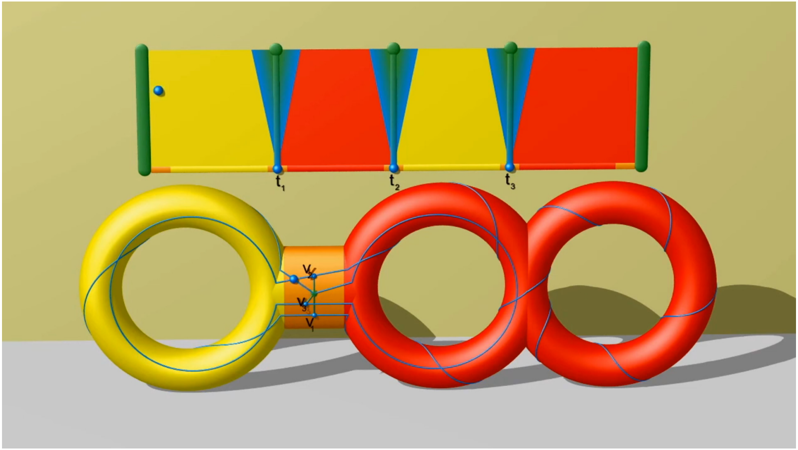
CM-TA5 : Le théorème de Van Kampen

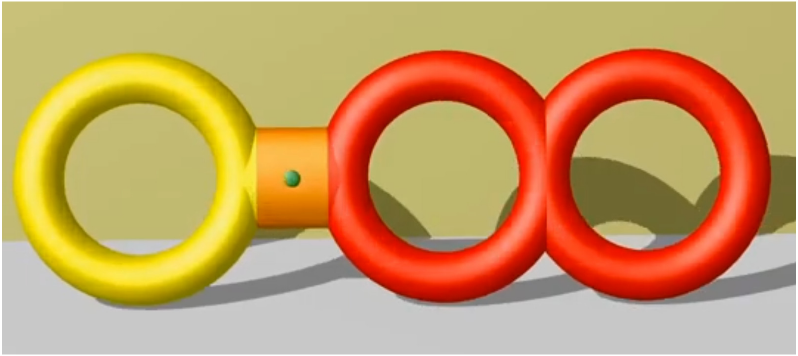
Vincent Borrelli

Université de Lyon



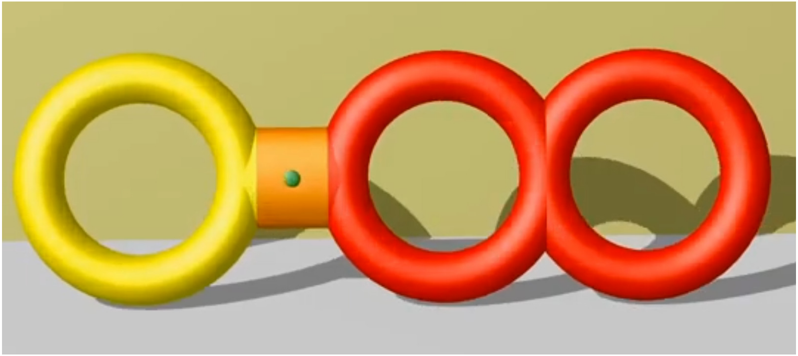
Un lacet visitant deux ouverts (jaune et rouge, intersection en orange). Image : site Analysis Situs.

Le théorème de Van Kampen



• Le but de ce théorème est de calculer le groupe fondamental d'un espace topologique X en le décomposant en morceaux plus petits et en calculant le groupe fondamental de ces morceaux.

Le théorème de Van Kampen



• Plus précisément, soit $X = U_1 \cup U_2$ un espace topologique recouvert par deux ouverts d'intersection non vide et soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Le but est de retrouver $\pi_1(X, x_0)$ à partir de $\pi_1(U_1, x_0)$, $\pi_1(U_2, x_0)$ et $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$.

Le théorème de Van Kampen

• Les inclusions $i_k : U_1 \cap U_2 \subset U_k$ et $j_k : U_k \subset X$, $k \in \{1,2\}$ induisent des morphismes entre les groupes fondamentaux :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Le théorème de Van Kampen

• On commence par se concentrer sur la partie droite du diagramme.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, dotted] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

La tentation est grande d'introduire le groupe produit

$$\pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0)$$

et de construire un morphisme de ce groupe dans $\pi_1(X, x_0)$ qui étende $(j_1)_*$ et $(j_2)_*$.

Le théorème de Van Kampen

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, dotted, "\phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Dans le diagramme, on a noté

$$\alpha_k : \pi_1(U_k, x_0) \to \pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0), \quad k \in \{1, 2\}$$

les inclusions dans le premier et le second facteur du produit et

$$\phi : \pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

un éventuel morphisme tel que $(j_1)_* = \phi \circ \alpha_1$ et $(j_2)_* = \phi \circ \alpha_2$.

Le théorème de Van Kampen

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, dotted] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

• Si un tel morphisme existe et qu'il est surjectif, alors on peut décrire $\pi_1(X, x_0)$ comme un quotient

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0)) / K$$

où K est le noyau de ce morphisme qu'il resterait à déterminer avec la partie gauche du diagramme.

Le théorème de Van Kampen

- Cette stratégie est la bonne mais le groupe produit

$$\pi_1(U_1, x_0) \times \pi_1(U_2, x_0)$$

est trop petit pour la réaliser, il faut le remplacer par un groupe beaucoup plus gros, *le produit libre* des deux groupes fondamentaux :

$$\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0).$$

Le théorème de Van Kampen

Le produit libre $G_1 * G_2$.– Notre approche nous confronte à une question de théorie des groupes. Étant donné le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ \Phi(G_1, G_2) \arrow[r, dotted] & H \\ G_2 \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

existe-t-il un groupe $\Phi(G_1, G_2)$ dans lequel G_1 et G_2 soient des sous-groupes et tel que, quels que soient les morphismes f_1 et f_2, ils se factorisent au travers d'un morphisme

$$\phi(f_1, f_2) : \Phi(G_1, G_2) \longrightarrow H \quad ?$$

Le théorème de Van Kampen

Réponse.– Un tel groupe existe et il est unique à isomorphisme près. On le définit ci-dessous.

• On considère l'ensemble $G_1 * G_2$ de tous les mots de longueur finie

$$g_1 \cdots g_m$$

où chaque lettre g_k est un élément de G_1 ou de G_2, différents de 1_{G_1} ou 1_{G_2}, et où deux lettres consécutives appartiennent à deux groupes différents. De tels mots sont dit RÉDUITS.

• Le mot vide $\emptyset$ appartient à $G_1 * G_2$ et correspond au cas $m = 0$.

Le théorème de Van Kampen

• On compose deux mots $g = g_1 \cdots g_m$ et $h = h_1 \cdots h_n$ par simple juxtaposition

$$g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n$$

puis réduction : si g_m et h_1 appartiennent au même groupe G_i, on remplace $g_m h_1$ par l'élément correspondant à $g_m \cdot h_1$ dans G_i. S'ils sont inverses l'un de l'autre, on retire les lettres $g_m h_1$. On répète cette procédure jusqu'à obtenir un mot réduit que l'on note gh.

