Oraux de mathématique PC 2024

Juillet 2024

Remarque introductive

Ce fichier regroupe un certain nombre d'exercices de mathématiques qui ont été donnés à l'épreuve oral des ENS, concours PC en 2024. Des éléments de réponses sont proposés mais qui ne constituent en rien une correction officielle.

Paul Dario, Eliot Raphael Ducatez, Luc Lehericy, Eliot Pacherie

Chapitre 1

Algèbre

Exercice 1.1. Soit A une $n \times n$ matrice réelle tel que $A^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice X qui satisfait l'équation

$$X + AX + XA^2 = A.$$

2. Exprimer X en fonction de A.

Solution 1.1. Montrons l'unicité : Soit X et Y deux solutions

$$X + AX + XA^2 = A = Y + AY + YA^2$$

donc avec $Z = X - Y$ on a

$$Z = -AZ - ZA^2$$

Donc $A^2ZA = -A^2(AZ + ZA^2)A = 0$. Donc $AZA = -A(AZ + ZA^2)A = 0$ Donc $ZA = -(AZ + ZA^2)A = 0$. Donc $A^2Z = 0$ donc $AZ = 0$ donc $Z = 0$.

Pour l'existence on introduit la suite suivante

$$X_{n+1} = A - AX_n - X_nA^2 \quad X_0 = 0$$

et on montre que celle ci est constante à partir d'un certain rang. On calcule

$$X_1 = A$$

puis

$$X_2 = A - AX_1 - X_1A^2 = A - A^2$$

Et enfin

$$X_3 = A - AX_2 - X_2A^2 = A - A^2$$

Donc $X = A - A^2$ est solution. (Remarque il s'agit ici d'une méthode de point fixe : pour trouver $X = f(X)$ on pose $X_{n+1} = f(X_n)$).

Exercice 1.2. Soit n et k des entiers avec $k \geqslant n$. Trouver toutes les matrices $n \times n$ n'ayant que des valeurs propres réelles tel que

$$A + A^k = A^t$$

avec A^t : la matrice transposée.

Solution 1.2. Les valeurs propres de A^t sont les mêmes que celles de A. On en déduit que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A alors $\lambda + \lambda^k$ est valeur propre de A. Notons $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de A. Si $\lambda_{\max} > 0$ alors $\lambda_{\max} + \lambda_{\max}^k > \lambda_{\max}$ est une valeur propre qui contredit la définition de $\lambda_{\max}$. Donc $\lambda_{\max} \leqslant 0$. L'inégalité $\lambda_{\max} + \lambda_{\max}^k > \lambda_{\max}$ est encore valide si k est pair et $\lambda_{\max} \neq 0$. Ainsi si k est pair $\lambda_{\max} = 0$. Soit $\lambda < 0$ on considère la suite $u_0 = \lambda$, $u_{n+1} = u_n + u_n^k$. Si $\lambda < -1$ on a $u_1 > 0$ absurde ($\lambda_{\max} \leqslant 0$). Si $\lambda \in]-1, 0[$ alors u_n est une suite strictement croissante qui converge vers 0. Elle prend une infinité de valeurs or A ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres, absurde. Donc les seuls valeurs propres possibles dans le cas k pair sont -1 et 0. Mais si -1 est valeur propre de A^t alors il existe une valeur propre de A, $\lambda^k + \lambda = -1$ donc $\lambda < -1$ absurde. Maintenant si k est impair u_n forme une suite strictement décroissante qui diverge vers $-\infty$ absurde également. Donc si k est impair : la seule valeur propre de A est 0. Conclusion la seule valeur propre possible est 0.

On termine l'exercice : A est trigonalisable avec pour tout élément sur la diagonal des 0 donc comme $k \geqslant n$ on a $A^k = 0$. Finalement $A = A^t$ qui est une matrice symmétrique. Donc diagonalisable. Or la seule valeur propre est 0 : donc $A = 0$.

(Autre méthode) On a également

$$A^t + (A^t)^k = A$$

donc $A^k = -(A^k)^t$. Donc toutes les valeurs propres de A^k sont imaginaire pure. Or si λ est une valeur propre de A, alors λ^k est une valeur propre de A^k qui est donc réelle. Donc $\lambda^k = 0$. On en déduit que toutes les valeurs propres de A sont nulles. Et on termine l'exercice de la même manière.

Exercice 1.3. On définit une suite de matrices $A_1, A_2, \cdots$ par récurrence de la manière suivante

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix}$$

où I_m est la matrice identité dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Remarquer que $A_n \in \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{R})$. Montrer que A_n a $n+1$ valeurs propres distinctes $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ avec multiplicité $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$ respectivement.

Solution 1.3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^{2^n}$ une valeur propre et vecteur propre de A_n. On a

$$A_{n+1} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + v \\ v + Av \end{pmatrix} = (1 + \lambda) \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$$

et
$$A_{n+1}\begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av - v \\ v - Av \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}$$
Donc si λ est valeur propre de A_n alors $\lambda + 1$ et $\lambda - 1$ sont valeurs propres de A_{n+1}. Notons $v_1, \cdots, v_{2^n}$ la base de diagonalisation de A_n, Montrons que
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_{2^n} \\ v_{2^n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_{2^n} \\ -v_{2^n} \end{pmatrix}$$
est une base de diagonalisation de A_{n+1}. Ce sont des vecteurs propres comme vu précédement. Montrons que c'est une famille libre
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{2^n} \begin{pmatrix} v_{2^n} \\ v_{2^n} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} + \cdots + \beta_{2^n} \begin{pmatrix} v_{2^n} \\ -v_{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Donc
$$\begin{cases} (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots (\alpha_{2^n} + \beta_{2^n})v_{2^n} = 0 \\ (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots (\alpha_{2^n} - \beta_{2^n})v_{2^n} = 0 \end{cases}$$
Donc
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_{2^n} + \beta_{2^n} = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_{2^n} - \beta_{2^n} = 0 \end{cases}$$
car la famille de (v_i) est libre et finalement $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{2^n} = \beta_1 = \cdots = \beta_{2^n} = 0$.

Pour $n = 1$ les valeurs propres sont ± 1. Montrons par récurrences que les valeurs propres de A_n sont $S_n = \{\lambda_k = -n + 2k,\, k \in \{0, \cdots, n\}\}$ et que les multiplicités sont égales $\binom{n}{k}$. On a
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \{\lambda \pm 1, \lambda \in S_n\} \\ &= \{-n + 2k \pm 1,\, k \in \{0, \cdots, n\}\} \\ &= \{-n - 1 + 2k,\, k \in \{0, \cdots, n + 1\}\} \end{aligned}$$
et pour les multiplicités on a
$$\begin{aligned} m_{n+1}(-n - 1 + 2k) &= m_n(-n + 2k) + m_n(-n + 2k - 2) \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Exercice 1.4. On note $\Lambda : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ la fonction qui à une matrice A donne la valeur absolue de la plus grande valeur propre de A : $\Lambda(A) = |\lambda_1|$.

1. Montrer que Λ n'est pas lipschitzienne pour la norme d'opérateur : (c'est à dire $\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$ où $\|u\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).

