Feuille d'exercices numéro 1

Rappels, Dénombrabilité

Exercice 1 (injectivité, surjectivité) Soit $f : X \to Y$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) f est injective ;
   b) $\forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$;
   c) $\forall x \in X$, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) f est surjective ;
   b) $\forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$;
   c) $\forall y \in Y$, $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice 2 (fonctions indicatrices) Rappelons que si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ la fonction indicatrice 1_A de A est définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $1_\emptyset$ et 1_Ω.
2. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ calculer $1_A^{-1}(B)$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Calculer en fonction de 1_A et 1_B les fonctions suivantes : 1_{A^c}, $1_{A\cap B}$, $1_{A\cup B}$ et $1_{A\Delta B}$ (dans le cas particulier $A \cap B = \emptyset$ et dans le cas général).
4. Soit (A_n) une suite de $\mathcal{P}(\Omega)$ et soit $A = \bigcup_n A_n$.
   a) Montrer que la suite (A_n) est croissante si et seulement si la suite (1_{A_n}) est croissante. Montrer que dans ce cas (1_{A_n}) converge (simplement) vers 1_A.
   b) Si les A_n sont d.d.d. (deux à deux disjoints), montrer que $1_A = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}$.

Exercice 3 Parmi les assertions suivantes : lesquelles sont VRAIES et lesquelles sont FAUSSES ? (Prouver les ou réfuter les selon le cas).

1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. $[a, b]$ où $a, b \in \mathbf{R}$ et $a < b$ est dénombrable.
4. $\mathbf{Q}$ est dénombrable.
5. $\mathbf{R}$ est dénombrable.
6. $\mathbf{C}$ est dénombrable.
7. $\mathbb{N} \times \mathbf{R}$ est dénombrable.

AI0-BY-NC-SA

Familles sommables

Exercice 4 Étudier la sommabilité et calculer la somme éventuelle de la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec

$$u_k = \frac{(-1)^{|k|}}{(|k|+1)^2}.$$

Indication : on pourra utiliser $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(i+j+1)^3}$$

Exercice 6 Trouver pour quels $\alpha \in \mathbf{R}$ la famille suivante est sommable : $\sum_{(k,l)\in(\mathbf{N}^*)^2} \frac{1}{(k^2+l^2)^\alpha}$.

Exercice 7 Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes absolument convergentes. On pose

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

1. Montrer que $\sum c_n$ est absolument convergente et calculer sa somme.
2. Application : On prend $a_n = z^n = b_n$ avec $|z| < 1$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$.

Exercices suplémentaires

Exercice 8 Soit E un ensemble infini et D un ensemble au plus dénombrable disjoint de E.

1. Montrer qu'il existe une injection $f : \mathbf{N} \to E$.
2. Montrer qu'il existe une bijection $\mathrm{Im}(f) \cup D$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une bijection de $E \cup D$ sur E.

Exercice 9

1. Montrer que l'ensemble $\mathbf{Q}[X]$ des polynômes à coefficient dans $\mathbf{Q}$ est dénombrable.
2. Est ce que l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficient dans $\mathbf{R}$ est dénombrable ?

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la famille de terme $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

1. Soit $(I'_m)_{m\geq 0}$ la partition de $\mathbf{N}^*$ donné par $I_m = \{2m+2, 4m+1, 4m+3\}$ et $v'_m = \sum_{n\in I'_m} u_n$. Montrer que $\sum_{m\geq 0} v'_m$ converge vers un nombre $v' < 0$.
2. Soit $(I''_m)_{m\geq 0}$ la partition de $\mathbf{N}^*$ donné par $I_m = \{2m+1, 4m+2, 4m+4\}$ et $v''_m = \sum_{n\in I''_m} u_n$. Montrer que $\sum_{m\geq 0} v''_m$ converge vers un nombre $v'' > 0$.
3. En déduire que la famille $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas sommable.
4. Remontrer ce résultat en utilisant un autre résultat du cours.

A10-BY-NC-SA

Feuille d'exercices numéro 2

Exercice 1 **Norme produit** Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour (x, y) dans $E \times F$ par

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|' \quad ,$$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} \quad \text{et}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|'\}$$

sont des normes sur $E \times F$. On appelle la norme $\|\cdot\|_\infty$ **norme produit**.

Vérifier que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 2 Pour tout élément $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ du $\mathbf{R}$–espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ des polynômes, on pose :

$$n_1(P) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \quad n_\infty(P) = \max_{i=1\ldots n} |a_i|$$

Comme dans l'exercice 1, on montre que n_1, n_∞ sont des normes.

1. Ces normes sont–elles équivalentes ?

2. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} X^k$.

La suite (P_n) converge–t–elle pour une de ces normes ? Est–elle de Cauchy ?

Exercice 3

Soit $E = \ell^1(\mathbf{N})$ l'ensemble des coefficients $P = (a_k)_{k\geq 0}$ de séries absolument convergentes donc telles que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i| < \infty$ et on note :
$||P||_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |a_i|$. On rappelle que c'est une norme sur E.

1. Soit $i : \mathbf{R}[X] \to E$ défini par $i(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = u$ pour $u_k = a_k$ pour $k \leq n$ et $u_k = 0$ sinon. Montrer que $||i(P)||_1 = n_1(P)$ (on dit que i est une isométrie (linéaire)).
2. Soit $P^{(n)} = i(P_n) \in E$ (pour la suite de polynômes (P_n) de l'exercie 3).

   $(P^{(n)})$ converge t–elle dans E ?