Proposition (admise).– *La composition de deux mots définit une loi de groupe sur $G_1 * G_2$ dont l'élément neutre est le mot vide $\emptyset$.*

• Proposition admise car l'associativité est pénible à démontrer.

Le théorème de Van Kampen

Définition.– Le groupe $G_1 * G_2$ est nommé le PRODUIT LIBRE de G_1 et G_2.

• Il reste maintenant à définir le morphisme

$$\phi = \phi(f_1, f_2) : G_1 * G_2 \to H.$$

Pour tout mot $g_1 \cdots g_m \in G_1 * G_2$ on pose

$$\phi(g_1 \cdots g_m) := \phi(g_1) \cdots \phi(g_m)$$

avec $\phi(g_k) = f_1(g_k)$ si $g_k \in G_1$ et $\phi(g_k) = f_2(g_k)$ si $g_k \in G_2$.

• On vérifie facilement ϕ est un morphisme. De plus, si

$$\alpha_1 : G_1 \to G_1 * G_2 \quad \text{et} \quad \alpha_2 : G_2 \to G_1 * G_2$$

sont les inclusions naturelles alors $f_1 = \phi \circ \alpha_1$ et $f_2 = \phi \circ \alpha_2$.

Le théorème de Van Kampen

Exemples.–

- Si $G_1 = \{e\}$ alors G_2 et $G_1 * G_2$ sont isomorphes.
- Idem si $G_2 = \{e\}$ alors $G_1 \cong G_1 * G_2$.
- Si $G_1 = \mathbb{Z} =< s_1 >$ et $G_2 = \mathbb{Z} =< s_2 >$ alors

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} =< s_1, s_2 >$$

  est appelé le groupe libre à deux générateurs et noté F_2.

Définition.– Une PRÉSENTATION d'un groupe G est la donnée d'un ensemble de générateurs $S \subset G$ et un ensemble de relations R que ceux-ci vérifient. On note

$$G =< S|R >$$

Le théorème de Van Kampen

Exemples.–

- Le groupe libre $\mathbb{Z} := < 1|\emptyset > = < 1 >$
- Le groupe libre à n générateurs $F_n := < s_1, ..., s_n >$
- Le groupe cyclique $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = < s|s^n = 1 >$
- Le groupe diédral

$$D_{2n} = < s_1, s_2 | s_1^2 = 1, s_2^n = 1, (s_1 s_2)^2 = 1 >$$

- Le groupe projectif spécial linéaire

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = < s_1, s_2 | s_1^2 = 1, s_2^3 = 1 >$$

Le théorème de Van Kampen

Proposition (admise).– *Si* $G_1 =< S_1 | R_1 >$ *et* $G_2 =< S_2 | R_2 >$ *alors une présentation du produit libre de* G_1 *et* G_2 *est donnée par*

$$G_1 * G_2 =< S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 > .$$

Corollaire.– *On a*

- $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$
- *Plus généralement,* $F_n * F_m = F_{n+m}$
- $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2, \mathbb{Z})$

Le théorème de Van Kampen

- Reconsidérons désormais le diagramme dans sa totalité :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

- On constate qu'il n'y a pas de flèche directe entre

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \quad \text{et} \quad \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

mais deux flèches indirectes

$$\beta_1 := \alpha_1 \circ (i_1)_* \quad \text{et} \quad \beta_2 := \alpha_2 \circ (i_2)_*$$

et bien entendu $\beta_1 \neq \beta_2$ en général.

Le théorème de Van Kampen

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

- Sur le diagramme, on lit

$$(j_1)_* \circ (i_1)_* = \phi \circ \beta_1 \quad \text{et} \quad (j_2)_* \circ (i_2)_* = \phi \circ \beta_2$$

et comme $(j_1)_* \circ (i_1)_* = (j_2)_* \circ (i_2)_*$ ceci implique

$$\phi \circ \beta_1 = \phi \circ \beta_2.$$

Le théorème de Van Kampen

$$
\begin{tikzcd}
 & & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[drr, "(j_1)_*"] & & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[urr, "(i_1)_*"] \arrow[rr, shift left, "\beta_1"] \arrow[rr, shift right, "\beta_2"'] \arrow[drr, "(i_2)_*"'] & & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[rr, "\phi"] & & \pi_1(X, x_0) \\
 & & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[urr, "(j_2)_*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

• Soit $[\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. On note $b_1 = \beta_1([\gamma])$ et $b_2 = \beta_2([\gamma])$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\phi \circ \beta_1 = \phi \circ \beta_2 \quad &\Longrightarrow \quad \phi(b_1) = \phi(b_2) \\
&\Longrightarrow \quad \phi(b_1)\phi(b_2^{-1}) = \phi(b_2)\phi(b_2^{-1})
\end{aligned}
$$

Or $\phi(b_2)\phi(b_2^{-1}) = \phi(b_2 b_2^{-1}) = [c_{x_0}]$, on déduit

$$\phi(b_1)\phi(b_2^{-1}) = [c_{x_0}].$$

Le théorème de Van Kampen

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"'] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Puisque

$$\phi(b_1)\phi(b_2^{-1}) = [c_{x_0}] \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(b_1 b_2^{-1}) = [c_{x_0}]$$

on vient de montrer que

$$\forall [\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0), \quad \phi\left(\beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1}\right) = [c_{x_0}]$$

Le théorème de Van Kampen

Définition (rappel).– Soit $R \subset G$ un sous-ensemble, le SOUS-GROUPE NORMAL ENGENDRÉ PAR R, ou CLÔTURE NORMALE DE R, est l'intersection de tous les sous-groupes normaux de G contenant R. Il est noté $\langle R^G \rangle$ ou $N(R)$.

• On montre que la clôture normale est le sous-groupe engendré par les conjugués R^G des éléments de R :

$$N(R) = < R^G > \quad \text{où} \quad R^G = \{grg^{-1} \mid r \in R, g \in G\}$$

Attention au fait que $N(R) \neq < R >$ en général.

• Écrire $G = < S | R >$ signifie que $G = F_S / N(R)$ où F_S est le groupe libre ayant les éléments de S comme générateurs et R est la partie de G formée des éléments figurant à gauche des égalités exprimant les relations.

Le théorème de Van Kampen

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(U_2, x_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

• Soit $K = N(R)$ le sous-groupe normal de $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ engendré par les mots

$$R = \{ \quad \beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1} \quad | \quad [\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \quad \}$$

On vient de constater que $K \subset \ker \phi$.

Le théorème de Van Kampen

Théorème de Van Kampen (1933).– *Si U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont des ouverts connexes par arcs, si $x_0 \in U_1 \cap U_2$ et $X = U_1 \cup U_2$ alors le morphisme*

$$\phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

est surjectif et son noyau est le sous-groupe normal $K = N(R)$ engendré par

$$R = \{\beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)\}.$$

Définition.– On note

$$\pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \pi_1(U_2, x_0)$$

ce quotient et on le nomme la SOMME AMALGAMÉE de $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ au dessus de $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$.

