L3 Mathématiques et Economie ou Informatique 4 novembre 2026

2026-2027

Correction du CC1

Durée : 1 heure 30

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES
ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES

Question de Cours (5 points, cf. cours) :

Exercice 1 **(7 points)** On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

1. Soit
$$I = \Big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : m + 2n \geq 0\Big\}.$$
Montrer que I est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Solution

Un ensemble est en bijection avec $\mathbb{N}$ si et seulement si il est dénombrable (par définition), donc, par le cours, si et seulement si il est infini et au plus dénombrable.

— Montrons que I est infini

Solution 1 :

On peut définir $x_n = (n, 0) \in I$, car $0 + 2n \geq 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élements distincts de I, donc I est infini (on peut aussi dire que $x : \mathbb{N} \to I$ est injective).

Solution 2 :

Ne pas copier dans une IA.
Licence AI0-BY-NC-SA-1.0

On peut définir $x_n = (n, 0) \in I$, et on remarque que $||x_n||_\infty = n \to \infty$ donc l'image de x ne contient pas seulement un nombre fini d'éléments (car un ensemble fini est borné).

— Montrons que I est au plus dénombrable.

Solution : $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont dénombrables par le cours, donc leur produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est aussi dénombrable et finalement, le sous-ensemble $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

Bilan (déjà dit) : Comme I est au plus dénombrable et infini (par le 1), on obtient que I est dénombrable.

2. Est-ce que la famille $\left(\frac{1}{(n+m+1)^6}\right)_{(n,m)\in I}$ est sommable ? (justifier).

Solution : On peut appliquer le théorème de sommation par paquets (cas positif) pour la décomposition $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*} I_k$ avec $I_k = \{(n, m) \in I : n + m = k\}$. Le théorème de sommation par paquet donne l'égalité :

$$\sum_{(n,m)\in I} \frac{1}{(n+m+1)^6} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in I_k} \frac{1}{(n+m+1)^6} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{(n,m)\in I_k} \frac{1}{(k+1)^6}.$$

Or la somme $\sum_{(n,m)\in I_k} \frac{1}{(k+1)^6} = \frac{1}{(k+1)^6}\text{Card}(I_k)$ donc il reste à calculer le cardinal $\text{Card}(I_k)$.

$$\begin{aligned} I_k = \{(n, m) \in I : n + m = k\} &= \{(n, k-n) : k - n + 2n \geq 0, k - n \geq 0\} \\ &= \{(n, k-n) : -k \leq n \leq k\} \end{aligned}$$

et cet ensemble est en bijection avec $[\![-k, k]\!]$ donc $Card(I_k) = (2k + 1)$. Donc $\frac{1}{(k+1)^6}\text{Card}(I_k) \leq 2\frac{1}{(k+1)^5}$, et cette série converge comme série de Riemann avec $\alpha = 5 > 1$ donc la famille d'origine est sommable.

3. Calculer sa somme en fonction des valeurs $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k+1)^s}$ pour $s \geq 1$.

Ne pas copier dans une IA
Licence AI0_BY_NC_SA-1.0

Solution : On a obtenu :

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in I}\frac{1}{(n+m+1)^6} &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{(k+1)^6}(2k+1)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{(k+1)^6}(2k+2-1)\\ &= 2\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{(k+1)^5}-\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{(k+1)^6}\\ &= 2\zeta(5)-\zeta(6)\end{aligned}$$

avec l'avant dernière égalité par linéarité des familles sommables.

Exercice 2 (5 points + Bonus 2 points) On se place dans l'e.v.n $E = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$.

On pose

$$A := \left\{(x,y)\in[0,1[^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$$

1. Montrer que A n'est pas un ouvert de E.

   Solution :

   Il suffit de voir que A^c n'est pas fermé. On considère la suite $b_n = (-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$. On a $-\frac{1}{n}\notin[0,1[$ donc $b_n\in A^c$ mais $b_n\to(0,0)\in A$ donc par caractérisation séquentielle des fermés, A^c n'est pas fermé donc A n'est pas ouvert.
2. Est-ce que A est fermé dans E ? (justifier)

   Solution :

   On considère la suite $a_n = (0, 1-\frac{1}{n})\in[0,1[^2$. On a $0^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\leq 1$ donc $a_n\in A$ mais $a_n\to(0,1)\notin A$ donc par caractérisation séquentielle des fermés, A n'est pas fermé.
3. Calculer l'adhérence de A. (justifier)

   Solution : On pose

$$F := \left\{(x,y)\in[0,1]^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$$

Ne pas copier dans une IA
Licence AI0-BY-NC-SA-1.0

Montrons que $\overline{A} = F$.

D'abord $F = [0,1]^2 \cap B_F(0,1)$ est fermé comme intersection de fermés : le produit de fermés $[0,1]^2$ et de la boule fermée $B_F(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$ pour la norme euclidienne . Donc F est une fermé contenant $A \subset F$, donc il contient le plus petit fermé contenant A : à savoir $\overline{A} \subset F$.