Exercice 4 Soit $(E, ||.||)$ un evn. Montrer que tout $(x, y) \in E^2$ vérifie :

$$||x|| + ||y|| \leq ||x + y|| + ||x - y||.$$

Exercice 5 **(⋆)** On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) = \{f : [0, 1] \to \mathbf{R};\ f \text{ continue}\}$.

AI0–BY–NC–SA

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f, r)$.
3. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6 Soit $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ avec

$$d_{\overline{\mathbf{R}}}(x, y) = \begin{cases} \min(1, |x - y|) & \text{si} \quad x, y \in \mathbf{R} \\ 0 & \text{si} \quad x = y \in \{-\infty, +\infty\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $d_{\overline{\mathbf{R}}}$ est une distance.
2. Montrer que $d_{\overline{\mathbf{R}}}$ et la distance usuelle définie par $d_{\mathbf{R}}(x, y) = |x - y|$ ne sont pas équivalentes sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer que les intervalles $]a, b[$ avec $a < b$ sont ouverts pour cette distance.
4. Montrer que $U \subset \mathbf{R}$ est ouvert pour la norme usuelle si et seulement si il est ouvert pour $d_{\overline{\mathbf{R}}}$

Ouverts, fermés.

Exercice 7

On considère le $\mathbf{R}$–espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni de la norme $||.||_2$. Montrer que :

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$ est un ensemble ouvert.
2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0\}$ est un ensemble fermé.

Exercice 8

1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 9 **(⋆)** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) = \{f : [0, 1] \to \mathbf{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0, 1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 10

On considère le $\mathbf{R}$–espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x > 0, y \geq 0\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + y > 0\}$.
3. $C = [0, 1]\times]1, 2[$,

Exercice 11

1. Calculer l'adhérence et l'intérieure de $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$.
2. Donner un exemple de partie A de $\mathbf{R}$ tel que les 7 ensembles :

$$A, \overline{A}, \text{Int}(A), \text{Int}(\overline{A}), \overline{\text{Int}(A)}, \text{Int}(\overline{\text{Int}(A)}), \overline{\text{Int}(\overline{A})}$$

soient tous distincts

A10–BY–NC–SA

3. Que dire du rapport de $\mathrm{Int}(\overline{A})$, et $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$? De même, que dire du rapport de $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ et $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})$?

Exercice 12

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vrai si A n'est pas ouvert.

Exercice 13

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties denses dans E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 14

Montrer que dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel propre n'est jamais ouvert.

Continuité uniforme

Exercice 15 Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 16 Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 17 Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ mais pas lipschitzienne.

Exercice 18 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 19 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $f, g : X \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 20 Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 21 Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 22 Soit (X, d) un espace métrique. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f : X \to \mathbf{R}$ qui sont **bornées**, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.

Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$\big((f_n) \text{ converge uniformément vers } f\big) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 .$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E. Que dire des fonctions uniformément continues appartenant à E ?

A10-BY-NC-SA

Exercice 23 Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie non-vide et $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
2. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipshitzienne.
3. Est-elle uniformément continue ?

Exercice 24 Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0, 1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de μ.

Exercices supplémentaires.

Exercice 25

On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $D = \mathbf{Q}^2 \cap ([0, 1]\times]1, 2[)$,
2. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ xy < 1\}$,
3. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$,
4. $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = 1/n, y = 1/m, n > 0, m > 0\}$,
5. $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y + z \geq 0\}$,
6. $I = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x > 0, y \geq 0, z \in]1, 2[\cup\{-1/n, \ n \in \mathbf{N}\}\}$,
7. $J = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Q} \ : \ x > 0, y \geq 0\}$,

Exercice 26 Soit E un espace vectoriel et soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur E. On note $B_i(a, r)$ (resp. $B_{Fi}(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) pour la norme $||.||_i$.

1. Montrer que : $B_{F1}(0, 1) = B_{F2}(0, 1) \iff (\forall x \in E, \ ||x||_1 = ||x||_2)$
2. Montrer que : $B_1(0, 1) = B_2(0, 1) \iff (\forall x \in E, \ ||x||_1 = ||x||_2)$

Exercice 27

Soit $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}^*\}$. L'ensemble X est-il un ouvert de $\mathbf{R}$? Déterminer $\overline{X}$.

Exercice 28

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, $r > 0$ un nombre réel et $a \in E$. On suppose que A est ouvert. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $B_F(a, r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B_F(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$.

A10-BY-NC-SA

Feuille d'exercices numéro 3

Complétude

Exercice 1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $F \subseteq E$ un sous–espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach. Soit $A = (L(E,E), |||\cdot|||)$ l'espace de Banach des application linéaires continues sur E (munie de la norme subordonnée). Soit $f \in A$ vérifiant $|||f||| < 1$.

1. Soit $x \in A$, on pose $F_x(y) = f(y) + x$. Montrer que l'application F_x a un unique point fixe.
2. Vérifier que la norme subordonnée est sous–multiplicative, c'est à dire que pour tout $f, g \in A$:
$$|||f \circ g||| \leq |||f||| \, |||g|||$$
3. On considère la série $\sum_n f^n$ des composées de f définies par $f^0 = \mathrm{id}_E$ (l'application identité), $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Montrer que cette série est absolument convergente dans A.
4. En déduire que $\mathrm{id}_E - f$ admet un inverse de composition dans A, c'est à dire $g \in A$ tel que
$$g \circ (\mathrm{id}_E - f) = (\mathrm{id}_E - f) \circ g = \mathrm{id}_E$$

   Quel est le lien entre $g(x)$ et le point fixe de F_x ?