Applications

• Commençons par explorer les applications de ce théorème, on s'intéressera à la démonstration dans la dernière partie du cours.

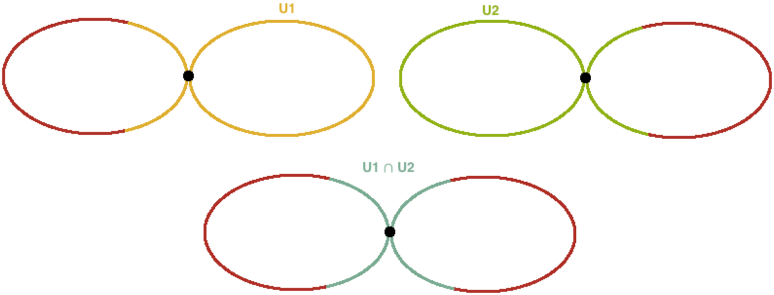
Corollaire 1.–*La sphère $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, est simplement connexe.*

Démonstration.– Soient $U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Notons que U_1 et U_2 sont connexes par arcs ainsi que $U_1 \cap U_2 \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ si $n \geq 2$. Le théorème de Van Kampen s'applique et donc

$$\phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$$

est surjectif. Puisque $U_1 \simeq \{x_0\}$ et $U_2 \simeq \{x_0\}$ on en déduit que $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ est trivial. $\square$

Applications



Images : Mathonline

Corollaire 2.– *Le groupe fondamental du bouquet de deux cercles* $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ *est le groupe libre* F_2 *engendré par un générateur de chaque cercle.*

Démonstration.– Soit x_0 le point commun des deux cercles et U_1 et U_2 les ouverts figurés ci-dessus. Notons que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont connexes par arcs.

Applications

• Donc le théorème de Van Kampen s'applique. Puisque $U_1 \cap U_2$ est un bouquet de quatre segments, il a le type d'homotopie du point. Ainsi

$$\phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0)$$

est un isomorphisme. Notons que U_1 et U_2 se rétractent par déformation sur un cercle. Soit a et b un générateur de chaque cercle, on a

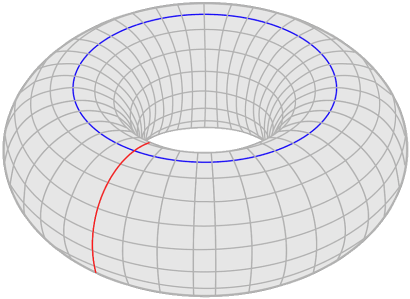
$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \mathbb{Z} = < a > \quad \text{et} \quad \pi_1(U_2, x_0) \cong \mathbb{Z} = < b >$$

et donc

$$\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \cong < a > * < b > = F_2.$$

$\square$

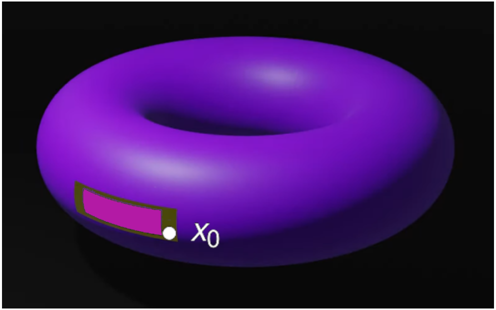
Applications



Corollaire 3.– *Le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est $\mathbb{Z} < a > \times \mathbb{Z} < b >$ où a et b sont les générateurs des groupes fondamentaux de $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ et de $\{1\} \times \mathbb{S}^1$.*

Remarque.– Nous avons déjà déterminé ce groupe en TA4. Le but ici est d'utiliser le théorème de Van Kampen pour retrouver ce résultat.

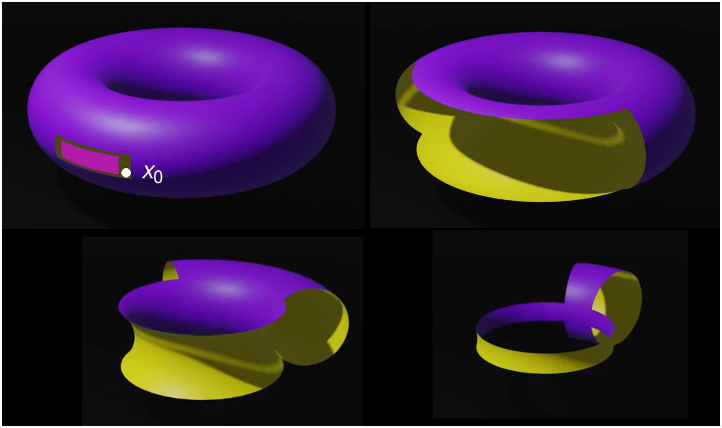
Applications



Images : Visual Topology & Geometry

Les grandes lignes de la démonstration.– Soient U_1, U_2 les ouverts figurées ci-dessus (U_1 est l'ensemble des points bleus ou bruns, U_2 ceux qui sont soit rose soit bruns). Soit $x_0 \in U_1 \cap U_1$ (zone brune). Notons que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont connexes par arcs. Le théorème de Van Kampen s'applique donc.

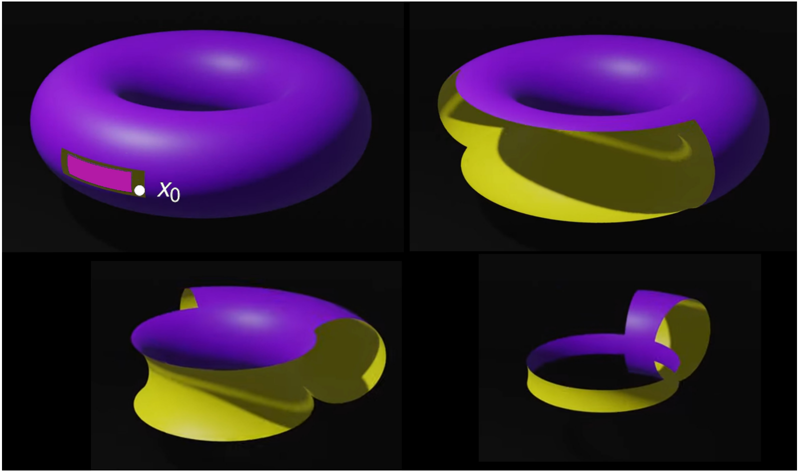
Applications



Images : Visual Topology & Geometry

• Le premier point clé est de remarquer que $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ est un rétract par déformation de U_1. Le groupe fondamental est donc $\pi_1(U_1, x_0) = < a, b >$.

Applications



• La rétraction par déformation représentée ici ne respecte pas le point base x_0 mais on peut facilement imaginer une, en effectuant mentalement une rotation.

Applications

• Le point est un rétract par déformation de U_2, le groupe fondamental de U_2 est donc trivial.

• Le cercle est un rétract par déformation de $U_1 \cap U_2$ par conséquent $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \mathbb{Z}$. Notons c un générateur. Un représentant est le lacet γ_c basé en x_0 et faisant le tour de la zone brune.

