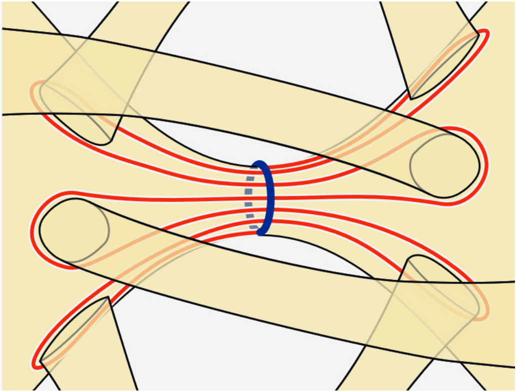
CM-TA3 : Le groupe fondamental

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Un lacet (en bleu) et un chemin (en rouge) sur une surface (Image : F. Lazarus)

La concaténation des chemins

Définition.– Soit X un espace topologique et $x_0, x_1 \in X$. On appelle CHEMIN JOIGNANT x_0 À x_1 tout application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que

$$\gamma(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \gamma(1) = x_1 .$$

On appelle LACET BASÉ EN x_0 tout chemin tel que

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 .$$

Notations.– On note

$$L(X, x_0, x_1) \quad \text{et} \quad \Omega(X, x_0)$$

l'espace des chemins joignant x_0 à x_1 et l'espace des lacets basés en x_0. Ces deux espaces sont des sous-espace de $C^0([0,1], X)$.

La concaténation des chemins

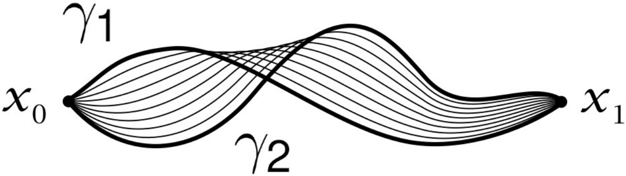


Image : Allen Hatcher

• Sur ces espaces, on note $\simeq_\partial$ la relation d'homotopie pointée, c'est-à-dire que $\gamma_1 \simeq_\partial \gamma_2$ signifie qu'il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que

$$\forall t \in [0,1], \quad H(0,t) = x_0 \quad \text{et} \quad H(1,t) = x_1$$

et bien sûr $H(s,0) = \gamma_1(s)$ et $H(s,1) = \gamma_2(s)$.

La concaténation des chemins

Définition.– Soient $\gamma_1 \in L(X, x_0, x_1)$ et $\gamma_2 \in L(X, x_1, x_2)$. La CONCATÉNATION de γ_1 et γ_2 est le chemin noté

$$\gamma_1 * \gamma_2 \in L(X, x_0, x_2)$$

défini par

$$\gamma_1 * \gamma_2(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Proposition 1.– *Soient* $\gamma_1, \delta_1 \in L(X, x_0, x_1)$ *et* $\gamma_2, \delta_2 \in L(X, x_1, x_2)$. *Alors*

$$(\gamma_1 \simeq_\partial \delta_1 \quad \textit{et} \quad \gamma_2 \simeq_\partial \delta_2) \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 * \gamma_2 \simeq_\partial \delta_1 * \delta_2.$$

La concaténation des chemins

Démonstration.– Soient H_1 (resp. H_2) l'homotopie entre γ_1 et γ_2 (resp. entre δ_1 et δ_2). L'application

$$H(s,t) := \begin{cases} H_1(2s,t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s-1,t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

définit une homotopie entre $\gamma_1 * \gamma_2$ et $\delta_1 * \delta_2$. □

Notations.– 1) On note $c_{x_0} \in \Omega(X, x_0)$ le lacet constant

$$\forall s \in [0,1], \qquad c_{x_0}(s) = x_0$$

2) Soit $\gamma \in L(X, x_0, x_1)$, on note $\bar{\gamma} \in L(X, x_1, x_0)$ le chemin défini par