Exercice 3

Soit E un espace de Banach. Soit $C = C_b^1(]0, +\infty[, \mathbf{R})$ l'espace des applications C^1 bornées et de dérivées bornées $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$.

1. Soit $D : (C_b^1(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ défini par $D(f)(x) = f'(x)$. Montrer que D est une application linéaire non–continue. (Indication : considérer $f_n(x) = e^{-nx}$)
2. Pour rendre D continue, on considère la norme $\|f\|_{C^1} = \max(\|f\|_\infty, \|D(f)\|_\infty)$. Montrer que cela définit une norme sur C et que $D : (C, \|\cdot\|_{C^1}) \to (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est continue.
3. On pose $i(f) = (f, D(f))$ Montrer que $i : C \to (C_b^0(]0, +\infty[, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)^2$ définit une isométrie. En déduire que $(C, \|\cdot\|_{C^1})$ est complet.

Exercice 4 On considère l'espace $E = \ell^1(\mathbf{N}) = \{a = (a_i) \in \mathcal{K}^{\mathbf{N}} : \|a\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$.

On sait que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé. Soit $a_n = (a_{n,m})_{m \geq 0} \in E$ la suite des coefficients d'une série absolument convergente dans E, c'est à dire : $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_1 < +\infty$.

A10–BY–NC–SA

On rappelle la version série du théorème de Fubini–Tonelli, pour toute série double (à coefficients positifs comme $|a_{n,m}|$), on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n,m}| \in [0,+\infty].$$

1. Montrer que pour chaque $m \in \mathbf{N}$, la série $\sum_n a_{n,m}$ converge dans $\mathcal{K}$, disons vers $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$.
2. Montrer que $b = (b_m)_{m\geq 0} \in E$.
3. Montrer que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_{i,m}|$. En déduire que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \to_{n\to\infty} 0$.
4. En déduire que E est complet.

Exercice 5 On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 4x = \sin(x+y), & (x,y) \in \mathbf{R}^2 \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y). \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ telle que $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ soit solution de (1) si et seulement si (x,y) est un point fixe de f.
2. Montrer que f est contractante de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. On commencera par montrer les deux inégalités suivantes : pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a-b|$ et $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a-b|$.
3. Montrer que le système (1) admet une unique solution dans $\mathbf{R}^2$.

Exercice 6 On considère l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R};\ f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ (cf TD 1 ex 5)

1. Montrer que $f_n(x) = x^n$ définit une suite de Cauchy de E.
2. E est-il complet ?

Compacité

Exercice 7 Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = x^3\},$$

$$C = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0,1]\}, \quad D = \{(\cos t, \sin t) : t \in]0,1]\}, \quad E = \{(\cos t, \sin t) : t \in]0,2\pi[\}.$$

Exercice 8 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme n_∞. Montrer que la boule fermée de centre 0 et rayon 1 n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 9 Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0,1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $B_F(0,r)$.

AI0-BY-NC-SA

Exercice 10 On se place dans $\mathbf{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbf{R}^n$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on définit

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\} .$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, $d(x, A) \leq d(y, A) + \|y - x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbf{R}^n$. Montrer que dans ce cas, $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.
4. Pour une partie non vide B de $\mathbf{R}^n$, on définit $d(A, B) = \inf\{\|b - a\| : a \in A, b \in B\}$. Montrer que $d(A, B) = \inf\{d(a, B) : a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que

$$d(K, F) = \|b - a\|.$$

6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) : t \in \mathbf{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) : t \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^2$.)

Exercice 11 Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 12 Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = f\left(\frac{\lfloor xn \rfloor}{n}\right)$. Montrer que f_n converge uniformément vers f. En déduire que les fonctions en escalier sont denses dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathcal{CM}([0, 1], \mathbf{R})$.

AI0-BY-NC-SA

Feuille d'exercices numéro 4

Exercice 1 Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(0)$ en $0 = (0,0)$:

1. $C_1 = [0, +\infty[\times \mathbf{R}$, 2. $C_2 = [0, +\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1, 1]^2$, 4. $C_4 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}$.

Exercice 2

1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe.

   Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?
2. Soit $A = \{0\} \cup]0, +\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans $\mathbf{R}^2$ et calculer $T_A(0)$
3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbf{R}$, calculer $T_B(0)$ et $T_{A\cap B}(0)$.
4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $T_{A\cap B}(c)$ et $T_A(c) \cap T_B(c)$. (Pour une meilleure relation dans un cas particulier on pourra voir aussi l'exercice 20. 2)

Exercice 3 Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 4 Montrer que la fonction suivante croissante sur $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbf{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6 Soient E, F des e.v. sur $\mathbf{R}$ et I un intervalle.

1. Soient $f : E \to I, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Si $f : E \to \mathbf{R}$ est convexe et $A : F \to E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.
3. Montrer que $f(x, y) = (|2x + 3y| + |x - y|)^p$ est convexe sur $\mathbf{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 7

1. Prouver que la fonction f définie par $f(x, y) = xy$ n'est pas convexe sur $\mathbf{R}^2$, mais que les fonctions g, h définies par $g(x, y) = x^2 + y^2$ et $h(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.

AI0-BY-NC-SA

2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).

$$i(x, y) = exp(x + y), j(x, y) = exp(xy), k(x, y) = exp(x) + exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 8 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1, 1]^2$:

$$h_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6}, h_2(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{12}, \ h_3(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{3}, \ h_4(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Exercice 9 Soit $f(x, y, z) = (2x + y)^2 + (2x + z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous−espaces :

$$C_1 = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbf{R}^2\}, \ C_2 = \{(x, 0, z), (x, z) \in \mathbf{R}^2\}, \ C_3 = \{(0, y, z), (y, z) \in \mathbf{R}^2\}$$

sont convexes.