2. Montrer que si A est une matrice réelle symétrique

$$\Lambda(A) = \sup_{\|u\|=1} |\langle u, Au\rangle|$$

3. On note $S_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice symmétriques. Montrer que Λ restreinte à S_n est lipschitzienne.

Solution 1.4. 1) Comme contre exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a que les valeurs propres sont les racines de $\chi = X^2 - x$ qui sont $\pm\sqrt{x}$, donc $\Lambda(A) = \sqrt{|x|}$ qui n'est pas lipschitzienne.

2) Comme A et symétrique, A est diagonalisable dans une base orthonormée et les racines sont réelles. $A = O^*DO$ avec O orthogonale et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{\|u\|=1} |\langle u, Au\rangle| &= \sup_{\|u\|=1} |\langle Ou, DOu\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|=1} |\langle v, Dv\rangle| \\
&= \sup_{\sum v_i^2=1} |\sum \lambda_i v_i^2| \\
&= \sup_i |\lambda_i|
\end{aligned}$$

3) Soit A, B deux matrices symétriques. Alors

$$\begin{aligned}
|\Lambda(A) - \Lambda(B)| &= \left| \sup_{\|u\|=1} |\langle u, Au\rangle| - \sup_{\|u\|=1} |\langle u, Bu\rangle| \right| \\
&\leqslant \sup_{\|u\|=1} ||\langle u, Au\rangle| - |\langle u, Bu\rangle|| \\
&\leqslant \sup_{\|u\|=1} |\langle u, (A-B)u\rangle| \\
&\leqslant \|A - B\|
\end{aligned}$$

Exercice 1.5. Soient $(x_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ et $(y_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ deux ensembles de vecteurs dans $\mathbb{R}^k$. Montrer que si $\langle x_n, x_m\rangle = \langle y_n, y_m\rangle$ pour tout $n, m \leqslant N$ alors il existe une matrice orthogonal $O \in \mathcal{O}_k(\mathbb{R})$ tel que $y_n = Ox_n$ pour tout $n \leqslant N$.

Solution 1.5. Considérons d'abord le cas où $N = k$ et (x_n) forme une base de $\mathbb{R}^k$. Alors la condition $y_n = Ox_n$ définit une matrice O. Soit $u \in \mathbb{R}^k$ alors dans la base (x_n) il se décompose ainsi

$$u = u_1x_1 + \cdots + u_kx_k$$

Alors

$$\langle Ou, Ou\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} u_iu_j\langle Ox_i, Ox_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} u_iu_j\langle y_i, y_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} u_iu_j\langle x_i, x_j\rangle = \langle u, u\rangle$$

Donc O conserve le produit scalaire. C'est donc une matrice orthogonale.

Si (x_n) n'est pas génératrice, alors $\mathbb{R}^k = \mathrm{Vect}((x_n)) \oplus^\perp E = \mathrm{Vect}((y_n)) \oplus^\perp F$. La construction précédente définit O sur $\mathrm{Vect}((x_n)) \to \mathrm{Vect}((y_n))$ et peut la completer posant avec $Oe_i = f_i$ pour (e_i) une base orthogonal de E et (f_i) une base orthogonal de F.

Si (x_n) forme une famille liée, on en extrait une base et quitte à changer l'ordre supposons que $(x_1, \cdots, x_k)$ forme une base. Montrons que si

$$x_\ell = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$$

pour $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ alors

$$y_\ell = a_1 y_1 + \cdots + a_k y_k.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|y_\ell - a_1 y_1 + \cdots + a_k y_k\|^2 &= \langle y_\ell - a_1 y_1 + \cdots + a_k y_k, y_\ell - a_1 y_1 + \cdots + a_k y_k \rangle \\
&= \langle x_\ell - a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k, x_\ell - a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k \rangle \\
&= \|x_\ell - a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'application $Ox_n = y_n$ est donc bien définie.

Exercice 1.6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$. Supposons A inversible. Combien au maximum est-ce que A peut avoir de coefficients égaux à 1 ?

Solution 1.6. Il y a n^2 coefficients dans la matrice A. Si il y a au moins n^2-n+2 cofficients égaux à 1, alors il existe au moins deux colonnes ne contenant que des 1 et la matrice n'est donc pas inversible. Donc $\#\{1\} \leqslant n^2 - n + 1$. On peut vérfier que la matrice suivante est inversible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en faisant un pivot de Gauss

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercice 1.7. Soit a un endormorphisme autoadjoint et u un vecteur non nul. On pose $V = \text{Vect}\{a^k(u), k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que les valeurs propres de a restreinte à l'espace vectoriel V sont simples.

Solution 1.7. Puisque a est autoadjoint, il est diagonalisable dans une base orthornormé. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres et $E_1, \cdots, E_m$ les espaces propres. On a $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_m$ donc il existe une unique décomposition

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$$

avec $u_i \in E_i$ pour tout i. Montrons que

$$V = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_m).$$

On a

$$a^k(u) = \lambda_1^k u_1 + \cdots + \lambda_m^k u_m.$$

Donc $a^k(u) \in \text{Vect}(u_1, \cdots, u_m)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et alors $V \subset \text{Vec}(u_1, \cdots, u_m)$. Ensuite soit $(L_i)_{i \leqslant m}$ les polynomes de Lagrange associé à $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ on a alors

$$L_i(a)(u) = L_i(\lambda_i)u_1 + \cdots + L_i(\lambda_m)u_m = u_i$$

Donc $u_i \in V$ et on a alors $\text{Vec}(u_1, \cdots, u_m) \subset V$.

Finalement on remarque que les éléments non nuls de $(u_1, \cdots, u_m)$ forment une base de diagonalisation pour a restreint à V de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.

Exercice 1.8. On note $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dépendante du temps telle que pour tout $M_{ij}(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t))] = \det M(t) \text{Tr} \left(M(t)^{-1} \frac{d}{dt} M(t) \right)$$

pour tout t, tel que $M(t)$ est inversible.

1. Montrer le résultat dans le cas où $M(t)$ est une matrice diagonale
2. Montrer le résultat dans le cas en t_0 où $M(t_0) = I_n$.
3. Traiter le cas général.

Solution 1.8. 1) On note $\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)$ les éléments diagonales de la matrice et on a .

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t))] = \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i'(t) \prod_{j \neq i} \lambda_j(t)$$

et

$$M(t)^{-1} \frac{d}{dt} M(t) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1'(t)}{\lambda_1(t)} & & & \\ & \frac{\lambda_2'(t)}{\lambda_2(t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_n'(t)}{\lambda_n(t)} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\det M(t)\mathrm{Tr}\left(M(t)^{-1}\frac{d}{dt}M(t)\right) = \prod_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i'(t)}{\lambda_i(t)} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i'(t)\prod_{j\neq i}\lambda_j(t).$$

2) Avec le polynome caractéristique on calcul

$$\begin{aligned}\det(I_n+\epsilon M'(t_0)) &= \epsilon^n\det(\epsilon^{-1}I_n+M'(t_0))\\ &= \epsilon^n\left(\epsilon^{-n}+\epsilon^{1-n}\mathrm{Tr}(M'(t_0))+\cdots\right)\\ &= 1+\epsilon\mathrm{Tr}(M'(t_0))+O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

En écrivant $M(t_0+\epsilon) = I_n+\epsilon M'(t_0)+O(\epsilon^2)$ on en déduit alors que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\det(I+\epsilon M'(t_0)+O(\epsilon^2))-\det(I)}{\epsilon} = \mathrm{Tr}(M'(t_0))$$

ce qui donne bien la formule avec $M(t_0)^{-1} = I_n$ et $\det(M(t_0)) = 1$.

