CM-TA10 : Monodromie

Vincent Borrelli
Université de Lyon

Lions de la voie processionnelle de Babylone, vers 600 av. J.C.

Photo A. Dubernet

Action du π_1 sur la fibre

• Étant donnés un revêtement $p : E \to B$, $b \in B$, $x \in F_b = p^{-1}(b)$ et $\gamma : [0,1] \to B$ un lacet basé en b, la propriété de relèvement des chemins assure l'existence d'un unique chemin relevé $\widetilde{\gamma}$ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$.

• Son extrémité $\widetilde{\gamma}(1)$ est un élément de la fibre F_b de p au dessus de b et ne dépend pas de la classe d'homotopie de lacets basés de γ.

• En effet, si $\delta : [0,1] \to B$ basé en b est un autre lacet homotope à γ relativement à b alors son relevé fournit un chemin dans F_b joignant $\widetilde{\gamma}(1)$ à $\widetilde{\delta}(1)$. Comme la fibre est discrète, ce chemin est constant et donc $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\delta}(1)$.

Action du π_1 sur la fibre

- On a donc une application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \pi_1(B,b) \times F_b & \longrightarrow & F_b \\ & ([\gamma], x) & \longmapsto & \widetilde{\gamma}(1) \end{array}$$

Proposition.– *L'application ϕ définit une action à droite du groupe fondamental $\pi_1(B,b)$ sur la fibre F_b appelée* MONODROMIE

Démonstration.– Montrons que $\phi(c_b, x) = x$. Le chemin constant c_b se relève en le chemin constant c_x (unicité du relèvement) et donc $\phi(c_b, x) = c_x(1) = x$.

- Montrons que

$$\varphi([\gamma_2], \phi([\gamma_1], x)) = \phi([\gamma_1 * \gamma_2], x)$$

Action du π_1 sur la fibre

• Par définition de ϕ :

$$\phi([\gamma_1 * \gamma_2], x) \quad = \quad \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}(1)$$

et

$$\varphi([\gamma_2], \phi([\gamma_1], x)) \quad = \quad \widetilde{\gamma}_2'(1)$$

où $\widetilde{\gamma}_2'$ est le relevé de γ_2 tel que $\widetilde{\gamma}_2'(0) = \phi([\gamma_1], x)$.

• Puisque $\phi([\gamma_1], x) = \widetilde{\gamma}_1(1)$, la concaténation est possible et

$$\widetilde{\gamma}_1 * \widetilde{\gamma}_2'$$

est un relevé de $\gamma_1 * \gamma_2$ partant de $x = \widetilde{\gamma}_1(0)$.

Action du π_1 sur la fibre

- Par unicité du relevé, on a

$$\widetilde{\gamma}_1 * \widetilde{\gamma}_2' = \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}$$

et en particulier $\widetilde{\gamma}_1 * \widetilde{\gamma}_2'(1) = \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}(1)$. □

Exemple 1.– Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ donnée par $s \mapsto e^{2i\pi s}$ et $b \in \mathbb{S}^1$. L'action d'un élément $m \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, b)$ sur la fibre

$$F_b = \{x = b + k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$$

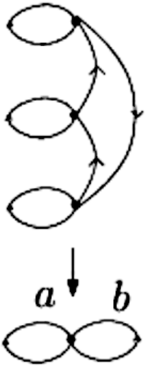
est donnée par la translation $x \to x + m$.

Exemple 2.– Soit $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$, et $b, b' \in \mathbb{S}^1$ et $(b')^n = b$. L'action d'un élément $m \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, b)$ sur la fibre

$$F_b = \{e^{\frac{2i\pi k}{p}} b'\}_{k \in \{0,\dots,n-1\}} \subset \mathbb{S}^1$$

est donnée par la multiplication $x \to e^{\frac{2i\pi m}{p}} x$.

Action du π_1 sur la fibre



Exemple 3.– Soit $p : E \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ le revêtement à trois feuillets figuré ci-dessus. L'action de l'élément $a \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$ sur la fibre F_b est l'identité, l'action de b est une permutation cyclique d'ordre 3.

Action du π_1 sur la fibre

Exemple 4.– Soit $p : E \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ le revêtement à trois feuillets figuré ci-dessus. L'action des éléments a et b sur les trois éléments de la fibre correspond à deux transpositions différentes.