$$\forall s \in [0,1], \qquad \bar{\gamma}(s) := \gamma(1-s)$$

La concaténation des chemins

Proposition 2.– *Soit* $\gamma \in L(X, x_0, x_1)$. *On a*

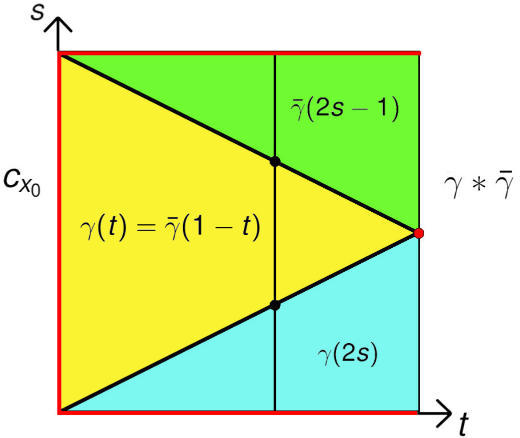
$$\gamma * \bar{\gamma} \simeq_\partial c_{x_0} \quad \textit{et} \quad \bar{\gamma} * \gamma \simeq_\partial c_{x_1}.$$

Démonstration.– L'application $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ définie par

$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \leq \frac{t}{2} \\ \gamma(t) = \bar{\gamma}(1-t) & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ \bar{\gamma}(2s-1) & \text{si } s \geq 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$$

est une homotopie joignant $H(\cdot, 0) = c_{x_0}$ à $H(\cdot, 1) = \gamma * \bar{\gamma}$. $\square$

La concaténation des chemins



Description visuelle de l'homotopie H. La couleur rouge souligne les points envoyés sur x_0. La verticale $t = 0$ correspond à c_{x_0} et la verticale $t = 1$ à la concatenation $\gamma * \bar{\gamma}$

La concaténation des chemins

Proposition 3.– *Soient* $\gamma_0 \in L(X, x_0, x_1)$, $\gamma_1 \in L(X, x_1, x_2)$ *et* $\gamma_2 \in L(X, x_2, x_3)$. *On a*

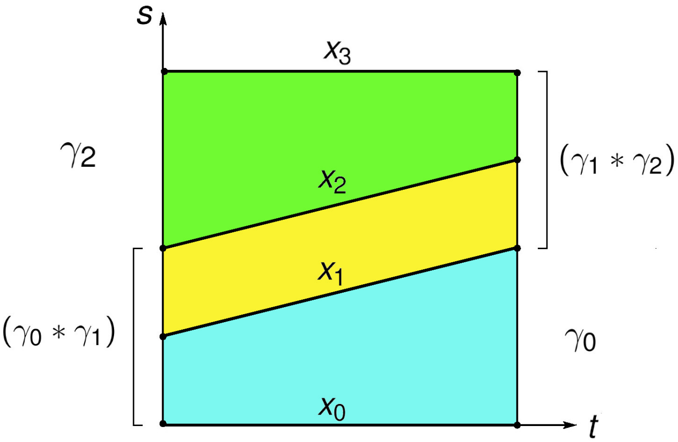
$$(\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2 \simeq_\partial \gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2).$$

Démonstration.– L'application $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ définie par

$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{4s}{1+t}\right) & \text{si } s \leq \frac{1}{4} + \frac{t}{4} \\ \gamma_1(4s - t - 1) & \text{si } \frac{1}{4} + \frac{t}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \\ \gamma_2\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \end{cases}$$

est une homotopie joignant $H(\cdot, 0) = (\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2$ à $H(\cdot, 1) = \gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2)$. □

La concaténation des chemins



Description visuelle de l'homotopie H. Sur la ligne $s = \frac{1}{4} + \frac{t}{4}$ l'homotopie prend la valeur x_1, sur la ligne $s = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}$ elle prend la valeur x_2. La verticale $t = 0$ correspond à $(\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2$ et la verticale $t = 1$ à $\gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2)$.

La concaténation des chemins

Proposition 4.– *Soient* $\gamma \in L(X, x_0, x_1)$, *on a*

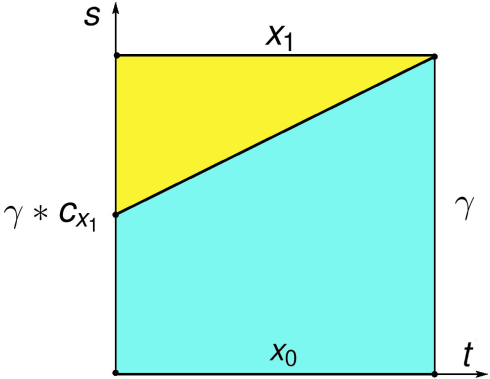
$$\gamma * c_{x_1} \simeq_\partial c_{x_0} * \gamma \simeq_\partial \gamma.$$

Démonstration.– L'application

$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } s \in [0, \frac{t+1}{2}] \\ x_1 & \text{si } s \in [\frac{t+1}{2}, 1] \end{cases}$$

définit une homotopie entre $\gamma * c_{x_1}$ et γ.