2. Est−ce que f est convexe sur $\mathbf{R}^3$?

Exercice 10 (Tiré du CC2 2025)

On se place dans l'e.v.n $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_2)$, c'est à dire muni de la norme euclidienne. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{(x + 1)^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{xy^2}{4}.$$

sur l'ensemble

$$C := \{(x, y) \in [0, +\infty[^2 : \quad x^2 + y^2 < 4\}$$

On définit également :

$$g(x, y) = x^2 + y^2,$$

et

$$O = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \quad x^2 + y^2 < 4\}.$$

1. Montrer que g est convexe sur $\mathbf{R}^2$ mais n'est pas concave.
2. Montrer que O est un ouvert convexe.
3. Montrer que C est convexe.
4. Est−ce que C est compact ? (justifier)
5. Montrer que f est strictement convexe sur C.
6. Montrer que f admet un unique minimum global sur C.
7. Calculer le cône normal $N_C((0, 0))$
8. Calculer le point de C où f atteint son minimum global (justifier).

Exercice 11 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

AI0−BY−NC−SA

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Exercice 12 Soit C un convexe et $f : C \to \mathbf{R}$ une fonction, montrer que f est convexe sur C si et seulement si pour tout intervalle $[a, b] \subset C$, la restriction $f_{|[a,b]}$ est convexe.

Exercices d'entraînements

Exercice 13 Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$ et en $a_2 = (0, 1)$.
2. $C_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$, en $a_3 = (1, 0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$.

Exercice 14 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)
3. Trouver la solution.

Exercice 15 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbf{R}^2$.

$$f_0(x, y) = x^2+y^2+x^4,\ f_1(x, y) = x^2+y^2+x^3,\ f_2(x, y) = x^4+y^4-4xy,\ f_3(x, y) = \cos(x+y),$$

$$f_4(x, y) = xe^y + ye^x,\ f_5(x, y) = |x + 1| + |y|,\ f_6(x, y) = (|x + 1| + |y|)^2.$$

Exercice 16 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0, 1]^2$:

$$g_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6},\ g_2(x, y) = \frac{x^4 + y^6}{12},\ g_3(x, y) = -\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$$

$$g_4(x, y) = \frac{x^2y^2}{2},\ g_5(x, y) = \cos(xy),\ g_6(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{6}.$$

AI0–BY–NC–SA

Exercices plus difficiles

Exercice 17

1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit C convexe fermé de E. Soit $f : C \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in C \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

   Montrer que f est convexe.
3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 12)

Exercice 18

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x-\cos(x)}$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $f : I \to]0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 19 Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 20 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 21 Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction concave.

1. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
2. On suppose en plus que f est continue en 0 et vaut $f(0) = 0$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 22 Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, majorée, de classe C^2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0 \; f''(x) \geq af(x) \geq 0 \; .$$

1. Montrer que f est décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.

   (Indication : en posant $\varphi(x) = f(0)e^{-x\sqrt{a}}$ on pourra montrer que $g = \frac{f}{\varphi}$ est décroissante en écrivant $g'(x) = \frac{\omega(x)}{\varphi(x)^2}$ et étudiant les variations de ω pour trouver son signe.)

Exercice 23 Montrer que pour S une partie fermé non-vide de E e.v.n. alors la fonction distance $d_S(x) := d(x, S) = \inf_{s \in S} ||x - s||$ est convexe si et seulement si S est convexe.

AI0-BY-NC-SA

Exercice 24 Soient $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions convexes C^1 définies sur $\mathbf{R}^m$ tel qu'il existe x_0 avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i. Soit la contrainte : $A = \{x \in \mathbf{R}^m : \forall i \in \{1, \ldots, n\}, g_i(x) \leq 0\}$. On rappelle que soit $x \in A$ avec $g_1(x) = \ldots = g_l(x) = 0$ (contraintes actives en x) et $g_{l+1}(x) < 0, \ldots g_n(x) < 0$, on a :

$$N_A(x) = \{\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0\}.$$

1. Soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}^m : \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ et $C = \{x \in \mathbf{R}^m : \forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I, g_i(x) \leq 0\}$ et $x \in B \cap C$.

   En déduire que $N_{B \cap C}(x) = N_B(x) + N_C(x)$ et $T_{A \cap B}(c) = T_A(c) \cap T_B(c)$.
2. Si x minimise une fonction convexe f sur A. Montrer que x vérifie $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geq 0$ (et $\lambda_i = 0$ si la i−ème contrainte n'est pas active)
3. On considère le problème de minimiser $f(x, y) := (x-3)^2 + (y-2)^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 \leq 5, -x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.

   Prouver qu'une solution existe qui n'est pas $(0, 0)$ et en déduire que la solution satisfait $f(x, y) < 13$.

   Trouver la solution (en se guidant graphiquement et en utilisant les conditions nécessaires). (Indication : Graphiquement, on se doute que la contrainte saturée au minimiseur va être $x^2 + y^2 = 5$)

AI0−BY−NC−SA

Feuille d'exercices numéro 5

Boréliens, fonctions mesurables

Exercice 1 On travaille avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Un ouvert est un borélien.
2. Un fermé est un borélien.
3. Un borélien est un ouvert ou un fermé.
4. Un intervalle est dans $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Exercice 2 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble $[2,3[\cap\mathbf{Q}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.
2. L'ensemble $\{x \in \mathbf{R} : \sin(x) = \cos(\tan(x))\}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.
3. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ et si $A \subset B$ alors $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Une fonction $f : \Omega \to \mathbf{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
2. Si $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ est mesurable et si $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est borélienne étagée alors $g \circ f$ est étagée.
3. Si $f : \Omega \to \mathbf{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$ pour tout $F \subset \mathbf{R}$ fermé alors f est mesurable.
4. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est borélienne et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est borélienne.
5. La fonction $f : \Omega \to \mathbf{R}$ est mesurable si est seulement si $|f|$ est mesurable.