Action du π_1 sur la fibre

Théorème ("Orbit-Stabilizer Theorem").– *Soient E connexe par arcs, $p : E \to B$ un revêtement, $b \in B$ et $F_b = p^{-1}(b)$. Pour tout $x \in F_b$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_x : & \pi_1(B,b) & \longrightarrow & F_b \\ & [\gamma] & \longmapsto & \phi([\gamma],x) \end{array}$$

induit une bijection

$$\overline{\Phi}_x : \quad {}^{\pi_1(B,b)}\big\backslash_{p_*(\pi_1(E,x))} \longrightarrow F_b$$

Action du π_1 sur la fibre

Rappel et mise en garde.– La notation

$$p_*(\pi_1(E,x))\backslash^{\pi_1(B,b)}$$

signifie l'ensemble des classes d'équivalence à droite

$$\{p_*(\pi_1(E,x))\cdot[\gamma]\mid[\gamma]\in\pi_1(B,b)\}.$$

En général, $p_*(\pi_1(E,x))$ n'est pas distingué dans $\pi_1(B,b)$ et l'ensemble quotient n'est donc pas un groupe.

Définition.– On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est NORMAL (ou RÉGULIER, ou GALOISIEN) si E est connexe par arcs et s'il existe $b \in B$ et $x \in F_b$ tels que

$$p_*(\pi_1(E,x)) \triangleleft \pi_1(B,b).$$

Action du π_1 sur la fibre

• On montre que le choix du couple (b, x) où $b = p(x)$ n'importe pas dans cette définition. Si $p : E \to B$ est normal alors pour tout couple $(b', x') \in B \times E$ tel que $p(x') = b'$ on a

$$p_*(\pi_1(E, x')) \triangleleft \pi_1(B, b').$$

Action du π_1 sur la fibre

Formule des classes.– Soit H un sous-groupe (pas nécessairement normal) de G et soit $[G : H]$ l'indice de H dans G. Cet indice est défini comme le nombre de classes à gauche de H dans G. C'est aussi le nombre des classes à droite de H dans G. Le Orbit Stabilizer Theorem implique que

$$\text{Card } F_b = [\pi_1(B, b) : p_*(\pi_1(E, x))].$$

• Si Card $G < +\infty$, par théorème de Lagrange, nous savons que

$$[G : H] = \text{Card } G/\text{Card } H$$

ce qui combiné à l'Orbit Stabilizer Theorem donne

$$\text{Card } F_b = \text{Card } \pi_1(B, b)/\text{Card } p_*(\pi_1(E, x)).$$

dans le cas où Card $\pi_1(E, x)$ est fini. C'est la *formule des classes*.

Action du π_1 sur la fibre

Nomenclature.– On appelle STABILISATEUR DE x sous l'action de ϕ l'ensemble :

$$\mathrm{Stab}(x) := \{[\gamma] \in \pi_1(B, b) \mid \phi([\gamma], x) = x\}$$

Le stabilisateur $\mathrm{Stab}(x)$ est clairement un sous-groupe de $\pi_1(B, b)$.

• Le nom du théorème provient du fait que

$$\Phi_x^{-1}(x) = \mathrm{Stab}(x) \quad \text{et} \quad p_*(\pi_1(E, x)) = \mathrm{Stab}(x).$$

L'égalité à droite sera établie lors de la démonstration.

Action du π_1 sur la fibre

Exemple d'application.– Soient $\{\pm id\} \triangleleft O(n+1)$ et $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\{\pm id\}$. L'application quotient

$$p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$$

est un revêtement à deux feuillets (cf. TA7 sur les revêtements). Puisque $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe,

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^n, x)) = \{0\}$$

et d'après le théorème ci-dessus, le groupe $\pi_1(\mathbb{R}P^n, b)$ est à deux éléments. Ce ne peut être que $\mathbb{Z}_2$ (à isomorphisme près) :

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n, b) = \mathbb{Z}_2.$$

Action du π_1 sur la fibre

Démonstration.– Montrons que Φ_x est surjective. Pour cela on commence par constater que

$$x = \phi([c_b], x) = \Phi_x([c_b])$$

est dans l'image de Φ_x.