La concaténation des chemins



- D'après la proposition 2 :

$$c_{x_0} \simeq_\partial \gamma * \bar{\gamma} \quad \text{et} \quad c_{x_1} \simeq_\partial \bar{\gamma} * \gamma.$$

D'après la proposition 3:

$$\gamma * c_{x_1} \simeq_\partial \gamma * (\bar{\gamma} * \gamma) \simeq_\partial (\gamma * \bar{\gamma}) * \gamma \simeq_\partial c_{x_0} * \gamma.$$

Le groupe fondamental

• On note : $\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/ \simeq_\partial$ et on définit sur cet ensemble un produit " $\cdot$ " par

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2].$$

• La proposition 1 montre que ce produit est bien défini, il ne dépend pas des éléments choisis pour représenter chaque classe.

Théorème 1. – *L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni du produit $\cdot$ est un groupe (non commutatif en général).*

Démonstration.– La proposition 4 montre que l'élément neutre est la classe $[c_{x_0}]$ du chemin constant, la proposition que tout élément $[\gamma]$ a pour inverse $[\bar{\gamma}]$ et la proposition 3 l'associativité. $\square$

Le groupe fondamental

Définition.– Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le GROUPE FONDAMENTAL DE X.

• Notons que l'on ne dit pas : "le groupe fondamental de la paire (X, x_0)". Ceci est justifié par la proposition suivante.

Proposition 5.– *Soit $u : [0,1] \to X$ un chemin joignant $x_0 := u(0)$ à $x_1 := u(1)$. Alors, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \beta_u : & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [\bar{u} * \gamma * u] \end{array}$$

est isomorphisme de groupes.

Le groupe fondamental

Démonstration.– Remarquons d'abord que l'application est bien définie grâce aux propositions 1 et 3.

• L'application β_u est un morphisme, en effet

$$\begin{aligned}\beta_u([\gamma_1 * \gamma_2]) &= [\bar{u} * \gamma_1 * \gamma_2 * u] \\ &= [\bar{u} * \gamma_1 * u * \bar{u} * \gamma_2 * u] \\ &= \beta_u([\gamma_1]) \cdot \beta_u([\gamma_2]).\end{aligned}$$

• L'application β_u a pour inverse $\beta_{\bar{u}}$, en effet

$$\begin{aligned}\beta_{\bar{u}} \circ \beta_u([\gamma]) &= \beta_{\bar{u}}([\bar{u} * \gamma * u]) \\ &= [u * \bar{u} * \gamma * u * \bar{u}] \\ &= [\gamma]\end{aligned}$$

et similairement pour $\beta_u \circ \beta_{\bar{u}}$. $\square$

Le groupe fondamental

Définition.– On dit qu'un espace topologique X est CONNEXE PAR ARCS si tout couple de point $(x_1, x_2) \in X \times X$ peut être joint par un chemin X, autrement dit si $L(X, x_1, x_2)$ est non vide.

Corollaire 1.– *Soient X connexe par arcs et $x_0, x_1 \in X$. Alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes.*

Observation.– En général, cet isomorphisme n'est pas canonique car β_u dépend de la classe dans $L(X, x_0, x_1)$ du chemin u choisi pour joindre x_0 à x_1.

Définition.– Un espace topologique X est dit SIMPLEMENT CONNEXE s'il est connexe par arcs et s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$.

Le groupe fondamental

Remarque.– D'après le corollaire 1, si X est simplement connexe, alors pour tout point $x \in X$, on a $\pi_1(X, x) = \{[c_x]\}$.

Exemple 1.– L'espace $X = \{x_0\}$ est simplement connexe.

Exemple 2.– Tout espace contractile X est simplement connexe. L'homotopie joignant $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ à c_{x_0} est induite par l'homotopie joignant id_X à $i \circ r$ où $i : \{x_0\} \subset X$ et $r : X \to \{x_0\}$.