3) On pose $U(t) = M(t_0)^{-1}M(t)$. Alors

$$U(t_0) = I_n$$

et donc d'après la question précédente

$$\frac{d}{dt}[\det U(t)]|_{t=t_0} = \mathrm{Tr}([\frac{d}{dt}U](t_0)).$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t_0)^{-1})\det(M(t))]|_{t=t_0} = \mathrm{Tr}(M(t_0)^{-1}[\frac{d}{dt}M](t_0)).$$

et donc

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t_0))] = \det M(t_0)\mathrm{Tr}\left(M(t_0)^{-1}[\frac{d}{dt}M](t_0)\right)$$

où on a utilisé que $\det(M(t_0)^{-1}) = \frac{1}{\det(M(t_0))}$.

Exercice 1.9. Soit

$$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calculer
$$M(t) = \lim_{N\to\infty}\left(I_2+\frac{t}{N}A\right)^N$$
2. Montrer que $M(t)$, $t\in\mathbb{R}$ forme un groupe.

Solution 1.9. (Méthode 1) On peut diagonaliser A :

$$A = PDP^{-1}\quad \text{avec } P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

alors

$$\left(I_2+\frac{t}{N}A\right)^N = P\left(I_2+\frac{t}{N}D\right)^N P^{-1} = P\begin{pmatrix}\left(1+\frac{t}{N}\right)^N & 0\\ 0 & \left(1-\frac{t}{N}\right)^N\end{pmatrix}P^{-1}$$

On a alors

$$M(t) = P\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}$$

On a

$$M(t_1)M(t_2) = P\begin{pmatrix}e^{t_1+t_2} & 0\\ 0 & e^{-t_1-t_2}\end{pmatrix}P^{-1} = M(t_1+t_2)$$

(Methode 2) : $A^2 = I_2$ donc

$$\begin{aligned}\left(I_2+\frac{t}{N}A\right)^N &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{t^k}{N^k}A^k\\ &= \left(\sum_{k=0,k\text{ pair}}^{N}\binom{N}{k}\frac{t^k}{N^k}\right)I_2 + \left(\sum_{k=0,k\text{ impair}}^{N}\binom{N}{k}\frac{t^k}{N^k}\right)A\end{aligned}$$

puis on utilise que $\binom{N}{k}\frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!}\frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k} \leqslant \frac{1}{k!}$ et converge vers $\frac{1}{k!}$, on peut alors utiliser le théorème de convergence dominé et reconnaitre les séries entières de $\cosh(t)$ et $\sinh(t)$.

Exercice 1.10. Soit $(a_i)_{i\in[1\ldots n+1]}$ $n+1$ réels distincts. On définit pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$ la quantité $\|P\| = \sum_{i=1}^{n+1}|P(a_i)|$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Que dire de $\{P\in\mathbb{R}_n[X], \|P\|=0\}$ si les a_i ne sont pas tous distincts ?
3. Si les a_i sont tous distincts, montrer qu'il existe une constante $C>0$ tel que $\frac{1}{C}\sum|p_j| \leq \|P\| \leqslant C\sum|p_j|$ si $P=\sum p_jX^j$ pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer que $C(\varepsilon)\to+\infty$ dans le cas où les a_i pour $i\in[2\ldots n+1]$ sont tous fixés distincts et indépendent de ε et $a_1 = a_2-\varepsilon$ quand $\varepsilon\to 0$.

Solution 1.10. 1) Si $\|P\|=0$ alors P a $(n+1)$ zéros et P est de degré n, donc $P=0$. Les autres proprietés de la norme sont faciles à vérifier.

2) Il s'agit des polynômes de la forme

$$P(X) = \left(\prod_{i\in I}(X-a_i)\right)Q(X)$$

où I est un sous ensemble maximal de $[1\ldots n+1]$ où tous les a_i sont distincts pour $i\in I$, et $Q\in\mathbb{R}_{n-|I|}[X]$.

3) C'est une conséquence de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension fini.

4) On considère
$$P(X) = \prod_{i=2}^{n}(X - a_i).$$
On a alors $\|P\| = |P(a_1)| = |P(a_2 - \varepsilon)| = |\varepsilon| \prod_{i=3}^{n} |a_2 - a_i| + O(\epsilon^2)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, et
$$\sum |p_j| \geqslant 1$$
car $p_{n-1} = 1$. On a donc
$$C(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{|\varepsilon| \prod_{i=3}^{n} |a_2 - a_i| + O(\epsilon^2)} \to +\infty$$
quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 1.11. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ a 4 racines distinctes qui sont tous sur le même cercle dans le plan complexe. Montrer que $3 < ab < 9$.

Solution 1.11. 0 est racine de P, $\frac{P}{x}$ est de degrée 3 et a donc une racine réel x_1. On note x_2, x_3 les deux autres racines. Elles ne peuvent pas être réelles car sinon les 4 racines sont alignées et ne sont donc pas sur le même cercle. Comme $a, b \in \mathbb{R}$ les racines x_2, x_3 sont complexes conjugées, i.e $x_2 = r + is, x_3 = r - is$. En ecrivant
$$P(x) = x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
et en developpant, on a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= b \\ x_1x_2x_3 &= -1. \end{aligned}$$
De la troisième on en déduit que $x_1(r^2 + s^2) = -1$, donc en particulier $x_1 < 0$.

De plus, comme $x_1 \in \mathbb{R}$ le centre du cercle de l'énoncé est $\frac{x_1}{2}$. On a donc par exemple $\left|x_2 - \frac{x_1}{2}\right| = \left|\frac{x_1}{2}\right|$. Mise au carré, on en déduit que
$$r^2 + s^2 = x_1 r$$
et donc avec $r^2 + s^2 = \frac{-1}{x_1}$ on a $x_1^2 = \frac{-1}{r}$. Cela implique $r < 0$ et $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{-r}}$ (puisque $x_1 < 0$). En reprenant $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ on en déduit que $-a = -\sqrt{\frac{1}{-r}} + 2r$. De $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$ on a $b = 3\sqrt{-r}$ et donc $ab = 3 + 6(-r)^{3/2}$. On a $r < 0$ et $r > x_1$ car r est la coordonnée sur l'axe des abscisses d'un element du cercle, et x_1 le point le plus à gauche du cercle. Si $r < -1$ alors $x_1^2 = \frac{-1}{r} < -1$ ce qui est une contradiction. Donc $-r \in]0, 1[$, ce qui conclut.

Exercice 1.12. Soit P un polynome unitaire de degré n.

1. Quel sont les degrés de $P \circ P$ et P^n ?

2. Quel est le degré de $P \circ P - P^n$?
3. Quel est le degré de $P \circ P \circ P - P^{n^2}$?

Question bonus : Quel est le degré de P composé k fois - $P^{\circ^{k-1}}$?

