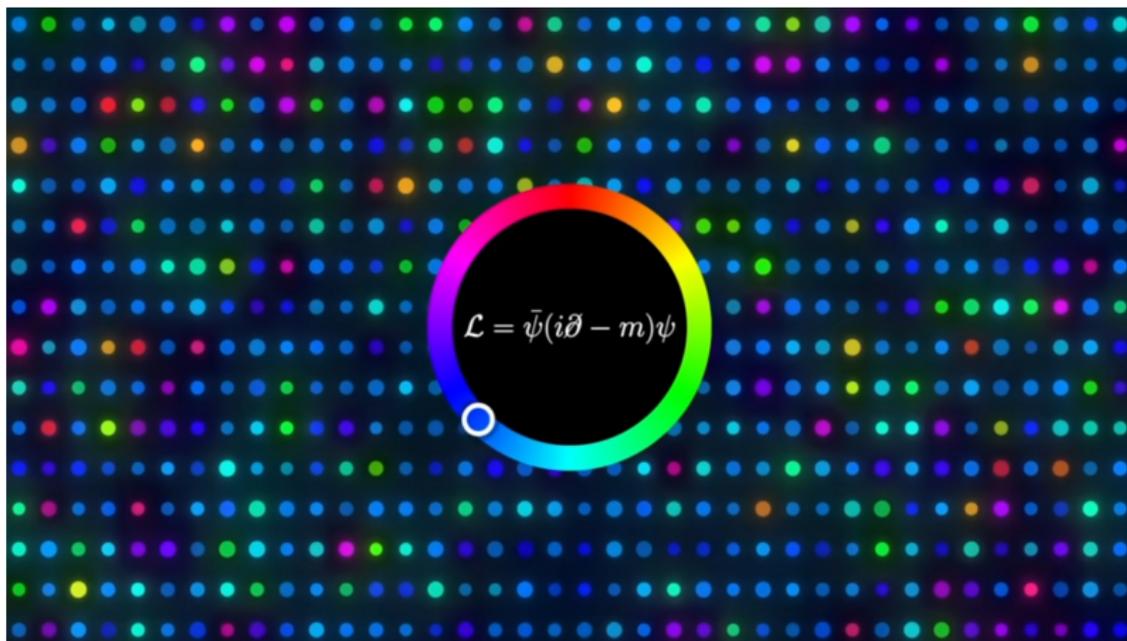
« Que penseront nos soldats quand ils reviendront à l'université et verront qu'ils doivent apprendre aux pieds d'une femme ? » (un membre de la faculté de Göttingen)

« L'université n'est pas un bain public où l'on sépare les hommes des femmes. » (David Hilbert)

## ... et antisémitisme

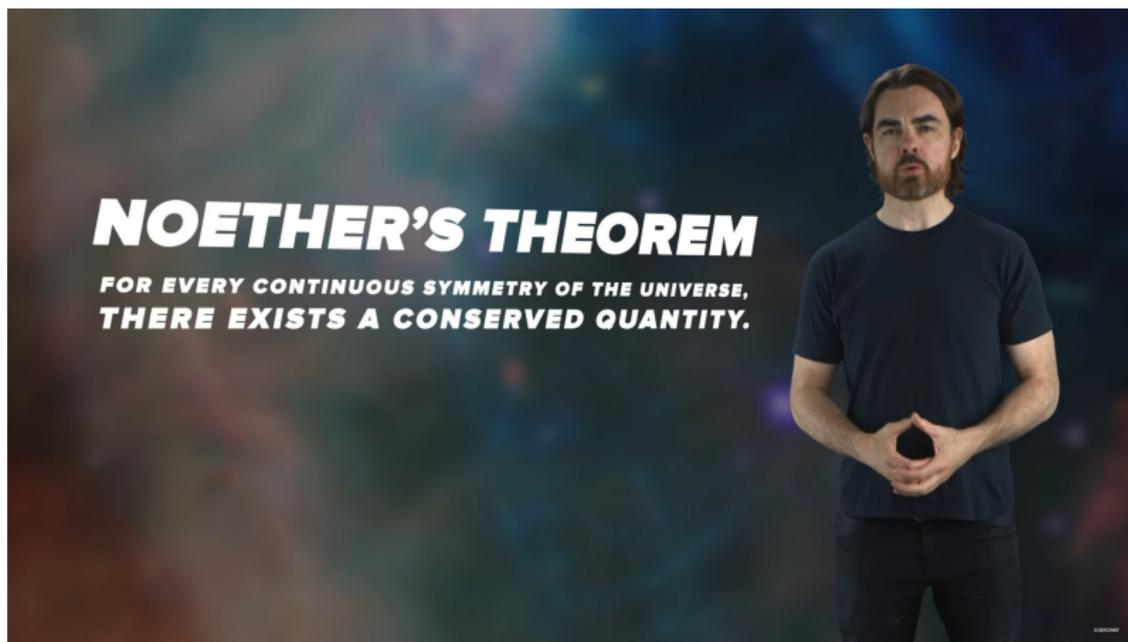


- En 1933, les Nazis retirent le droit d'enseigner aux professeurs juifs. Noether poursuit son activité mathématique chez elle.
- Fin 1933, elle est exfiltrée d'Allemagne grâce à Albert Einstein qui oeuvre pour lui obtenir un poste au Bryn Mawr College (Pennsylvanie).
- Elle meurt d'un cancer en 1935.



The Symmetries of the Universe

# PBS Space Time



## Noether's Theorem and the Symmetries of Reality

# Biographics



Simon Whistler consacre une biographie à Emmy Noether

# Your Daily Equation



Brian Green (l'auteur de *L'Univers élégant*) explique le théorème de Noether

## Very Math Trip



« Pour Einstein, elle était LE génie mathématique. Pourtant, qui connaît Emmy Noether ? », Manu Houdard

# Women of Mathematics