Le groupe fondamental

• Soient $f \in C^0(X, Y)$, $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$, on définit une application

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

en posant

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma].$$

Cette application est bien définie car si $\gamma \simeq_\partial \delta$ alors $f \circ \gamma \simeq_\partial f \circ \delta$.

Proposition 6.– *L'application f_* est un morphisme de groupes.*

Démonstration.– On a

$$f_*([\gamma] \cdot [\delta]) = f_*([\gamma * \delta]) = [f(\gamma * \delta)]$$
$$f_*([\gamma]) \cdot f_*([\delta]) = [f \circ \gamma] \cdot [f \circ \delta] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)]$$

Le groupe fondamental

• Montrons que $f(\gamma * \delta) = (f \circ \gamma) * (f \circ \delta)$. En effet, le lacet $\gamma * \delta$ est donnée par

$$(\gamma * \delta)(s) := \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donc

$$f(\gamma * \delta)(s) := \begin{cases} f(\gamma(2s)) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(\delta(2s-1)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Quant au lacet $(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)$ il est donnée par

$$(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)(s) := \begin{cases} (f \circ \gamma)(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (f \circ \delta)(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\square$

Le groupe fondamental

Proposition 7.– *On a*

- $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$
- *Soient* $f_1, f_2 \in C^0((X,x_0),(Y,y_0))$ *alors*

$$f_1 \simeq_\partial f_2 \quad \Longrightarrow \quad (f_1)_* = (f_2)_*$$

- *Soient* $f \in C^0((X,x_0),(Y,y_0))$, $g \in C^0((Y,y_0),(Z,z_0))$ *alors*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

En particulier, si f *est inversible alors* f_* *l'est et*

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

Démonstration.– En exercice. $\square$

Le groupe fondamental

Théorème 2.– *Soient X et Y connexes par arcs. Si X et Y ont même type d'homotopie alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$ sont isomorphes pour tout choix $(x_0, y_0) \in X \times Y$.*

• En particulier si X et Y sont homéomorphes (et c.p.a.) alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

Démonstration.– Puisque $X \simeq Y$, il existe $f \in C^0(X, Y)$ et $g \in C^0(Y, X)$ telles que $g \circ f \simeq id_X$ et $f \circ g \simeq id_Y$. Nous allons montrer que

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$$

et

$$f_* \circ g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, f(g(y_0)))$$

sont des isomorphismes. Ceci implique en effet que f_* et g_* sont des isomorphismes.

Le groupe fondamental

• Attention au fait que $g \circ f \simeq id_X$ n'implique pas $(g \circ f)_* = (id_X)_*$ par fonctorialité. En effet, le deuxième point de la proposition 7 ne s'applique qu'entre applications pointées.

• Or, en notant $x_1 = g(f(x_0))$, on a

$$g \circ f \in C^0((X, x_0), (X, x_1))$$

tandis que

$$id_X \in C^0((X, x_0), (X, x_0))$$

Donc, si $x_1 \neq x_0$, il ne peut exister d'homotopie pointée joignant $g \circ f$ à id_X.

• D'ailleurs, il est faux que : $g \circ f \simeq id_X \;\Rightarrow\; (g \circ f)_* = (id_X)_*$. On va voir qu'en réalité : $g_* \circ f_* = \beta_u$.