Solution 1.12. 1) Les deux polynomes sont de degré n^2.

2) En notant $P = X^n + Q$, on a

$$P \circ P - P^n = (P - X^n) \circ P = Q \circ P.$$

Son degré est donc $\deg(Q)n$.

3) Sous la même notation, on a

$$\begin{aligned} P \circ P \circ P &= (X^n + Q) \circ P \circ P \\ &= (P \circ P)^n + Q \circ P \circ P \\ &= (P^n + Q \circ P)^n + Q \circ P \circ P \\ &= P^{n^2} + nP^{n(n-1)} Q \circ P + Q \circ P \circ P + \cdots \end{aligned}$$

où le reste est d'ordre inférieur. On a $\deg(P^{n(n-1)} Q \circ P) = n^2(n-1) + n \deg(Q)$ et $\deg(Q \circ P \circ P) = n^2 \deg(Q)$ or $n^2 \deg(Q) \leqslant n^2(n-1)$ donc

$$\deg(P \circ P \circ P - P^{n^2}) = n^2(n-1) + n \deg(Q)$$

avec $\deg(Q) = -\infty$ si $Q = 0$ comme convention.

Exercice 1.13. Soit V un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que $u \in L(V)$ est trigonalisable si et seulement si il existe $V_0 \subset V_1 \ldots \subset V_n$ des sous espaces vectoriels (SEV) de V avec $\dim V_k = k$ et $u(V_k) \subset V_k$.
2. Soit $u \in L(V)$ trigonalisable. Est-il possible d'avoir deux suite distinctes de SEV qui vérifie les conditions ci dessus ?

Question bonus : Que dire sur u si il existe une unique telle suite de SEV pour $n = 2$? Pour n général ?

Solution 1.13. 1) Si u est trigonalisable on prend $(e_i)_{i \in [1 \ldots n]}$ une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire, alors $V_k = \mathrm{Vect}(e_1 \ldots, e_k)$ fonctionne. Reciproquement, On construit $(e_i)_{i \in [1 \ldots n]}$ tel que $e_{k+1} \in V_{k+1} \backslash V_k$ qui est une base de V dans laquelle u est trigonalisable.

2) Oui, si $u = \mathrm{Id}$ par exemple et $V_k = \mathrm{Vect}(e_1 \ldots e_k)$ et $V_k' = \mathrm{Vect}(e_n \ldots e_{n-k})$.

Bonus : Si une telle suite est unique alors u admet une unique valeur propre. On pourrait refaire ici la preuve de la réduction de Jordan.

Exercice 1.14. Soit $(f_1 \ldots f_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, il existe $i \in \{1 \ldots k\}$ tel que $\langle x, f_i \rangle > 0$.

1. Donner un tel exemple de famille (f_i).
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(f_i) = \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $k > n$.
4. Trouver une telle famille de taille minimale.

Solution 1.14. 1) On peut construire une famille de taille $2n$: $f_i = e_i$ et $f_{n+i} = -e_i$ pour $i \leq n$ où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2) Par l'absurde, supposons $\mathrm{Vect}(f_i) \neq \mathbb{R}^n$. Alors $\dim(\mathrm{Vect}(f_i)^\perp) > 0$ et donc il existe un vecteur non nul $x \in \mathrm{Vect}(f_i)^\perp$. On a $\langle x, f_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1 \dots k\}$ ce qui donne une contradiction.

3) Si $k = n$ alors (f_i) est une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice $A = (\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j \in \{1 \dots n\}}$ est donc inversible, et si $x = \sum a_i f_i$ on a

$$(\langle x, f_i \rangle)_{i \in \{1 \dots n\}} = A(a_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$$

donc on prend (a_i) tel que $\langle x, f_i \rangle = -1$ pour tout $i \in \{1 \dots n\}$, ce qui est alors une contradiction.

(Autre méthode) On choisit $x \in \mathrm{Vect}(\{f_1, \cdots, f_{n-1}\})^\perp$ non nul et donc pour tout $i \leq n-1$, $\langle x, f_i \rangle = 0$. Si $\langle x, f_n \rangle < 0$ on a une contradiction et sinon on pose $y = -x$ et on obtient aussi une contradiction car $\langle y, f_i \rangle \leq 0$ pour tout $i \leq n$.

4) On peut proposer un exemple de taille $k = n + 1$. $f_i = e_i$ et $f_{n+1} = -(e_1 + \cdots + e_n)$. En effet si pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ on a $\langle f_i, x \rangle \leq 0$, alors $x_i \leq 0$ pour tout $i \leq n$. Dans ce cas

$$\langle f_{n+1}, x \rangle = -\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$$

et est nulle ssi $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Exercice 1.15. Soit E un SEV de $M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in E$, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$. Montrer que $\dim E \leqslant n$.

Solution 1.15. Soit $A \in E$, Il existe deux matrices inversible $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Soit $B \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda A + B \in E$ car c'est SEV et donc

$$P(\lambda A + B)Q = \begin{pmatrix} \lambda + \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \cdots & \bar{b}_{1n} \\ \bar{b}_{21} & & & \\ \vdots & & (\bar{b}_{ij}) & \\ \bar{b}_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

est de rang 1 pour tout λ. Supposons qu'il existe $\bar{b}_{ij} \neq 0$ avec $1 < i, j \leq n$, alors on peut vérifier que soit B soit $A+B$ est de rang au moins 2. Donc

$$P(\lambda A+B)Q = \begin{pmatrix} \lambda+\bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \cdots & \bar{b}_{1n} \\ \bar{b}_{21} & & & \\ \vdots & & (0) & \\ \bar{b}_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

De même si il existe $1 < i, j \leq n$ tel que $\bar{b}_{i1} \neq 0$ et $\bar{b}_{1j} \neq 0$, alors la matrice est de rang au moins égale à deux. Conclusion il y a deux possibilités

$$P(\lambda A+B)Q = \begin{pmatrix} \lambda+\bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \cdots & \bar{b}_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ou } P(\lambda A+B)Q = \begin{pmatrix} \lambda+\bar{b}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{b}_{21} & & & \\ \vdots & & (0) & \\ \bar{b}_{n1} & & & \end{pmatrix}.$$

Finalement de la même manière on prouve que si $B_1, B_2 \in E$ alors les deux matrices sont soient toutes les deux une ligne ou toutes les deux une colonne. Et donc

$$E \subset \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \cdots & \bar{b}_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & (0) & \\ 0 & & \end{pmatrix} Q^{-1}, \bar{b}_{1i} \in \mathbb{R} \right\}$$

ou

$$E \subset \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{b}_{21} & & & \\ \vdots & & (0) & \\ \bar{b}_{n1} & & & \end{pmatrix} Q^{-1}, \bar{b}_{i1} \in \mathbb{R} \right\}$$

(Autre méthode) Si $A, B \in E$, il existe (e_1, e_2, f_1, f_2) tel que $AX = \langle X, e_1\rangle e_2, BX = \langle X, f_1\rangle f_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Si (e_1, f_1) ne sont pas colinéaire et (e_2, f_2) ne sont pas colineaire, alors $\mathrm{rg}(A+B) = 2$. Si (e_1, f_1) sont colinéaire, alors pour tout $M \in E$ on a $MX = \langle X, e_1\rangle m$ pour un $m \in \mathbb{R}^n$, donc $\dim E \leqslant n$.