• Ensuite, on considère un autre point x' de F_b. Comme E est connexe par arcs, il existe un chemin u joignant x à x'. Sa projection $p \circ u$ est un lacet de B basé en b. Par construction

$$\Phi_x([p \circ u]) = \phi([p \circ u], x) = \beta(1) = x'.$$

Action du π_1 sur la fibre

• On a :

$$\Phi_x^{-1}(x) = \{[\gamma] \in \pi_1(B,b) \,|\, \phi([\gamma],x) = x\} = \mathrm{Stab}(x).$$

On va montrer que $\mathrm{Stab}(x) = p_*(\pi_1(E,x))$.

• Montrons d'abord que $\mathrm{Stab}(x) \subset p_*(\pi_1(E,x))$. En effet, si $\phi([\gamma],x) = x$ cela signifie que $\widetilde{\gamma}(1) = x$ et donc $\widetilde{\gamma}$ est un lacet de E basé en x. Ce lacet étant un relevé de γ, on a $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ ce qui implique $p_*([\widetilde{\gamma}]) = [\gamma]$. Ceci montre que $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,x))$.

Action du π_1 sur la fibre

• Montrons ensuite que $p_*(\pi_1(E,x)) \subset \mathrm{Stab}(x)$. Soit $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,x))$, cela signifie qu'il existe $\widetilde{\beta} \in \Omega(E,x)$ telle que $[\gamma] = [\beta]$ où $\beta := p \circ \widetilde{\beta}$. Puisque $\widetilde{\beta}$ est un lacet basé en x, on a $\widetilde{\beta}(1) = x$ c'est-à-dire

$$\phi([\beta], x) = x.$$

Puisque β et γ sont dans la même classe, on a aussi $\phi([\gamma], x) = x$ et donc $[\gamma] \in \mathrm{Stab}(x)$.

• On a donc montré que

$$\Phi_x^{-1}(x) = \mathrm{Stab}(x) = p_*(\pi_1(E,x)).$$

Action du π_1 sur la fibre

• Soit $x' \in F_b$, puisque E est connexe par arcs, il existe un chemin u joignant x à x'. Sa projection est un lacet $\gamma := p \circ u$ de B basé en b qui est tel que

$$\Phi_x([\gamma]) = \phi([\gamma], x) = x'.$$

On va montrer que

$$\Phi_x^{-1}(x') = p_*(\pi_1(E, x)) \cdot [\gamma].$$

• Soit $[\delta] \in \Phi_x^{-1}(x')$ c'est-à-dire tel que

$$\Phi_x([\delta]) = \phi([\delta], x) = x'.$$

Action du π_1 sur la fibre

- On a

$$\begin{aligned}
\phi([\delta], x) = \phi([\gamma], x) &\iff \phi([\gamma]^{-1}, \phi([\delta], x) = \phi([\gamma]^{-1}, \phi([\gamma], x)) \\
&\iff \phi([\delta] \cdot [\gamma]^{-1}, x) = \phi([\gamma] \cdot [\gamma]^{-1}, x) \\
&\iff \phi([\delta] \cdot [\gamma]^{-1}, x) = x \\
&\iff [\delta] \cdot [\gamma]^{-1} \in \mathrm{Stab}(x) \\
&\iff [\delta] \in \mathrm{Stab}(x) \cdot [\gamma]
\end{aligned}$$

- Puisque $\mathrm{Stab}(x) = p_*(\pi_1(E, x))$, on vient de montrer que

$$\Phi_x^{-1}(x') = p_*(\pi_1(E, x)) \cdot [\gamma].$$

Par conséquent, l'application induite

$$\overline{\Phi}_x : {}_{p_*(\pi_1(E,x))} \backslash^{\pi_1(B,b)} \longrightarrow F_b$$

est injective et surjective. C'est une bijection. $\square$

Action du π_1 sur la fibre

• La démonstration nous a donné un renseignement supplémentaire. Puisque

$$\phi([\delta], x) = \phi([\gamma], x) \quad \Longleftrightarrow \quad [\delta] \in \mathrm{Stab}(x) \cdot [\gamma]$$

et que $\mathrm{Stab}(x) = p_*(\pi_1(E, x))$, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire.– *Si E est simplement connexe alors l'action du $\pi_1(B, b)$ sur la fibre F_b est libre.*