Intégration

Exercice 4 ($\star$) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. si $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = \mu(A)$;
2. si $f = a1_A + b1_B$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $A, B \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = a\mu(A) + b\mu(B)$;
3. si $f : \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ alors f est intégrable ;
4. si $f : \Omega \to [0,\infty]$ est intégrable alors $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$;
5. si $f : \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et vérifie $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$;
6. si $f : \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et satisfait $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ–p.p. ;
7. si $f : \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ–p.p. alors $\int f d\mu = 0$;
8. si $f : \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et $\int_\Omega f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ μ–p.p.
9. le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbf{N}$ soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \geq n \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

Montrer que

AI0–BY–NC–SA

1. chaque f_n admet une intégrale sur $\mathbf{R}$ pour la mesure de Lebesgue. Est-elle intégrable ?
2. $f_n(x) \searrow 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;
3. $\int f_n d\lambda$ ne converge pas vers $\int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

Théorèmes de convergence

Exercice 6

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right) dx = \ln(2)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 7

1. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. Calculer $f(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 8 Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.

En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 9 Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \to [0, +\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. Commenter ce résultat.

Exercice 10 Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbf{R}$. Vérifier que la suite $\left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 11 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

A10-BY-NC-SA

Exercice 12 Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur $\mathbf{R}$ convergente vers 0 presque partout.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n\right) d\lambda.$$

Intégrales à paramètres

Exercice 13 Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable et μ une mesure finie sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$.

Montrer que leurs **transformées de Fourier** $\hat{f}$ et $\hat{\mu}$ sont continues sur $\mathbf{R}$:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}dt, \quad \hat{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\mu(t)$$

Exercice 14 Soient $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, en déduire la valeure de $f(x) + g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 15

On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que F est continûment dérivable. Donner une expression de $F'(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F'(x) + \frac{x}{2}F(x) = 0$

   En déduire que la fonction $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ est constante.
4. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ en utilisant le résultat de l'exercice 1.3
5. En déduire la transformée de Fourier d'une variable gaussienne standard

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{itx}dt.$$

Exercice 16 On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.

AI0-BY-NC-SA

3. Montrer que F est aussi bien définie en 0 comme intégrale de Riemann semi-convergente : $F(0) = \lim_{K\to\infty} \int_0^K \frac{\sin(t)}{t} dt$. (Indication : utiliser une intégration par partie).
4. Montrer que F est continue en 0. (Indication : il faut utiliser une méthode standard pour les intégrales semi-convergentes. On pourra décomposer $F(x) = F_0(x) + F_1(x)$ pour les intégrales sur $]0,1]$, $]1,+\infty[$, et utiliser une intégration par partie $v'(t) = \sin(t)$, $u(t) = e^{-tx}/t$ sur F_1 pour obtenir la formule alternative suivante :

$$F_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad F_1(x) = \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt = e^{-x}\cos(1) + \int_1^\infty (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

Exercice 17 Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \int_0^1 e^{-x/t}\,dt$.

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour $x > 0$.

Exercices supplémentaires

Exercice 18 Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n}dx$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n})dx$.

Exercice 19 Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

Exercice 20 Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin(x))^n\,dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\,dx$.

Exercice 21 Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On notera cette limite simple f.
2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbf{N}$,
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x)dx.$$
3. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a $1 - x \leq e^{-x}$.
4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
5. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$
6. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

A10-BY-NC-SA

Feuille d'exercices numéro 6

Mesures et mesurabilité : (suite)

Exercice 1 Si $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ trouver la tribu engendrée par $\mathcal{E} = \{\{3\}\}$ puis par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Exercice 2 En utilisant seulement $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma\Big(\{]a, b[, a < b \in \mathbf{R}\}\Big)$, montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma\Big(\{]-\infty, a], a \in \mathbf{R}\}\Big) = \sigma\Big(\{[a, +\infty[, a \in \mathbf{R}\}\Big).$$

1. En déduire que deux mesures μ, ν sur $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ telles que $\mu(]-\infty, a]) = \nu(]-\infty, a]) < \infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ sont égales (i.e. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu(A) = \nu(A)$).
2. Soient $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?

Exercice 3 Mesure de Dirac

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable quelconque et soit $x \in \Omega$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$ on pose

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que δ_x est une mesure de probabilité.

Exercice 4 Mesure discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace mesurable avec Ω au plus dénombrable. On fixe une famille de nombres $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega} \in [0, +\infty]^\Omega$. On définit pour $A \subset \Omega$:

$$\mu(A) = \sum_{\omega\in A} \mu_\omega.$$

1. Montrer que μ est une mesure sur Ω.
2. Montrer que μ est une mesure finie (c'est à dire $\mu(\Omega) < +\infty$) si et seulement si la famille $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est sommable.
3. Montrer que $\mu = \sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega \delta_\omega$.
4. Pour $h : \Omega \to [0, +\infty]$, montrer que

$$\int_\Omega h d\mu = \sum_{\omega\in A} h(\omega)\mu_\omega.$$

Exercice 5 Une mesure image

Soit $\Omega = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $f : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = 1_{[0,2/3]}(x) + 1_{[0,1/3]}(x).$$

AI0–BY–NC–SA

Montrer que f est borélienne, puis calculer la mesure image λ_f de λ par f.
Rappel : c'est la mesure sur $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ définie par $\lambda_f(B) = \lambda(f^{-1}(B))$.