• Le second point clé est de comprendre le morphisme

$$\begin{array}{cccc} (i_1)* : & \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & < c > & & < a, b > \end{array}$$

Ici, il faut se convaincre que la rétraction par déformation réalise une homotopie joignant le lacet γ_c à la composée $\gamma_a * \gamma_b * \bar{\gamma}_a * \bar{\gamma}_b$ (quitte à permuter le nom des générateurs et/ou à prendre leurs inverses).

Applications

• Ceci signifie que $(i_1)_*(c) = [a, b]$ où $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ est le commutateur de a et de b. Ainsi

$$(i_1)_*(\mathbb{Z}) =< [a, b] > \subset F_2 =< a, b > .$$

• Dans notre situation, le théorème de Van Kampen affirme que le groupe fondamental $\pi(\mathbb{T}^2, x_0)$ est isomorphe à

$$F_2/N(< [a, b] >)$$

où $N(< [a, b] >)$ est la clôture normale de $< [a, b] >$.

• Autrement dit, nous avons montré que le groupe fondamental de $\mathbb{T}^2$ admet la présentation

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) =< a, b \,|\, [a, b] = 1 > \quad \Longrightarrow \quad \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}^2.$$

$\square$

Démonstration du théorème de Van Kampen

• Pour la démonstration du théorème de Van Kampen, nous allons avoir besoin du LEMME DE LEBESGUE.

Lemme de Lebesgue. *Soit* (X, d) *un espace métrique compact et* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *un recouvrement de* X *par des ouverts. Alors, il existe un nombre* $\delta > 0$, *appelé* NOMBRE DE LEBESGUE, *tel que pour tout* $Y \subset X$, *si le diamètre de* Y *est plus petit que* δ *alors* Y *est inclus dans l'un des* U_α.

Démonstration du lemme de Lebesgue.– Puisque $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement, pour tout $x \in X$, il existe U_α tel que $x \in U_\alpha$.

Démonstration du théorème de Van Kampen

• Puisque U_α est ouvert, il existe une boule $B(x, r)$ centrée en x et de rayon $r = 2\epsilon(x)$ incluse dans U_α.

• Les boules $(B(x, \epsilon(x))_{x \in X}$ de rayon moitié forment un recouvrement de X.

• Puisque X est compact, il existe $x_1, ..., x_n$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon(x_i)).$$

On pose $\delta := \min\{\epsilon(x_i) \mid i = 1, ..., n\}$.

Démonstration du théorème de Van Kampen

- Soient $Y \subset X$ tel que diam $(Y) \leq \delta$ et $y_0 \in Y$. Puisque les $\{B(x_i, \epsilon(x_i))\}_{i \in \{1,\ldots\}}$ forment un recouvrement de X, il existe un indice i tel que $y_0 \in B(x_i, \epsilon(x_i))$ et donc tel que

$$d(y_0, x_i) \leq \epsilon(x_i).$$

- Soit $y \in Y$. Puisque diam $(Y) \leq \delta$, on a

$$d(y, y_0) \leq \text{diam }(Y) \leq \delta \leq \epsilon(x_i).$$

- Par l'inégalité triangulaire

$$d(y, x_i) \leq d(y, y_0) + d(y_0, x_i) \leq 2\epsilon(x_i)$$

et donc $y \in B(x_i, 2\epsilon(x_i)) \subset U_\alpha$ pour tout $y \in Y$, i. e. $Y \subset U_\alpha$ $\square$

Démonstration du théorème de Van Kampen

Démonstration du théorème de Van Kampen.– Il nous faut montrer que

$$\phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

est un morphisme surjectif puis déterminer son noyau.

• Le fait que ϕ soit un morphisme découle de la définition de la somme amalgamée.

• Montrons que ϕ est surjectif. Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Les préimages

$$\{\gamma^{-1}(U_1), \gamma^{-1}(U_2)\}$$

constituent un recouvrement de $[0, 1]$ par deux ouverts (non nécessairement connexes).

Démonstration du théorème de Van Kampen

• Par le lemme de Lebesgue, il existe une subdivision

$$[0,1] = I_1 \cup \cdots \cup I_N \quad \text{avec} \quad I_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$$

telle que pour tout $k \in \{1, ..., N\}$:

$$\gamma(I_k) \subset U_1 \quad \text{ou} \quad \gamma(I_k) \subset U_2.$$

• Pour tout $k \in \{1, ..., N\}$ notons $i(k) \in \{1,2\}$ l'indice tel que $\gamma(I_k) \subset U_{i(k)}$ et notons également γ_k la restriction de γ à I_k que l'on reparamétrise pour obtenir un chemin

$$\gamma_k : [0,1] \to U_{i(k)}$$

d'extrémité $x_{k-1} := \gamma_k(0)$ et $x_k := \gamma_k(1)$.

Démonstration du théorème de Van Kampen

- Remarquons que nécessairement

$$x_{k-1} \in U_1 \cap U_2 \quad \text{et} \quad x_k \in U_1 \cap U_2.$$

- Puisque $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$ il existe un chemin δ_k dans $U_1 \cap U_2$ qui joint x_0 à x_k. Ainsi

$$\hat{\gamma}_k := \delta_{k-1} * \gamma_k * \bar{\delta}_k$$

est un lacet de $U_{i(k)}$ basé en x_0.

- Par conséquent, le lacet γ se décompose en N lacets

$$\gamma = \hat{\gamma}_1 * \cdots * \hat{\gamma}_N$$

tous basés en x_0 et dont l'image est soit dans U_1 soit dans U_2.

Démonstration du théorème de Van Kampen

• Le mot

$$[\hat{\gamma}_1] \cdots [\hat{\gamma}_N]$$

composé d'éléments de $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ est un candidat pour être envoyé par ϕ sur le lacet $[\gamma]$.

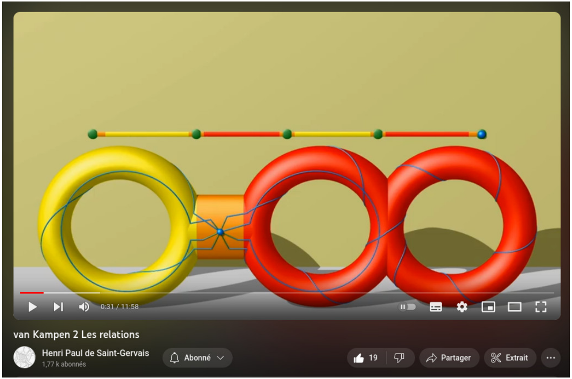
• Si ce mot est réduit alors

$$[\hat{\gamma}_1] \cdots [\hat{\gamma}_N] \in \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

et son image par ϕ est $[\gamma]$ par construction.

• Si le mot n'est pas réduit, on obtient une forme réduite en effectuant des concaténations des lacets $\hat{\gamma}_k$. Une fois réduit, le mot obtenu est un élément de $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ qui, par construction, est envoyé par ϕ sur $[\gamma]$.

Démonstration du théorème de Van Kampen



• Il reste maintenant à déterminer le noyau de ϕ. C'est de loin la partie la plus difficile de la démonstration. Nous allons nous appuyer sur une **excellente vidéo** du site - non moins excellent - *Analysis situs*.