Le cas simplement connexe

Théorème du π_1 du quotient d'un simplement connexe.– *Soit E un espace simplement connexe et localement compact. Soit G un groupe discret agissant continûment à droite (resp. à gauche), proprement discontinûment et librement sur E alors le groupe fondamental de E/G (resp. $G\backslash E$) est isomorphe à G.*

Illustrations et applications :

- $\pi_1(\mathbb{R}P^n, *) = \pi_1(\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2, *) \cong \mathbb{Z}_2$
- $\pi_1(\mathbb{T}^n, *) = \pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, *) \cong \mathbb{Z}^n$.
- $\pi_1(\mathbb{S}^3/Q_8, *) \cong Q_8$.
- $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, *) = \pi_1(Cay(F_2)/F_2, *) \cong F_2$.

Le cas simplement connexe

Démonstration.– Pour fixer les idées, on suppose l'action à droite. On a vu dans la leçon TA7 "Revêtements" que, sous les hypothèses du théorème, l'application quotient $p : E \to E/G$ est un revêtement. Soit $x \in E$ et $b = p(x)$. La fibre au dessus de $b \in E/G$ est l'ensemble des éléments de l'orbite de x

$$F_b = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

On a donc une application surjective

$$\psi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F_b \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

• Puisque G agit librement, cette application est injective, c'est donc une bijection.

Le cas simplement connexe

- On introduit l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon = \psi^{-1} \circ \Phi_x : & \pi_1(E/G, b) & \longrightarrow & G \\ & [\gamma] & \longmapsto & \psi^{-1}(\phi([\gamma], x)) \end{array}$$

Cette application associe à toute classe de lacet $[\gamma]$ l'unique élément $g \in G$ tel que $\widetilde{\gamma}(1) = g \cdot x$. On a donc

$$\widetilde{\gamma}(1) = \Upsilon([\gamma]) \cdot x.$$

- Comme E est simplement connexe, d'après le *Orbit-Stabilizer Theorem*, l'application Υ est bijective.

- Nous allons montrer que c'est un isomorphisme de groupes :

$$\forall [\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(E/G, b), \quad \Upsilon([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) = \Upsilon([\gamma_1]) \cdot \Upsilon([\gamma_2].$$

Le cas simplement connexe

• Soient $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ les relevés de γ_1 et γ_2 issus de x. Le point clé est de remarquer que

$$\widetilde{\gamma}_1 * (\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2)$$

est un relevé de $\gamma_1 * \gamma_2$.

• En effet, d'une part pour tout $t \in [0,1]$, les points $\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2(t)$ et $\widetilde{\gamma}_2(t)$ sont dans la même orbite. Ils ont par conséquent la même projection, qui est nécessairement le point $\gamma_2(t)$.

• Puisque $\widetilde{\gamma}_2(0) = x$ et $\widetilde{\gamma}_1(1) = \Upsilon([\gamma_1]) \cdot x$, on déduit

$$\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2(0) = \Upsilon([\gamma_1]) \cdot x = \widetilde{\gamma}_1(1).$$

Le cas simplement connexe

- Puisque $\widetilde{\gamma}_1 * (\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2)$ est un relevé de $\gamma_1 * \gamma_2$, $\Upsilon([\gamma_1 * \gamma_2])$ est l'unique $g \in G$ tel que

$$(\widetilde{\gamma}_1 * (\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2))(1) = g \cdot x$$

- Or par définition de la concaténation de chemins,

$$(\widetilde{\gamma}_1 * (\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2))(1) = \Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2(1)$$

- Puisque $\widetilde{\gamma}_2(1) = \Upsilon([\gamma_2]) \cdot x$, on a

$$\begin{aligned}(\widetilde{\gamma}_1 * (\Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2))(1) &= \Upsilon([\gamma_1]) \cdot \widetilde{\gamma}_2(1) \\ &= \Upsilon([\gamma_1]) \cdot \Upsilon([\gamma_2]) \cdot x\end{aligned}$$

- Ainsi

$$\Upsilon([\gamma_1 * \gamma_2] = \Upsilon([\gamma_1]) \cdot \Upsilon([\gamma_2])$$

$\square$

Exos

1) Soient S_3 le groupe des permutations de trois éléments. Pour tout couple d'éléments $(s_1, s_2) \in S_3 \times S_3$, construire un revêtement

$$p_{s_1,s_2} : E_{s_1,s_2} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$$

à trois feuillets tel que l'action de a soit donnée par s_1 et l'action de b par s_2.