Exercice 6 Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
2. Une union au plus dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
3. Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Théorèmes de Fubini et Changements de variables

Exercice 7 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable positive μ une mesure σ−finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$, montrer que pour $p \in]0, \infty[$:

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) > t\})dt.$$

Exercice 8 On considère le domaine $\Delta \subseteq \mathbf{R}^2$ délimité par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + x$. Calculer $\iint_\Delta xydx\,dy$.

Exercice 9

Calculer $\iint_D (x + y)e^{-(x+y)}dxdy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 1\}.$$

Exercice 10 Soient ν la mesure de comptage sur $\mathbf{Z}$ et $\rho = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ la **mesure de Rademacher**. Soit $s(x, y) = x + y$ donnant une fonction $s : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$. Montrer que la mesure image par s de la mesure produit est $s_*(\nu \otimes \rho) = \nu$.

Exercice 11 Soient f, g des fonctions mesurables positives sur $\mathbf{R}$. On rappelle que $||f||_1 = \int_\mathbf{R} |f(x)|d\lambda(x)$. On définit la convolution de f, g par :

$$f * g(x) = \int_\mathbf{R} f(x - y)g(y)d\lambda(y) \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que $f * g$ est, mesurable et que $||f * g||_1 = ||f||_1||g||_1$.
2. Montrer que la définition de $f * g$ s'étend pour presque tout x aux $f, g \in L^1(\mathbf{R}, d\lambda)$, que $f * g \in L^1(\mathbf{R}, d\lambda)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.

Exercice 12

Soit $D = B((0, 1), 1)$ dans le plan. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$.

Espaces L^p

Exercice 13

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, montrer que $|f| \leq ||f||_\infty$ μ−presque partout.

Exercice 14 Soit $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}1_{[0,1]}(x^2 + y^2)$.

A10-BY-NC-SA

1. Montrer que $f \notin L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$. (Indication, on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires).
2. Montrer que $\sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ et calculer $||\sqrt{f}||_1$.
3. En déduire que $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ n'est pas inclus dans $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$.

Exercice 15 Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. On rappelle que $\ell^p(\mathbf{N})$ est l'espace vectorielle des séries de puissance p sommable et qu'il coïncide avec $\ell^p(\mathbf{N}) = L^p(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \nu)$ pour la mesure de comptage ν .

1. Soit $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Pour quel α a-t-on $u_n \in \ell^p(\mathbf{N})$? En déduire que $\ell^q(\mathbf{N}) \not\subset \ell^p(\mathbf{N})$.
2. Soit v_n une suite telle que pour tout n, $|v_n| \leq 1$, montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p.$$
3. Montrer que la boule unité de $\ell^p(\mathbf{N})$ est inclus dans la boule unité de $\ell^q(\mathbf{N})$.
4. Montrer que $\ell^p(\mathbf{N}) \subset \ell^q(\mathbf{N})$, et pour tout $v \in \ell^p(\mathbf{N})$ $||v||_q \leq ||v||_p$.

Exercice 16 Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$, λ la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que $L^q(]0,1], \lambda)$ est un sous-espace de $L^p(]0,1], \lambda)$.
2. Soit $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Pour quel $\alpha > 0$ a-t-on $f \in L^p(]0,1], \lambda)$? En déduire que $L^q(]0,1], \lambda)$ est un sous-espace strict de $L^p(]0,1], \lambda)$.
3. Soit $g_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définit par $g_\alpha = \frac{1}{(x+1)^\alpha} 1_{]0,+\infty[}(x)$. Pour quel α a-t-on $g_\alpha \in L^p(\mathbf{R}, \lambda)$?
4. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbf{R}, \lambda)$ et $L^p(\mathbf{R}, \lambda)$? (justifier)

Exercices supplémentaires.

Exercice 17 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 18 Soit $D = [0,1]^2$. Calculer $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ et $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$.

Exercice 19 Soit $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2) < 9\}$. Justifier que l'intégrale $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\, dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 20 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy$.

Exercice 21 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dx\, dy$.

(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

A10-BY-NC-SA

Exercice 22 On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de I.

Exercice 23 Calculer l'intégrale $\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

où $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 24 Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < z < x^2 + y^2 < 1\}$.

Justifier que l'intégrale $\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.

Exercices plus difficiles.

Exercice 25 Ensemble triadique de Cantor et escalier du diable Soit $\Omega = [0, 1]$, muni de la restriction de la mesure de Lebesgue λ à $\mathcal{B}([0, 1])$.

Si $I = [a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbf{R}$, on note $\widetilde{I} = \left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right] \subset I$ l'union d'intervalles obtenu en retirant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I.