La preuve est similaire si (e_2, f_2) sont colinéaire, maintenant $MX = \langle X, m\rangle e_2$.

Exercice 1.16. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = 0$.
2. Même question pour $\mathrm{Tr}((A+B)^2) = (\mathrm{Tr}(A+B))^2$
3. Que dire de A si pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Tr}(P(A)) = P(\mathrm{Tr}(A))$?

Solution 1.16. 1) $B = \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ implique $\det(A) = 0$. On a alors l'équation

$$\det(A+B) = \det(B)$$

pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$. Soit P, Q deux matrices inversibles tel que

$$PAQ = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{n1} & \cdots & \overline{a}_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les colonnes non nulles forment une famille libre. On complète cette famille en une base et pose ensuite la matrice B tel que

$$PBQ = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_{1k+1} & \cdots & \overline{b}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_{nk+1} & \cdots & \overline{b}_{nn} \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les autres éléments de la base. Alors

$$\det(A+B) = \det P \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1k} & \overline{b}_{1k+1} & \cdots & \overline{b}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{n1} & \cdots & \overline{a}_{nk} & \overline{b}_{nk+1} & \cdots & \overline{b}_{nn} \end{vmatrix} \det Q \neq 0$$

en contradiction car $\det(B) = 0$ si $A \neq 0$.

2) Ce resultat est vrai en dimension $n = 1$ pour toute matrice A.

En dimension $n = 2$ on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A$$

alors $\mathrm{Tr}(A + B) = 0$ mais $(A + B)^2 = \mathrm{Id}$, absurde. Donc il n'existe pas de telle matrice qui vérifie cette propriétée. La méthode se generalise facilement pour toute dimension $d \geq 2$.

3) Ce resultat est vrai en dimension $n = 1$ pour toute matrice A. Sinon avec $P = 1$, on a $P(A) = I_n$ et donc

$$\mathrm{Tr}(P(A)) = n = P(\mathrm{Tr}(A)) = 1$$

Ce qui est impossible pour toute dimension $n \geq 2$.

Exercice 1.17. Soit P_0 un polynome, on définit la suite $P_{n+1} = XP'_n$. On suppose que λ est racine de tout les polynomes de cette famille. Montrer que $\lambda = 0$.

Solution 1.17. On écrit les coefficients de $P_0 = \sum_{i=0}^{\ell} a_i X^i$, $a_\ell \neq 0$. On calcul

$$P_1 = X \sum_{i=0}^{\ell} i a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{\ell} i a_i X^i$$

et par récurrence immédiate on a alors

$$P_n = \sum_{i=0}^{\ell} i^n a_i X^i.$$

Supposons $\lambda \neq 0$, alors

$$0 = P_n(\lambda) \sim_{n\to\infty} \lambda^\ell \ell^n a_i$$

qui diverge lorsque $n \to \infty$. Absurde.

(Autre méthode) Supposons $\lambda \neq 0$. On a $0 = P_n(\lambda) = \lambda P'_{n-1}(\lambda)$ donc $P'_{n-1}(\lambda) = 0$. Donc pour tout $n \geq 0$, $P'_n(\lambda) = 0$. Par récurrence on montre que pour tout k, et pour tout n $P_n^{(k)}(\lambda) = 0$. En effet par hypothèse de récurrence

$$0 = P_{n+1}^{(k-1)}(\lambda) = \lambda P_n^{(k)}(\lambda)$$

et donc $P_n^{(k)}(\lambda) = 0$. C'est absurde car $P_0^{(\deg(P_0))}(\lambda) \neq 0$.

Exercice 1.18. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On considère sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(s)Q(s)ds.$$

   Calculer la matrice $(\langle X^i, X^j\rangle)_{(i,j)\in\{0\dots n\}^2}$ et montrer que celle ci est inversible.

2. Déterminer les minimiseurs pour

$$\inf_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \int_0^1 |P(x) - e^x|^2 dx.$$

Solution 1.18. 1) On a

$$\langle X^i, X^j\rangle = \int_0^1 s^{i+j} ds = \frac{1}{1+i+j}$$

et elle est inversible sinon la famille des (X^i) est liée sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ et

$$f(a_1 \dots, a_n) = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^n a_j x^j - e^x\right)^2 dx.$$

On a

$$\partial_k f(a_1, \dots, a_n) = 2\int_0^1 x^k \left(\sum_{j=0}^n a_j x^j - e^x\right) dx,$$

donc en un point critique de f on a

$$\partial_k f(a_1, \dots, a_n) = 0 = 2\sum_{j=0}^n a_j \int_0^1 x^k x^j dx - 2\int_0^1 x^k e^x dx$$

pour tout k. Donc avec

$$M = \left(\frac{1}{1+i+j}\right)_{(i,j)\in\{0\dots n\}^2}, \; A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} E_0 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \text{ où } E_k = \int_0^1 x^k e^x dx$$

pour $0 \leq k \leq n$ on a $MA = E$ donc $A = M^{-1}E$. En particulier on a unicité d'un point critique.

Exercice 1.19. Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ et $P_{n+1} = XP_n'$. Montrer qu'il existe une suite $r_n > 0$ avec $r_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ tel que les racines de P_n sont dans $B(0, r_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 1.19. Pour $P_0(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ on a que $P_n(X) = \sum i^n a_i X^i$, donc si λ_n est une racine de P_n, on a

$$\lambda_n^d d^n a_d \left(1 + \sum_{i=0}^{d-1} \left(\frac{i}{d}\right)^n \frac{a_i}{a_d} \lambda_n^{i-d}\right) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \left|\sum_{i=0}^{d-1} \left(\frac{i}{d}\right)^n \frac{a_i}{a_d} \lambda_n^{i-d}\right| \\ &\leqslant \frac{|a_{\max}|}{|a_d|} \left(\frac{d-1}{d}\right)^n \sum_{i=1}^{d} |\lambda_n|^{-i}. \end{aligned}$$

En particulier, pour n assez grand on a $|\lambda_n| \leqslant 1$ car sinon $\sum_{i=1}^d |\lambda_n|^{-i} \geqslant d$ et on a une contradiction, et si $|\lambda_n| \leqslant 1$ alors $\sum_{i=1}^d |\lambda_n|^{-i} \leqslant d|\lambda_n|^{-d}$ et donc

$$|\lambda_n|^d \leqslant \frac{|a_{\max}|}{|a_d|} \left(\frac{d-1}{d}\right)^n$$

ce qui conclut.

Exercice 1.20. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et

$$Q(x) = e^{-x} \int_0^x P(t) e^t dt$$

Montrer qu'il y a equivalence entre les deux propositions suivantes

1. $Q(x) \in \mathbb{R}[X]$,
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k P^{(k)}(0) = 0$.