2) Soient $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ non nécessairement connexe par arcs. On suppose qu'il existe un lacet $\gamma \in \Omega_b(B)$ tel que $x_1 := \phi([\gamma], x_0)$. Montrer que

$$p_*(\pi_1(E, x_1)) = [\gamma]^{-1} \cdot p_*(\pi_1(E, x_0)) \cdot [\gamma].$$

Exos

3) a) Soient E connexe par arcs, $p : E \to B$ un revêtement, $b \in B$ et x_0 et x_1 dans F_b. Montrer que Stab(x_0) et Stab(x_1) sont conjugués dans $\pi_1(B, b)$.
3b) En déduire que si $p : E \to B$ est normal alors Stab $(x_0) =$ Stab (x_1).
3c) Discuter l'hypothèse et la conclusion de cet exercice en regard de l'exercice 2.

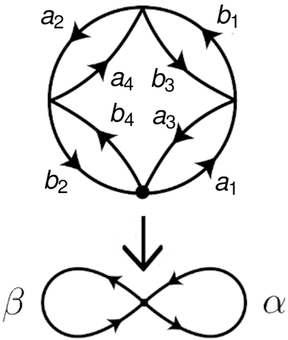
4) Soit f un morphisme de revêtements pointés

$$\begin{tikzcd} (E_1, x_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2, x_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B, b) & \end{tikzcd}$$

Montrer que pour tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ on a

$$\phi_2([\gamma], x_2) = f(\phi_1([\gamma], x_1)).$$

Exos

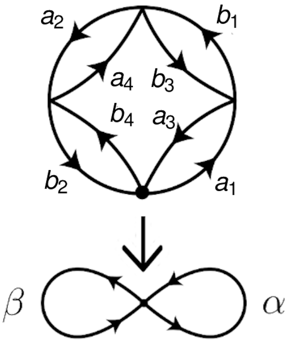


5) On considère le revêtement pointé

$$p : (E, x) \to (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, b)$$

illustré sur la figure ci-dessus et dont on admettra qu'il est normal.

Exos

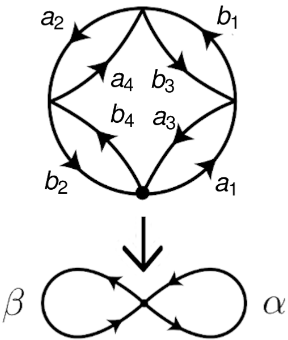


a) Déterminer le cardinal de la fibre F_b
b) Montrer que $\pi_1(E,x) \cong F_5$.
c) Soit

$$H := \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^2, (\beta\alpha)^2, \alpha\beta^2\alpha, \beta\alpha^2\beta \rangle$$

Montrer que $H \subset p_*(\pi_1(E,x))$.

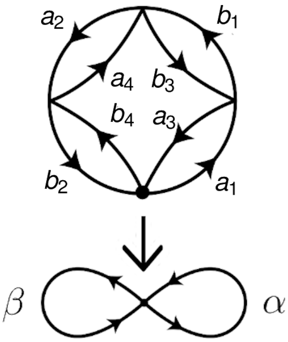
Exos



d) Montrer que $H \triangleleft \pi_1(B, b)$.
e) Montrer que $H \backslash \pi_1(B, b)$ a au plus quatre éléments.
f) Au moyen de l'*Orbit-Stabilizer Theorem* montrer que

$$p_*(\pi_1(E, x)) = H$$

Exos



g) Montrer que les générateurs de H ne sont pas indépendants.

h) Exprimer $\beta\alpha^2\beta$ en fonction de tout ou une partie des autres générateurs α^2, β^2,$(\alpha\beta)^2$, $(\beta\alpha)^2$ et $\alpha\beta^2\alpha$.