On définit par récurrence une suite d'ensembles $C_n \subset [0, 1]$ (tous union finie d'intervalle fermés) et de fonctions croissantes linéaires par morceau $F_n : [0, 1] \to [0, 1]$ par

- $C_0 = [0, 1]$ et $F_0(x) = x$.
- Si C_n s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés deux à deux disjoints : $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} I_m$ avec $I_m = [a_m, b_m]$ alors C_{n+1} est défini comme $C_n = \bigcup_{m=1}^{N} \widetilde{I_m}$ et

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si } x \notin C_n \\ \frac{F_n(a_m)+F_n(b_m)}{2} & \text{si } x \in I_m - \widetilde{I_m} = \left]\frac{2a_m+b_m}{3}, \frac{a_m+2b_m}{3}\right[, \\ F_n(a_m) + (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(x-a_m)}{2(b_m-a_m)} & \text{si } x \in [a_m, \frac{2a_m+b_m}{3}], \\ F_n(b_m) - (F_n(b_m) - F_n(a_m))\frac{3(b_m-x)}{2(b_m-a_m)} & \text{si } x \in [\frac{a_m+2b_m}{3}, b_m]. \end{cases}$$

1. Montrer que C_n est compact et vérifie $C_{n+1} \subset C_n$.
2. On pose $U_n = [0, 1] - C_n$. Montrer que C_n est une union de 2^n intervalles compacts deux à deux disjoints et U_n est union de $2^n - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints. Est-ce que C_n est borélien ?
3. Calculer $\lambda(C_n)$, pour $n \in \mathbf{N}$.
4. Posons $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$. Montrer que C est non vide et calculer $\lambda(C)$. C s'appelle **ensemble triadique de Cantor**.
5. Montrer que la formule $\phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{21_A(n)}{3^{n+1}}$ définit une fonction injective $\phi : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to C$. En déduire que C est non-dénombrable.

A10-BY-NC-SA

6. Montrer que F_n est croissante pour tout n.
7. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante $K \leq \frac{3^n}{2^n}$ et que pour tout $x \in [0,1]$,
$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{3.2^{n+1}}$$
En déduire que F_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue F.
8. Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
9. Posons $U = [0,1] - C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I.
10. En déduire que F est dérivable sur U, n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour λ–presque tout $x \in [0,1]$. F s'appelle **escalier du diable de Cantor**.

Exercices plus difficiles supplémentaires.

Exercice 26 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On dit que μ est *continue* si $\mu(\{x\}) = 0\}$ pour tout $x \in \Omega$ et on dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer que l'équivalence des conditions suivantes :
   a) μ est continue ;
   b) si A est une partie au plus dénombrable de Ω alors $\mu(A) = 0$;
   c) toute partie au plus dénombrable A de Ω est μ–négligeable.
2. Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de Ω et une suite $(c_n) \subset [0,\infty]$ telles que $\mu = \sum_n c_n \delta_{a_n}$.
3. Décrire les espaces mesurés avec μ à la fois discrète et continue.
4. **($\star$)** Supposons maintenant que μ est σ–finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 27 **($\star$)** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\overline{\mathcal{T}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{T}, N \ \mu - \text{négligeable}\}$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu. *C'est la tribu μ–complétée de $\mathcal{T}$.*
2. Soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathbf{R}}$, $A \Delta N \mapsto \mu(A)$, où $A \in \mathcal{T}$ et N est μ–négligeable. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$. On obtient un espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ appelé *l'espace mesuré μ–completé de* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 28 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbf{R} : A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable }\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbf{R})$.
3. Conclure.

Exercice 29 On reprend la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice précédent et on restreint la mesure de comptage ν sur $\mathbf{R}$ à $\mathcal{T}$. Montrer que $(\mathbf{R}, \mathcal{T}, \nu)$ est un espace mesuré qui n'est pas σ–finie.

A10-BY-NC-SA

Feuille d'exercices numéro 7

Exercice 1 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (réel). Montrer que, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E on a pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ et tout $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ (donc tels que $i_j \neq i_k$ si $k \neq j$)

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \| a_{i_k} \|^2 \ .$$

Remarquer que le théorème de Pythagore est un cas particulier de l'égalité ci-dessus. Qu'est-ce qui change si E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien ?

Exercice 2 Une Identité du parallélogramme généralisée

Soit H un espace préhilbertien de norme $\| \cdot \|$.

1. Montrer que pour $t \in]0,1[$, on a pour $x_1, x_2 \in H$:
$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 + t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 = t\|x_1\|^2 + (1-t)\|x_2\|^2.$$
2. En déduire que $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe.

Exercice 3 Soit $H = \mathbf{R}^2$. On pose $K = [0,1]^2$ et $C = [0, +\infty[^2$
1. Montrer que C, K sont des convexes fermés. Sont-ils compacts ?
2. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que la projection sur K est donnée par la formule
$$P_K(x) = (min(x_1, 1)1_{]0,+\infty[}(x_1), min(x_2, 1)1_{]0,+\infty[}(x_2)).$$
3. Rappeler la relation entre P_K et cône normal (vu au chapitre sur la convexité) et en déduire $N_K((1,1))$.
4. Pour $x \in \mathbf{R}^2$. Calculer $P_C(x)$ (Indication : on pourra deviner une formule et utiliser la propriété caractéristique de P_C, une généralisation est à l'exercice 12).

Exercice 4 On se place dans l'espace $L^2([0,1], \lambda; \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. On considère la famille $(u_k)_{k\geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sin(2k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthogonale. Est-ce une base hilbertienne ?

Exercice 5 Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormale.

Exercice 6 On désigne par $\mathcal{C}([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles et continues sur $[-1,1]$. En tant que sous-espace de l'espace de Hilbert $L^2([-1,1], \lambda; \mathbf{R})$, $\mathcal{C}([-1,1])$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg d\lambda.$$

AIC-BY-NC-SA

1. Montrer que $\mathcal{C}([-1,1])$ est séparable. (Indication : on pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.)
2. On se propose de montrer que $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas complet, donc, n'est pas un espace de Hilbert.