Solution 1.20. On note

$$u_k = \int_0^x t^k e^t.$$

On a $u_0 = e^x - 1$ et par intégration par partie

$$u_{k+1} = x^{k+1}e^x - (k+1)u_k.$$

Donc par récurrence on montre que

$$u_k = R_k(x)e^x + (-1)^{k+1}k!$$

avec $R_k \in \mathbb{R}[X]$. Donc pour $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ on a

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k R_k(x) + e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}a_k k!\right).$$

Et on conclut avec $P^{(k)}(0) = a_k k!$.

Exercice 1.21. Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, (P \circ P)(z) = 0\}$$

Solution 1.21. Soit z une racine de P. Par égalité des ensembles on a $P(z) = 0$ et $P(P(z)) = 0$. Donc

$$0 = P(P(z)) = P(0)$$

et alors 0 est racine de P. Montrons que c'est la seule racine. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ une racine de P. Si $P \neq 0$ alors le polynome $Q = P - z_1$ admet une racine complexe donc il existe z tel que $P(z) = z_1$. On a donc

$$P(P(z)) = P(z_1) = 0$$

et $P(z) = 0$ et par l'égalité d'ensemble. Conclusion $z_1 = 0$. C'est donc la seule racine possible et les polynômes P sont alors de la forme $P = 0$ ou $P = X^n$. On vérifie que ces polynomes satisfont la condition de l'énoncé.

Exercice 1.22. Soit $P_n = X^n - X + 1$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, les racines de P_n sont distinctes. On les notera $z_1, \dots, z_n$.
2. Calculer le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

($(1+z_i)$ sur la diagonale et 1 partout ailleurs)

Solution 1.22. 1) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine multiple de P_n, alors $P_n(z) = P_n'(z) = 0$. Donc

$$\begin{cases} P_n(z) = z^n - z + 1 = 0 \\ P_n'(z) = nz^{n-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

alors
$$\begin{cases} nz^n - nz + n = 0 \\ nz^n - z = 0 \end{cases}$$
et donc $z = \frac{n}{n-1}$ mais alors on n'a pas $P_n'(z) = 0$. Conclusion il n'y a pas de racine multiple.

2) On utilise la linéarité par rapport à la première ligne pour écrire

$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}$$

Pour le premier déterminant, on retire la première colonne à toutes les autres colonnes. On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 0 & z_n \end{vmatrix} = z_2 \cdots z_n.$$

Pour la deuxième, on a

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} = z_1 \begin{vmatrix} 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1+z_n \end{vmatrix}$$

En combinant les 3 calculs précédents, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} = z_2 \cdots z_n + z_1 \begin{vmatrix} 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1+z_n \end{vmatrix}$$

On peut alors itérer le processus pour obtenir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} = z_2 \cdots z_n + z_1 z_3 \cdots z_n + z_1 z_2 \begin{vmatrix} 1+z_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1+z_n \end{vmatrix}$$

En continuant l'itération, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} z_k + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} z_k.$$

Comme les z_j sont les racines du polynôme P_n, le produit de tous les z_i est égal au terme d'ordre 0 du polynôme P_n multiplié par $(-1)^n$ et le deuxième terme est égale au coefficent associé à X (le terme d'ordre 1) multiplié par $(-1)^{n-1}$. On a donc

$$\prod_{k=1}^{n} z_k + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} z_k = (-1)^n + (-1)^{n-1} \times (-1) = 2(-1)^n.$$

Exercice 1.23. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $s_1, \ldots, s_n$ ses valeurs propres. Pour $p \in \{1, 2\}$, on pose

$$N_p(M) := \left(\sum_{i=1}^{n} |s_i|^p \right)^{1/p}.$$

1. 1) Montrer que N_2 est une norme.
   Indication : Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire (sur l'espace des matrices symétriques).
2. 2) On cherche à montrer que N_1 est une norme.
   (a) Montrer que $N_1(M) = \sup\{|\mathrm{Tr}(MU)| \ : \ U \in O_n(\mathbb{R})\}$
   (b) Conclure.

Solution 1.23. 1) On a

$$N_2(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |s_i|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^2)} = \sqrt{\langle M, M \rangle}.$$

On reconnait alors la norme associée au produit scalaire sur les matrices.

2) a) En utilisant le théorème spectral, on a $M = P^t S P$ où S est diagonale. Et donc $\mathrm{Tr}(MU) = \mathrm{Tr}(SPUP^t)$. On remarque que $U \mapsto PUP^t$ est une bijection du groupe orthogonal dans lui-même. Il suffit donc de démontrer le résultat de la question pour la matrice S qui est diagonale.

On cherche donc à montrer $N_1(S) = \sup\{|\mathrm{Tr}(SU)| \ : \ U \in O_n(\mathbb{R})\}$. Pour montrer que la borne est atteinte, on choisit la matrice U diagonale avec des coefficients égaux à 1 ou -1 sur la diagonale (en choisissant $U_{ii} = \mathrm{sgn}(s_i)$) et alors

$$\mathrm{Tr}(SU) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sgn}(s_i) s_i = \sum_{i=1}^{n} |s_i| = N_1(M).$$

Pour montrer que la borne n'est pas dépassée, on écrit

$$\mathrm{Tr}(SU) = \sum_{i=1}^{n} e_i^t S U e_i = \sum_{i=1}^{n} (S e_i)^t U e_i = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i^t U e_i$$

On a donc

$$|\mathrm{Tr}(SU)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |s_i| |e_i^t U e_i|,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en notant $\|x\|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$)

$$|e_i^t U e_i| \leqslant \|e_i\| \, \|Ue_i\| = 1$$

et donc

$$|\mathrm{Tr}(SU)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |S_{ii}| = N_1(S),$$

ce qui conclut.

b) Il suffit de montrer $N_1(M + M') \leqslant N_1(M) + N_1(M')$. On a pout cela

$$\begin{aligned} N_1(M + M') &= \sup\{|\mathrm{Tr}((M + M')U)| \, : \, U \in O_n(\mathbb{R})\} \\ &\leqslant \sup\{|\mathrm{Tr}(MU)| + |\mathrm{Tr}(M'U)| \, : \, U \in O_n(\mathbb{R})\} \\ &\leqslant \sup\{|\mathrm{Tr}(MU)| \, : \, U \in O_n(\mathbb{R})\} + \sup\{|\mathrm{Tr}(M'U)| \, : \, U \in O_n(\mathbb{R})\} \\ &= N_1(M) + N_1(M'). \end{aligned}$$

Exercice 1.24. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que A^m est diagonalisable. Montrer que A^{m+1} est diagonalisable.

Solution 1.24. Si A^m est diagonalisable, elle est annulée par un polynôme scindé à racine simple de la forme $\prod_{i=0}^{k}(X - \lambda_i)$. On distingue deux cas : 0 n'est pas valeur propre et 0 est valeur propre.

Dans le premier cas, on voit que le polynôme $\prod_i (X^m - \lambda_i)$ annule A, mais ce polynôme est scindé à racines simples. En effet chacun des polynomes $X^m - \lambda_i$ est scindé à racine simple et si on considère une racine z_1 de $X^m - \lambda_i$ et z_2 de $X^m - \lambda_j$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ alors $z_1^m = \lambda_i \neq \lambda_j = z_2^m$ donc $z_1 \neq z_2$. A est donc diagonalisable, et donc A^{m+1} est aussi diagonalisable.