Démonstration du théorème de Van Kampen

• Il nous faut montrer que le noyau de ϕ est le sous-groupe normal $K = N(R)$ engendré par

$$R = \{\beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)\}.$$

• Puisque l'on a déjà $K \subset \ker \phi$, il faut montrer $\ker \phi \subset K$, autrement dit que si

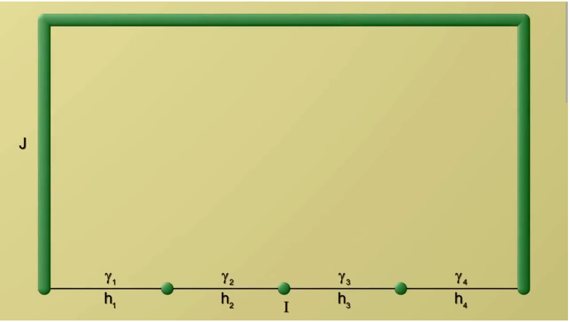
$$\phi(h_1 \cdots h_m) = [c_{x_0}]$$

avec $h_k = [\gamma_k]$ et $\gamma_k \in \pi_1(U_i, x_0)$, $i = 1$ ou 2, alors le mot $h_1 \cdots h_m$ s'écrit comme un mot de K, ou autrement dit, que les relations

$$\beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1} = \emptyset \text{ où } [\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$$

suffisent à simplifier $h_1 \cdots h_m$ en le mot vide.

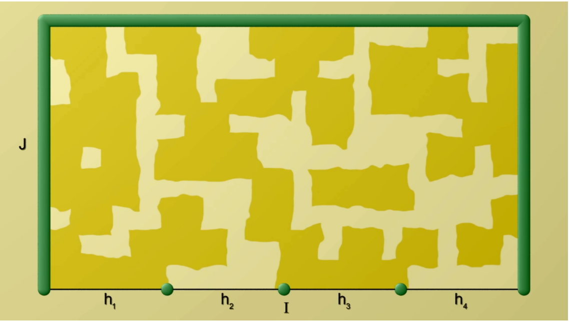
Démonstration du théorème de Van Kampen



Le domaine $I \times J = [0,1] \times [0,1]$ de l'homotopie H. Ici $m = 4$ et les échelles entre l'horizontale et la verticale ne sont pas les mêmes. Le vert recouvre des points qui sont envoyés sur x_0 par H.

- Supposons que $\phi(h_1 \cdots h_m) = [c_{x_0}]$ alors il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ joignant $\gamma_1 * \cdots * \gamma_m$ à c_{x_0}.

Démonstration du théorème de Van Kampen

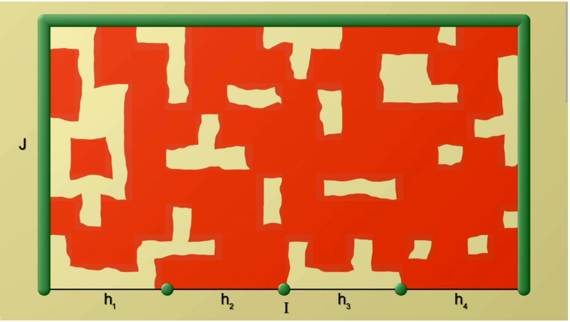


L'ouvert V_1 est représenté couleur moutarde

• On considère le recouvrement $\{V_1, V_2\}$ de $[0,1]^2$ par les ouverts

$$V_1 := H^{-1}(U_1) \quad \text{et} \quad V_2 := H^{-1}(U_2).$$

Démonstration du théorème de Van Kampen

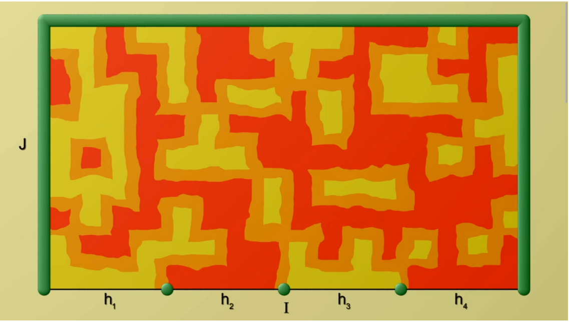


L'ouvert V_2 est représenté en rouge

• On considère le recouvrement $\{V_1, V_2\}$ de $[0,1]^2$ par les ouverts

$$V_1 := H^{-1}(U_1) \quad \text{et} \quad V_2 := H^{-1}(U_2).$$

Démonstration du théorème de Van Kampen

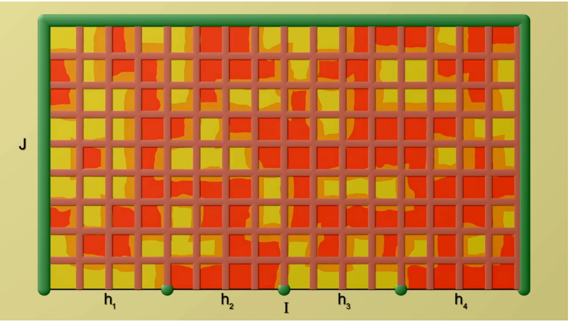


L'ouvert $V_1 \cap V_2$ est représenté en orange.

• On considère le recouvrement $\{V_1, V_2\}$ de $[0,1]^2$ par les ouverts

$$V_1 := H^{-1}(U_1) \quad \text{et} \quad V_2 := H^{-1}(U_2).$$

Démonstration du théorème de Van Kampen

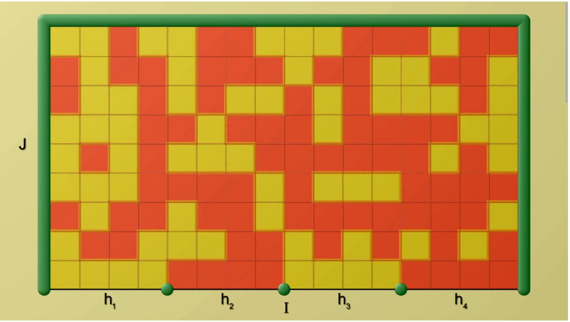


Dans chaque carré de la subdivision, les points sont envoyés par H dans le même ouvert, soit U_1, soit U_2.

- On considère une subdivision

$$[0,1]^2 = \bigcup_{k,\ell=0}^{N} I_k \times J_\ell \quad \text{avec} \quad I_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}], J_\ell := [\frac{\ell-1}{N}, \frac{\ell}{N}]$$

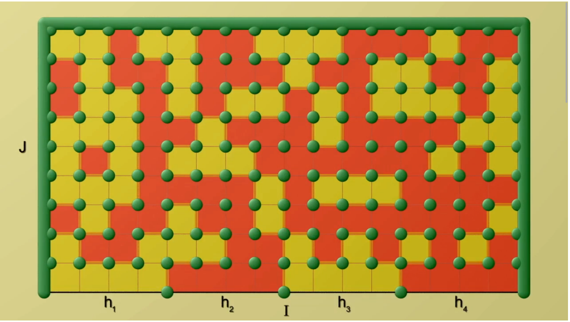
Démonstration du théorème de Van Kampen



On colorie chaque carré selon que l'image est dans U_1 (moutarde) ou dans U_2 (rouge). Si deux couleurs peuvent convenir on choisit arbitrairement l'une d'elles.