   Pour chaque entier $n > 0$ on pose

$$\phi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -1/n \\ nt & \text{si } -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   a) Montrer que (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([-1,1])$.
   b) Soit

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   Montrer que $\| \psi - f \|_2 > 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$.(La norme $\| \cdot \|_2$ de $L^2([-1,1], \lambda; \mathbf{R})$ est défini par $\| x \|_2^2 = < x, x >$.)
   c) En utilisant l'inégalité de Minkowski montrer que la suite (ϕ_n) ne converge pas dans $\mathcal{C}([-1,1])$.
   d) Conclure.
3. Est-ce que $\mathcal{C}([-1,1])$ fermé dans $L^2([-1,1], \lambda; \mathbf{R})$?

Exercice 7 Soient H un espace de Hilbert (complexe) et $T \in L(H,H)$ une application linéaire continue.

1. Soit $x \in H$, montrer (en utilisant le théorème de Riesz) qu'il existe un unique $z \in H$, tel que pour tout $y \in H$:

$$\langle z, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

2. En utilisant le même théorème, montrer que la norme subordonnée est donnée par :

$$|||T||| = \sup_{||y|| \leq 1} \sup_{||x|| \leq 1} |\langle x, Ty \rangle|.$$

3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire : $T^* : H \to H$ (appelée adjoint de T) telle que :

$$\forall x, y \in H : \langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle.$$

4. Montrer que $T^* \in L(H,H)$ et que la norme subordonnée de l'adjoint est la même :

$$|||T^*||| = |||T|||.$$

5. Montrer que $(T^*)^* = T$.
6. Si $H = \mathbf{C}^n$ et $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ la base orthonormale canonique, exprimer la matrice de T^* dans la base canonique en fonction de la matrice $A = (a_{i,j})$ de T.

A10-BY-NC-SA

Exercice 8 **Polynômes de Legendre** On se place dans l'espace de Hilbert

$$H = (L^2([-1,1],\lambda;\mathbf{R}),\|\cdot\|_2).$$

1. En utilisant le procédé de Gram–Schmidt, montrer qu'il existe une famille orthonormale de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telle que pour chaque $n\in\mathbf{N}$, la fonction p_n est une fonction polynomiale de degré n.
2. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que la famille de polynômes de la question précédente $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de H.
3. Pour $n\in\mathbf{N}$, on considère la fonction polynomiale l_n définie par

$$l_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

pour $t\in[-1,1]$ (polynômes de Legendre).

   a) Déterminer le degré de l_n pour chaque n.
   b) Montrer que la famille $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale (Indication : calculer par intégration par partie $\langle l_n, P\rangle$ avec P polynôme de $deg(P) < n$).
   c) En déduire que pour chaque n, on a $p_n = \frac{l_n}{\|l_n\|_2}$.

Exercice 9 Soient H un espace de Hilbert (complexe) et $u\in L(H,H)$ une application linéaire continue. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $||u(x)||_2 = ||x||_2$ pour tout $x\in H$.
2. Pour tout $x, y\in H$, $\langle ux, uy\rangle = \langle x, y\rangle$
3. $u^*u = Id$ (u^* est l'adjoint de l'exercice 7)

(Indication :penser à l'identité de polarisation).

Exercice 10 Soit $H = L^2([-\pi,\pi],\frac{1}{2\pi}\lambda;\mathbf{C})$. Soit $e_n(x) = exp(inx)$. On rappelle que $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base orthonormale de H. Soit f la fonction définie par $f(x) = x$.

1. Calculer les nombres $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$ (ce sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction f)
2. En déduire une formule pour f en terme des $(c_n(f))$.
3. En utilisant l'égalité de Parseval, en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

A1 6–BY–NC–SA

Exercices plus difficiles

Exercice 11 Une autre Identité du parallélogramme généralisée Soient H un espace de Hilbert et $x_1, \ldots, x_n \in H$

Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} ||\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2.$$

Exercice 12 Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbf{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geq 0 \ \mu - p.p.\}$.

Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f1_{\{f\geq 0\}}$.

Exercice 13 Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbf{R})$. On pose $K = \{f \in H : 1 \geq f \geq 0 \ \mu - p.p.\}$.

Montrer que K est un convexe fermé et que $P_K(f) = f1_{\{1\geq f\geq 0\}}$.

Exercice 14 Soient H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous–espace fermé différent de $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F, c'est à dire une application linéaire $P : H \to H$ telle que $P^2 = P$ d'image F. On rappelle qu'on munit l'espace vectoriel des applications linéaires continues $L(H, H)$ de la norme subordonnée $|||.|||$.

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale P_F
2. P est continue et $|||P||| = 1$
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leq ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice 15 Polynômes de Laguerre On se place dans l'espace de Hilbert $H = (L^2([0, \infty[, \mu; \mathbf{C}), \|\cdot\|_2)$ avec μ la mesure sur la tribu borélienne de $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue c'est–à–dire $\mu(A) = \int_A e^{-x} dx$.

Soit

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n).$$

1. Montrer que L_n est une fonction polynomiale de la forme :

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

2. Soit Q un polynôme de degré $m < n$ montrer que $\langle L_n, Q\rangle = 0$ (Indication : intégrer par partie).
3. Montrer que L_n est une famille orthonormale de H.
4. Soit $t \in \mathbf{R}$. Calculer la norme de $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{(t+i)^n} L_n$. En déduire que S_N converge dans H.
5. Soit

$$f_t(x) = \frac{i+t}{i} e^{ixt}.$$

Montrer que $\langle L_n, f_t\rangle = \frac{t^n}{(i+t)^n}$.

6. Montrer que S_N converge dans H vers f_t.
7. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthonormale de H. (Indication : montrer que tout f orthogonal aux L_n a une transformée de Fourier nulle et utiliser le théorème d'inversion de Fourier).

AI0 – BY – NC-SA