Dans le cas où 0 est valeur propre, comme A^m est diagonalisable, on a la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker} A^m \oplus \mathrm{Ker}(A^m - \lambda_1) \ldots \oplus \mathrm{Ker}(A^m - \lambda_k).$$

Par ailleurs chacun de ces sous espaces est stable par A. On peut donc étudier les endomorphismes induits sur chaque espace propre de A^m. Sur $\mathrm{Ker}A^m$, on a $A^m = 0$ et donc $A^{m+1} = 0$. Sur tous les autres, A est annulé par un polynôme scindé à racines simples et est donc diagonalisable.

Exercice 1.25. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 0 ou 1. On suppose que $A^t A = kI_n + J$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On veut montrer que $AA^t = A^t A$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que AJ et JA sont proportionnelles à J

   Indication : Pour AJ, montrer qu'il suffit de monrer que Ae est proportionnel à e (avec $e = (1, \ldots, 1)$) puis poser $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et calculer $(Ae)^t (Ae_i)$ et $e \cdot (Ae_i)$
3. Montrer que $JA = AJ$

4. Conclure.

Question bonus : Quelles sont les valeurs possibles pour k (en fonction de n).

Solution 1.25. 1) La matrice J est symétrique donc diagonalisable, de valeur propre n associé au vecteur $e = (1, \cdots, 1)$ et de valeur propre 0 car elle est de rang 1. Donc $kI_n + J$ est diagonalisable de valeurs propres $n + k > 0$ et $k > 0$. Donc AA^t est inversible, donc A est aussi inversible.

2) Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$k + 1 = (kI_n + J)_{ii} = (A^t A)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}^2 = \#\{j : A_{ji} = 1\}$$

Donc sur chaque colonne le nombre de 1 vaut $k + 1$. Le nombre de zéro sur chaque colonne est donc $n - k + 1$. Alors

$$(JA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik} A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik} A_{ki} = (k + 1) = (k + 1) J_{ij}$$

et donc $JA = (k + 1)J$.

Pour le produit AJ, il suffit de montrer que Ae est proportionnel à e. Pour cela on utilise l'identité $A^t A = kI_n + J$ pour obtenir, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(Ae)^t (Ae_i) = ke \cdot e_i + e \cdot Je_i = k + Je \cdot e_i = (k + n). \tag{1.1}$$

En utilisant la paragraphe précédent, on sait que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le vecteur Ae_i est composé de 1 et de 0, le nombre de 1 est $k + 1$ (car Ae_i est la i-ième colonne de A). On a donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$e^t A e_i = (k + 1).$$

En combinant l'identité précédente avec (1.1), on obtient, our tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\left(Ae - \frac{k+n}{k+1} e \right)^t \cdot Ae_i = 0.$$

Comme $Ae_1, \ldots, Ae_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit

$$Ae = \frac{k+n}{k+1} e.$$

3) On pose $AJ = \lambda J$ et $AJ = \mu J$. L'identité $n\lambda = \mathrm{Tr}(AJ) = \mathrm{Tr}(JA) = n\mu$ permet de conclure.

4) On a donc $AA^t A = kA + AJ = kA + JA = A^t A^2$ et donc $AA^t A = A^t A^2$. En simplifiant par A à droite (A est inversible, on obtient le résultat).

Question bonus : On doit avoit $\frac{k+n}{k+1} = k + 1$ et donc $k + n = (k + 1)^2$ et donc $n = k^2 + k + 1$.

Exercice 1.26. Soit A une matrice symétrique à coefficients réels. On suppose que $a_{11}, \dots, a_{nn}$ sont les valeurs propres de A.

1) Montrer que A est diagonale.

2) Ce résultat est-il vrai si on ne suppose plus que la matrice A est symétrique ?

Solution 1.26. 1) On observe que $\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(AA^t) = \sum_{ij} a_{ij}^2$. Mais cette trace est aussi égale à la somme des carrés des valeurs propres. En utilisant l'énoncé on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 = \mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{ij} a_{ij}^2.$$

On obtient donc $\sum_{i \neq j} a_{ij}^2 = 0$. La matrice est diagonale.

2) La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un contre-exemple.

Exercice 1.27. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ stable par multiplication. On cherche à montrer que $I_n \in V$ et on procède par l'absurde et on suppose que $I_n \notin V$.

1. Montrer que $M^2 \in V \Rightarrow M \in V$
2. Montrer que les matrices $E_{ij} \in V$.
3. Conclure

Solution 1.27. 1) Par l'absurde, on suppose $M^2 \in V$ mais $M \notin V$. On a alors $M_n(\mathbb{R}) = V + \mathrm{Vect}(M)$ donc $I_n = A + \lambda M$ avec $A \in V$ et $\lambda \neq 0$, donc $I_n - \lambda M = A$ et donc $(I_n - \lambda M)^2 \in V$ en développant on obtient que $I_n - 2\lambda M + \lambda^2 M^2 \in V$ et donc $I_n - 2\lambda M \in V$. En combinant avec $I_n - \lambda M$ on obtient $M \in V$.

2) On a $E_{ij}^2 = 0$ si $i \neq j$ et donc $E_{ij} \in V$ par la première question. Pour E_{ii} on écrit $E_{ii} = E_{ij}E_{ji} \in V$ car V est stable par multiplication.

3) Toutes les matrices élémentaires sont dans V donc $V = M_n(\mathbb{R})$ ce qui est une contradiction.

Exercice 1.28. 1) Montrer qu'une matrice symétrique réelle inversible $S \in S_n(\mathbb{R})$ possède k valeurs propres positives si et seulement si il existe deux espaces vectoriels F et G tels que $\dim F = k$, $\dim G = n - k$ et

$$\forall (x, y) \in F \times G,\ \langle x, Sx \rangle \geqslant 0 \ \text{ et } \ \langle y, Sy \rangle \leqslant 0.$$

2) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que S et $P^t SP$ ont le même nombre de valeurs propres positives.

Solution 1.28. 1) *Sens direct :* Comme la matrice S est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. On dénote $e_1, \dots, e_k$ une famille orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres positives et $e_{k+1}, \dots, e_n$ une famille orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres négatives. Les espaces $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ satisfont les conditions de l'énoncé.

Sens indirect : Soit F et G les deux sous-espaces donnés par l'enoncé. Si S a strictement plus que k valeurs propres positives, alors on considère la somme E_+ des espaces propres associés aux valeurs propres positives. Cet espace a une dimension strictement supérieur à k, il a donc une intersection non-triviale avec l'espace G (la somme des dimensions est strictement plus grande que n), ce qui est une contradiction. Si S a strictement moins que k valeurs propres positives, alors on considère la somme E_- des espaces propres associés aux valeurs propres négatives. Cet espace a une dimension strictement supérieur à $n-k$, il a donc une intersection non-triviale avec l'espace F.

2) Soit k le nombre de valeurs propres positives de S et F, G les deux espaces vectoriels donnés par la question 1. On considère alors les espaces vectoriels $P^{-1}F := \{P^{-1}x\, x \in F\}$ et $P^{-1}G$. On a, pour tout $y \in P^{-1}F$ et $z \in P^{-1}G$ (donc $Py \in F$ et $Pz \in G$)

$$y^t P^t S P y = (Py)^t S P y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad z^t P^t S P z = (Pz)^t S P z \leqslant 0$$

Par ailleurs, P étant inversible, les espaces $P^{-1}F$ et $P^{-1}G$ ont les mêmes dimensions que F et G (respectivement).