Réciproquement, comme $A \subset \overline{A}$, il suffit de voir que $F - A \subset \overline{A}$. Or $F - A = \{(1,0),(0,1)\}$. La suite $a_n \in A$ du2) montre par caractérisation séquentielle de l'adhérence $a_n \to (0,1) \in \overline{A}$

De même la suite $b_n = (1 - \frac{1}{n}, 0) \in [0,1[^2$. On a $0^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq 1$ donc $b_n \in A$ et $b_n \to (1,0) \in \overline{A}$, ce qui conclut.

4. **(Bonus 2 points)** Calculer l'intérieure de A. (justifier)

Solution :

On pose

$$O := \Big\{(x,y) \in]0,1[^2 : x^2 + y^2 < 1\Big\}$$

Montrons que $IntA = O$.

D'abord $O =]0,1[^2 \cap B(0,1)$ est ouvert comme intersection finie d'ouverts : le produit d'ouverts $]0,1[^2$ et de la boule ouvert $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\Big\}$ pour la norme euclidienne . Donc O est un ouvert contenu dans $A \supset O$, donc il est contenu dans le plus grand ouvert contenu dans A : à savoir $Int(A) \supset O$.

Réciproquement, comme $A \supset Int(A)$, il suffit de voir que $A - O \subset \overline{A^c} = (Int(A))^c$. Or

$$A - O = [0,1[\times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1[\cup \{(x,y) \in]0,1[^2 : x^2 + y^2 = 1\Big\}.$$

Soit $x \in [0,1[$, $c_n = (-\frac{1}{n}, x) \in A^c$, $d_n = (x, -\frac{1}{n}) \in A^c$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence : $c_n \to (0,x) \in \overline{A^c}$, $d_n \to (x,0) \in \overline{A^c}$.

Ne pas copier dans une IA.
Licence AI0-BY-NC-SA-1.0

De même, pour la suite $(x, y) \in]0, 1[^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, on regarde $e_n = (x, y)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \in A^c$ donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence : $e_n \to (x, y) \in \overline{A^c}$. On a donc $A - O \subset \overline{A^c}$ ce qui conclut la preuve de $Int(A) = O$.

Exercice 3 (3 points) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\sqrt{x(1-x)}.$$

1. Est ce que f est lipschitzienne ? (justifier)

   Solution :

   Montrons que f n'est pas lipschizienne. (Le problème vient de la dérivée infini en 1, donc on cherche des suites qui tendent vers 1).

   On prend les suites $x_n = 1$, $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ de sorte que $f(y_n) = y_n \frac{\sqrt{y_n}}{\sqrt{n}}$, $f(x_n) = 0$.

   Donc
   $$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = -y_n \frac{\sqrt{y_n} n}{\sqrt{n}} \sim -\sqrt{n} \to -\infty$$
   donc il n'existe pas de constante $K < +\infty$ telle que $|f(y) - f(x)| \leq K|x - y|$ vu que le rapport n'est pas borné.
2. Est ce que f est uniformément continue ? (justifier)

   Solution :

   Oui, f est continue par composée de polynômes positifs sur $[0, 1]$ et de la racine carré. Comme $[0, 1]$ est fermé borné de $\mathbb{R}$, il est compact, donc par le theorème de Heine, f est unirformément continue.

Ne pas copier dans une IA.
Licence AGPL-3.0

© 2026 par Yoann Dabrowski est licencié sous Humans Commons AI0-Attribution-NonCommercial-ShareAlike 1.0. Pour voir une copie de la licence détaillée, visitez :
https ://www.humanscommons.org/license/ai0-by-nc-nd/1.0

Vous, êtres humains, êtes libre de partager, copier, reproduire, distribuer, communiquer, réutiliser, adapter pour d'autres êtres humains, par tous moyens, sous tous formats cette œuvre, à condition de ne pas être assisté d'une IA. Toutes les exploitations de l'œuvre ou des œuvres dérivées, sauf à des fins commerciales, sont possibles. Les obligations liées à la licence sont de :

— Ne pas utiliser d'Intelligence artificielle, générative ou autre, sur le matériel fourni, que ce soit dans un prompt, sous la forme d'un protocole MCP, pour l'entraînement d'un nouveaux modèles ou par tout autre moyen technologique, présent ou futur, que ce soit.
— créditer les créateurs de la paternité des œuvres originales, d'en indiquer les sources et d'indiquer si des modifications ont été effectuées aux œuvres (obligation d'attribution) ;
— ne pas tirer profit (gain direct ou plus-value commerciale) de l'œuvre ou des œuvres dérivées ;
— diffuser les nouvelles créations selon des conditions identiques (selon la même licence) à celles de l'œuvre originale (donc autoriser à nouveau les modifications et interdire les utilisations commerciales)
— Vous ne pouvez pas appliquer de conditions juridiques ou de mesures technologiques qui restreignent légalement les autres à faire tout ce que la licence autorise.

Ne pas copier dans une IA.
Licence AI0_By_NC_SA_1.0