• Le lemme de Lebesgue garantit que si N est suffisamment grand, alors chaque carré $I_k \times I_\ell$ est envoyé par H soit dans U_1, soit dans U_2.

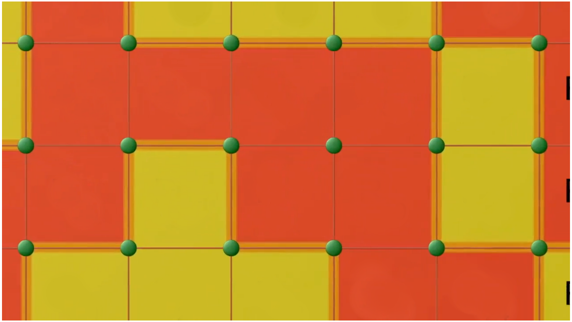
Démonstration du théorème de Van Kampen



Après déformation locale de l'homotopie, les points aux sommets des carrés apparaissent en vert (sauf ceux de l'horizontale la plus basse).

- Par de petites déformations locales, on peut supposer que l'homotopie prend la valeur x_0 sur tous les sommets des carrés exceptés ceux situés sur l'horizontale la plus basse.

Démonstration du théorème de Van Kampen



La coloration orange indique les transitions entre deux zones.

- Précisément, on associe à chaque sommet le lacet

$$\sigma_{k,\ell}(s) := p_{k,\ell} + r_{k,\ell} e^{2i\pi s}$$

de base $q_{k,\ell} := \sigma_{k,\ell}(0) \in [0,1]^2$.

Démonstration du théorème de Van Kampen

• Le rayon $r_{k,\ell}$ est choisi suffisamment petit pour que $\omega_{k,l} := H \circ \sigma_{k,\ell}$ soit homotope à $x_{k,\ell} := H(q_{k,\ell})$ dans le bon ouvert $U \in \{U_1, U_2, U_1 \cap U_2\}$.

• Soit $\delta_{k,\ell}$ un chemin joignant $x_{k,\ell}$ à x_0 dans U. Le chemin

$$\hat{\omega}_{k,\ell} := \delta_{k,\ell} * \omega_{k,l} * \bar{\delta}_{k,\ell}$$

est un lacet de U basé en x_0 et homotope à c_{x_0}. Soit G_1 une homotopie joignant c_{x_0} à $\hat{\omega}_{k,\ell}$.

• Observons que $\omega\hat{_{k,l}}$ et $\omega_{k,\ell}$ sont librement homotopes. Soit G_2 une homotopie (libre) joignant $\hat{\omega}_{k,l}$ à $\omega_{k,\ell}$.

Démonstration du théorème de Van Kampen

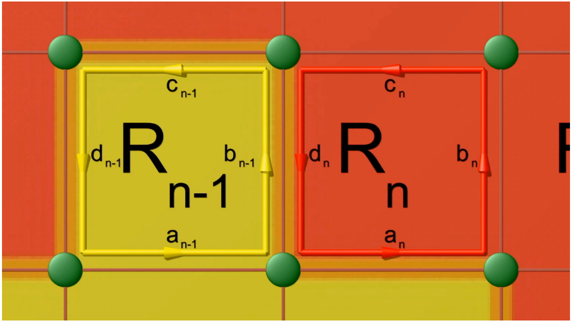
• L'homotopie H est modifiée en $\widetilde{H}$ sur chaque disque $D(p_{k,\ell}, r_{k,\ell})$ de la façon suivante

$$\widetilde{H}(\rho,\theta) = \begin{cases} G_1(2\rho,\theta) & \text{si } \rho \leq \frac{1}{2} \\ G_2(2\rho-1,\theta) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

où l'on a écrit (ρ, θ) pour signifier le point $p_{k,\ell} + \rho e^{2i\pi\theta}$.

• Les modifications étant locales, l'application $\widetilde{H}$ reste une homotopie joignant $\gamma_1 * \cdots * \gamma_m$ à c_{x_0}.

Démonstration du théorème de Van Kampen

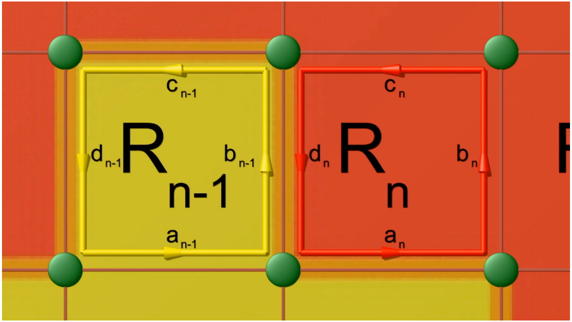


- Pour éviter les doubles indices, on pose

$$n = N(\ell - 1) + k \quad \text{avec} \quad k, \ell \in \{1, ..., N\}$$

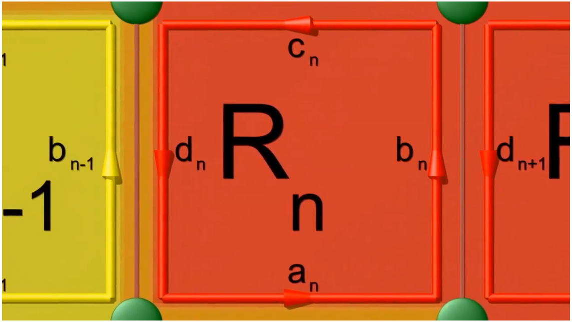
et on note les arêtes comme indiqué sur la figure.

Démonstration du théorème de Van Kampen



- L'image par $\widetilde{H}$ de chaque arête est un lacet de U où et U_1, U_2 ou $U_1 \cap U_2$ selon les couleurs.

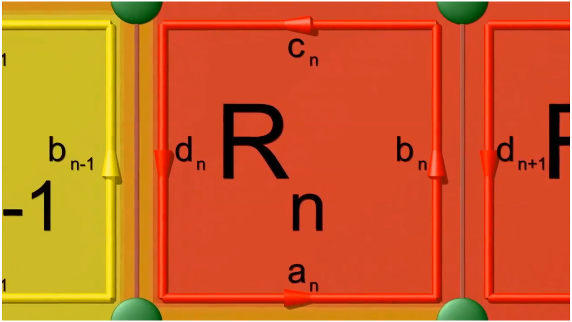
Démonstration du théorème de Van Kampen



- Il y a trois observations cruciales à faire ici :

Observation 1.– Si deux arêtes adjacentes ont la même couleur, par exemple b_n et d_{n+1}, alors les mots $b_n d_{n+1}$ et $d_{n+1} b_n$ peuvent être simplifiés en le mot vide puisque dans le $\pi_1(U_2, x_0)$ ces lacets sont inverses l'un de l'autre.