Le groupe fondamental

- Soit u le chemin joignant x_0 à $x_1 = g(f(x_0))$ défini par

$$u(t) = H(x_0, 1-t)$$

et où H est l'homotopie joignant $g \circ f$ à id_X. On va montrer que

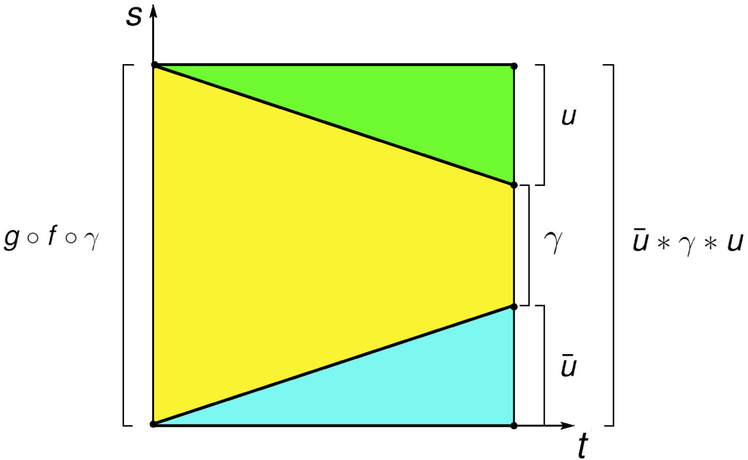
$$g_* \circ f_* = \beta_u$$

- Soit $\gamma \in \Omega(X, x_0)$. L'application F définie par

$$F(s,t) := \begin{cases} \bar{u}(3s) & \text{si } s \in [0, \frac{t}{3}] \\ H(\gamma(\frac{3s-t}{3-2t}), t) & \text{si } s \in [\frac{t}{3}, 1-\frac{t}{3}] \\ u(3s-2) & \text{si } s \in [1-\frac{t}{3}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie joignant $g \circ f \circ \gamma = H(\cdot, 0)$ à $\bar{u} * \gamma * u = H(\cdot, 1)$.

Le groupe fondamental



Description visuelle de l'homotopie H. Le long de la ligne $s = \frac{t}{3}$ l'homotopie prend la valeur $\bar{u}(t) = u(1-t) = H(x_0, t)$, le long de la ligne $s = 1 - \frac{t}{3}$ elle prend la valeur $u(1-t) = H(x_0, t)$. Elle vaut $g(f(x_0))$ sur les segments horizontaux $s = 0$ et $s = 1$.

Le groupe fondamental

• On en déduit $[g \circ f \circ \gamma] = [\bar{u} * \gamma * u]$ soit encore

$$(g_* \circ f_*)([\gamma]) = \beta_u([\gamma])$$

pour tout γ.

• D'après la proposition 5, l'application β_u est un isomorphisme de groupes. On en déduit que $g_* \circ f_*$ est un isomorphisme de groupes.

• On montre que $f_* \circ g_*$ est un isomorphisme de groupes par un raisonnement similaire. $\square$

Exos

1) On considère le morphisme β_u de la proposition 5. Montrer que

a) Si $u \simeq_\partial u'$ alors $\beta_u = \beta_{u'}$

b) $\beta_{c_{x_0}} = id$

c) $\beta_{u*v} = \beta_v \circ \beta_u$

d) On suppose $u \in \Omega(X, x_0)$. Quelle est la nature de β_u ?

2) Soit X un espace connexe par arcs. Montrer que X est simplement connexe ssi pour tout couple $(x_0, x_1) \in X \times X$ et tout couple de chemins (γ_1, γ_2) de $L(X, x_0, x_1)$ on a $\gamma_1 \simeq_\partial \gamma_2$.

Exos

3) Un *groupe topologique* est un groupe $(G, \star)$ muni d'une topologie pour laquelle les applications

$$G^2 \to G, (x, y) \mapsto x \star y \quad \text{et} \quad G \to G, x \mapsto x^{-1}$$

sont continues.
a) Donner des exemples de groupes topologiques.
b) On note $e \in G$ l'élément neutre. Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(G, e)$. Montrer que $\star$ définit une loi de composition $\bullet$ sur $\pi_1(G, e)$ par

$$[\gamma_1] \bullet [\gamma_2] := [\gamma_1 \star \gamma_2].$$

c) En remarquant que

$$\gamma_1 * \gamma_2 = (\gamma_1 * c_e) \star (c_e * \gamma_2)$$

montrer que le groupe $\pi_1(G, e)$ est abélien.
d) Montrer que $\bullet$ est la loi de groupe $\cdot$ de $\pi_1(G, e)$.

Exos

4) Montrer les assertions de la proposition 7 :

Proposition 7.– *On a*

a) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$

b) *Soient* $f_1, f_2 \in C^0((X,x_0),(Y,y_0))$ *alors*

$$f_1 \simeq_\partial f_2 \quad \Longrightarrow \quad (f_1)_* = (f_2)_*$$

c) *Soient* $f \in C^0((X,x_0),(Y,y_0))$, $g \in C^0((Y,y_0),(Z,z_0))$ *alors*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

En particulier, si f *est inversible alors* f_* *l'est et*

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

Exos

5) Soient $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques, et

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

défini par

$$p_*([\gamma]) := ((p_X)_*[\gamma], (p_Y)_*[\gamma])$$

Montrer que p_* est un isomorphisme de groupes.