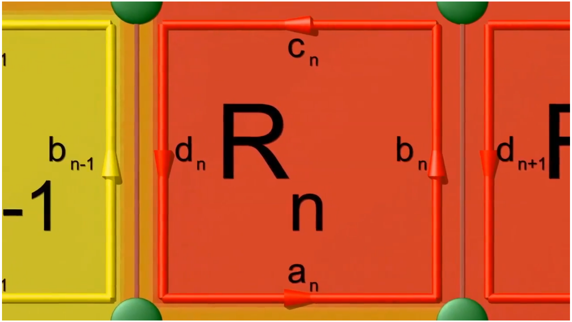
Démonstration du théorème de Van Kampen



- Il y a trois observations cruciales à faire ici :

Observation 2.– Si deux arêtes adjacentes n'ont pas la même couleur, par exemple b_{n-1} et d_n, alors dans le produit libre $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$, les mots $b_{n-1}d_n$ et d_nb_{n-1} ne peuvent pas être simplifiés car chaque lettre appartient à un groupe différent.

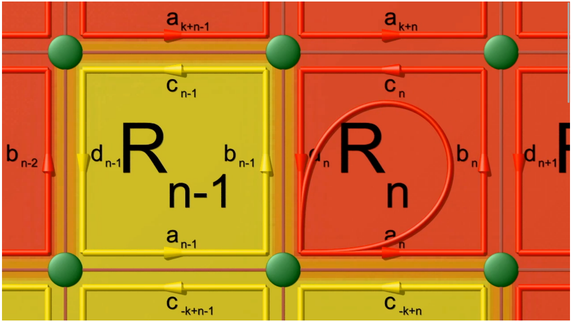
Démonstration du théorème de Van Kampen



- Il y a trois observations cruciales à faire ici :

Observation 2.– En revanche, comme les arêtes appartiennent à la zone orange, les mots $b_{n-1}d_n$ et d_nb_{n-1} sont des éléments du groupe $K = N(R)$.

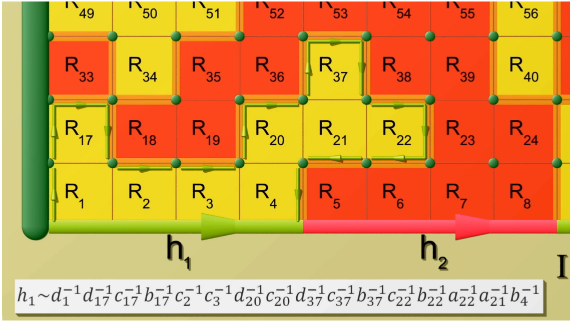
Démonstration du théorème de Van Kampen



- Il y a trois observations cruciales à faire ici :

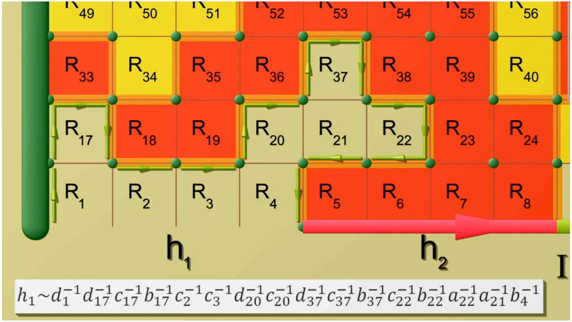
Observation 3.– Au sein d'un même carré, le mot $a_n b_n c_n d_n$ est vide puisque le lacet correspondant est évidemment homotope dans U_2 au lacet constant. On pourra donc, par exemple, remplacer $a_n b_n$ par $d_n^{-1} c_n^{-1}$.

Démonstration du théorème de Van Kampen



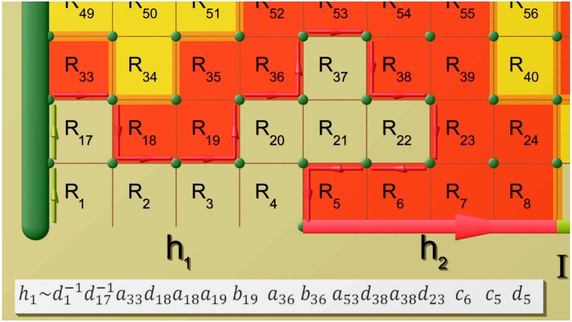
- La démonstration se réduit alors à transformer la ligne horizontale la plus basse, vue comme le mot $h_1 \cdots h_m$, en des lignes brisées successives jusqu'à atteindre la ligne brisée verte complétant le bord du domaine $[0, 1]^2$.

Démonstration du théorème de Van Kampen



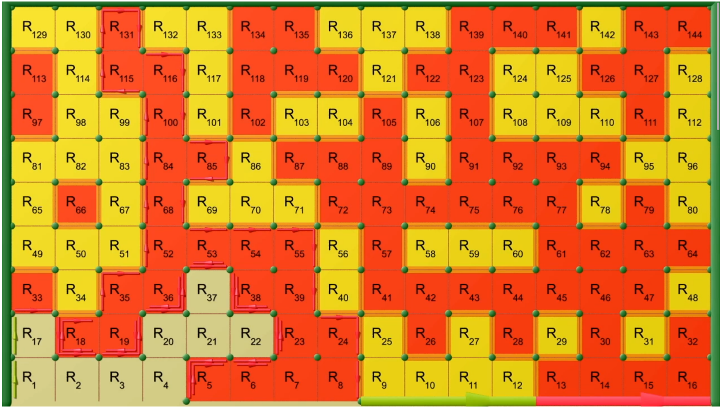
- Par exemple, grâce à l'observations 3, on peut affirmer que le mot h_1 est le même que le mot écrit sur la figure ci-dessus et qui représente la fine ligne brisée verte.

Démonstration du théorème de Van Kampen



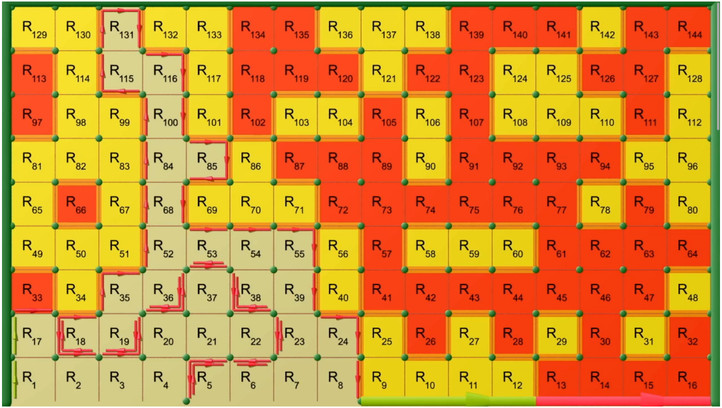
• Pour continuer, il faut franchir la frontière orange, ce que l'on fait grâce à l'observation 2. Le mot h_1 a désormais l'expression qui apparaît sur la figure et il est représenté par la fine ligne brisée rouge.

Démonstration du théorème de Van Kampen



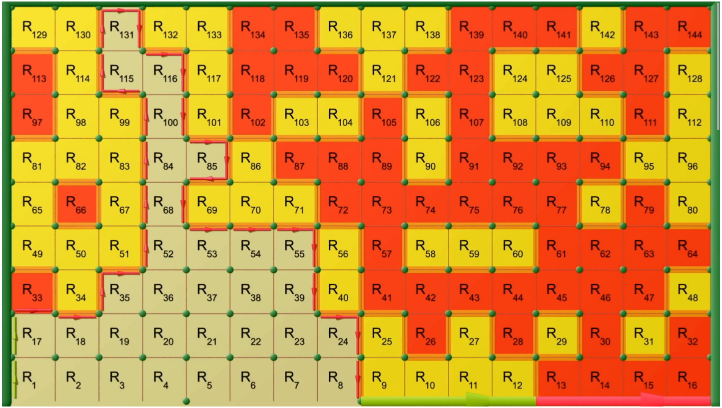
- On s’occupe ensuite de la grande zone rouge adjacente (observation 3).

Démonstration du théorème de Van Kampen



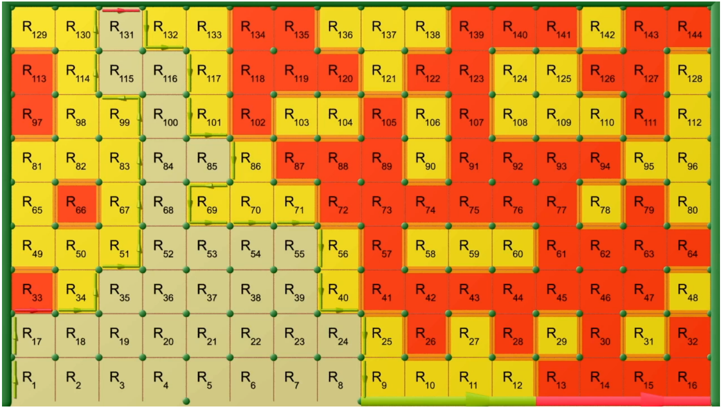
- On utilise l'observation 3 pour exprimer h_2 en une grande ligne brisée.

Démonstration du théorème de Van Kampen



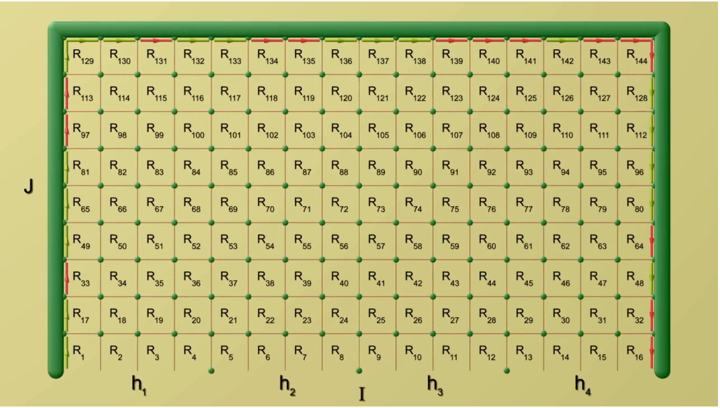
- On effectue les simplifications qui s'imposent (observation 1).

Démonstration du théorème de Van Kampen



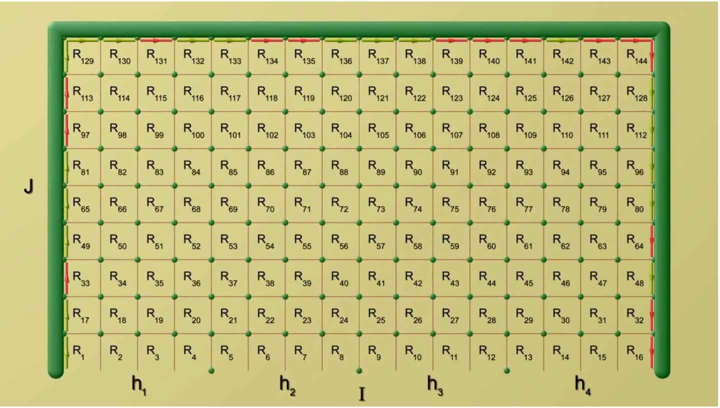
• On traverse ensuite la frontière orange en transformant la ligne brisée rouge en une ligne brisée verte grâce à l'observation 2.

Démonstration du théorème de Van Kampen



- En répétant cette démarche, on finit par obtenir une ligne brisée qui coïncide avec le bord vert du domaine.

Démonstration du théorème de Van Kampen



- Ceci "montre" que si $\phi(h_1 \cdots h_m) = [c_{x_0}]$ alors on peut simplifier le mot $h_1 \cdots h_m$ en le mot vide modulo $K = N(R)$.

$\square$

Exos

1) Montrer que le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles

$$X_n = \vee_{i=1}^{n} \mathbb{S}_i^1$$

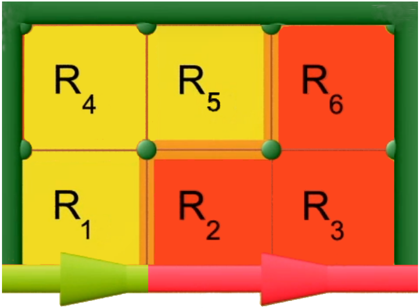
est le groupe libre à n-générateurs.

2) Donner une présentation $\langle S \mid R \rangle$ du groupe fondamental du bouquet $\mathbb{T}^2 \vee \mathbb{S}^1$.

Exos

3) Dans la situation ci-dessus et avec les notations et les conventions du cours, écrire le mot $h = h_1 h_2$ sous forme d'un mot réduit de $N(S)$. On supposera $b_1 \neq 1$ et $d_1 \neq 1$.

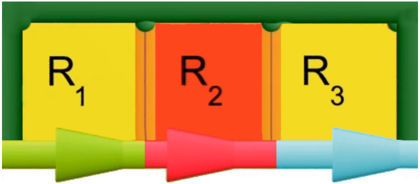
Exos



4) a)Dans la situation ci-dessus et avec les notations et les conventions du cours, écrire le mot $h = h_1 h_2$ sous forme $\beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1}$ pour une classe $[\gamma]$ que l'on explicitera.

b) Sous quelle(s) condition(s) l'écriture $h = \beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1}$ est-elle réduite ?

Exos

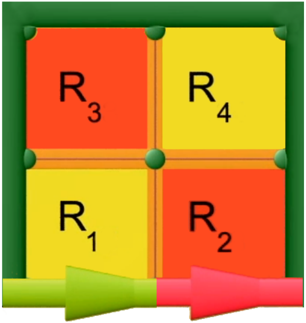


5) Dans la situation ci-dessus et avec les notations et les conventions du cours, écrire le mot $h = h_1 h_2 h_3$ sous forme d'un produit

$$\beta_1([\gamma])\beta_2([\gamma])^{-1}\beta_1([\delta])\beta_2([\delta])^{-1}$$

de deux éléments de R où l'on précisera γ et δ.

Exos



6) Dans la situation ci-dessus et avec les notations et les conventions du cours, montrer que le mot $h = h_1 h_2$ est un mot de $N(R)$.