Exercice 1.29. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de A. Montrer que $\lambda = 0$.
2. On suppose n est impair. Montrer que $\det(A) = 0$.
3. On suppose n est pair. Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\det(A+J) = \det(A)$.

Solution 1.29. 1) Soit X un vecteur propre associé à une valeur propre λ. Alors par antisymétrie $0 = X^t A X = \lambda X^t X = \lambda \|X\|^2$. On a donc $\lambda = 0$.

2) La dimension est impaire donc le polynome caractéristique admet une racine réelle. La matrice a donc une valeur propre réelle qui est nulle. Son déterminant est donc nul.

3) En diagonalisant la matrice J dans une base orthogonale,

$$O^t J O = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \tilde{J}$$

on a alors

$$\det(A+J) = \det O^t \det(OAO^t + \tilde{J}) \det O = \det(OAO^t + \tilde{J}).$$

Comme $A \to OAO^t$ est une bijection sur les matrices antisymétriques, il s'agit donc de démontrer que pour toute matrice antisymétrique A, $\det(\tilde{J} + A) = \det(A)$. En utilisant la multilinéarité du déterminant,

$$\det(\tilde{J}+A) = \begin{vmatrix} n + a_{11} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & \\ \vdots & & (a_{i,j})_{2\le i,j\le n} & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix} = \det A + \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (a_{i,j})_{2\le i,j\le n} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

Le deuxième determinant est nul en utilisant le résulat de la question 2.

Exercice 1.30. Soit $U \in O_3(\mathbb{R})$ de déterminant -1. Montrer que -1 est valeur propre de U.

Solution 1.30. On appelle λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de U. En dimension 3 le polynome caractéristique au moins une racine réelle et comme U est orthogonal, les valeurs propres réelles sont 1 ou -1. Si les 3 valeurs propres sont réelles, on conclut facilement. Si une seule est réelle on peut supposer que c'est λ_3. Les racines complexes sont conjuguées $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ et donc $\det(U) = -1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\lambda_1|^2\lambda_3$. Comme $|\lambda_1|^2$ est positif (en fait égal à 1), λ_3 doit être égale à -1.

Exercice 1.31. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 1.31. La matrice X commute avec la matrice avec que des 1 (parce que X^2+X commute avec X) qui est diagonalisable avec deux valeurs propres : 2 et 0 avec pour vecteurs propres $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Donc X est aussi diagonalisable avec vecteurs propres $(1, 1)$ et $(1, -1)$. En notant λ_1, λ_2 les valeurs propres et P la matrice de changement de base, on a

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On voit qu'elles vérifient $\lambda_1^2 + \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2^2 + \lambda_2 = 0$. On a donc $\lambda_1 \in \{1, -2\}$ et $\lambda_2 \in \{0, -1\}$.

Exercice 1.32. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ et $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme $D(P) = P'$.

1. Vérifier que D est bien un endomorphisme.
2. Existe-t-il $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ linéaire tel que $T \circ T = D$?

Solution 1.32. 1) C'est juste du cours.

2) Si un tel T existe alors $\ker(T^2) = \ker(D)$, mais le noyau de D est de dimension 1, donc le noyau de T est de dimension 0 ou 1. Il est en fait de

dimension 1 (s'il était de dimension 0 alors le noyau de D le serait aussi ce qui est faux).

On a donc $\ker(T^2) = \ker(T)$. Ceci implique que $\ker(T^p) = \ker(T)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec le calcul suivant

$$T^{p+1}(P) = 0 \iff T^2(T^{p-1}(f)) = 0 \iff T(T^{p-1}(f)) = 0 \iff T^p(P) = 0.$$

On a donc $\ker(D^2) = \ker(T^4) = \ker(T^2) = \ker(D)$, mais les fonctions affines sont dans $\ker(D^2)$ (et pas dans $\ker(D)$)

(Autre méthode) Notons A la matrice de T, alors $A^2 =$ une matrice nilpotente d'ordre $n+1$, donc $A^{2(n+1)} = 0$, donc $A^{n+1} = 0$ aussi, donc $D^{\lceil (n+1)/2 \rceil} = 0$, et l'exposant est inférieur à $n/2 + 1 < n/2 + 1$ (car $n \geqslant 2$), qui est l'ordre de nilpotence de D.

Exercice 1.33. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est $\geqslant 0$ si tous ces coefficients sont positifs. On étend la définition aux vecteurs colonnes. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est monotone si elle est inversible et que $A^{-1} \geqslant 0$. Montrer que

$$A \text{ est monotone} \iff \{X \in \mathbb{R}^n \,;\, AX \geqslant 0\} \subseteq \{X \in \mathbb{R}^n \,;\, X \geqslant 0\}\,.$$

Solution 1.33. "$\Rightarrow$" : Si A est monotone et $AX \geqslant 0$ alors $X = A^{-1}AX \geqslant 0$ car un produit de matrices à coefficients positifs est positif.

"$\Leftarrow$" : On montre que A est inversible. En effet, si $AX = 0$ alors $AX \geqslant 0$ et donc $X \geqslant 0$. Mais on a aussi $A(-X) = 0$ et donc $-X \geqslant 0$, et donc $X = 0$.

Soit E_i le vecteur colonne avec un 1 sur la $i-$ieme ligne et des 0 ailleurs. On pose $X = A^{-1}E_i$. On a donc $AX \geqslant 0$ et donc $X \geqslant 0$. Donc $A^{-1}E_i \geqslant 0$. Ceci est vrai pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 1.34. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels, on définit

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une base $(P_0, \ldots, P_n)$ orthonormale pour ce produit scalaire telle que P_i est de degré i et de coefficient dominant positif
3. On admettra que la base de la question 2 est unique. Calculer $P_i^{(i)}(a_i)$.
4. Calculer la famille P_k dans le cas où : $a_0 = \ldots = a_n = \alpha \in \mathbb{R}$

Solution 1.34. 1) On vérifie la définition : C'est clairement bilinéaire et positif. Pour $(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$, on a $P^{(n)}(a_n) = 0$ mais comme c'est le coefficient devant X^n, on en déduit que P est au plus de degré $n - 1$, puis on itère.

2) C'est Gram-Schmidt appliqué à la famille $(1, \ldots, X^n)$

3) On procède par récurrence en posant l'hypothèse suivante

$$HR_p : \forall i \leqslant p, (P_i^{(i)}(a_i) = 1 \,\text{et}\, \forall k < i, P_i^{(k)}(a_k) = 0).$$

On obtient un résultat plus fort avec l'information suivante $P_i^{(k)}(a_k)$ si $k < i$.

Initialisation : On a $(P_0, P_0) = P_0(a_0)^2 = 1$ et donc $P_0 = 1$.

Hérédité : Soit $i < k$, on a $(P_k, P_i) = \sum_{j=0}^{i} P_k^{(j)}(a_j) P_k^{(j)}(a_j) = 0$. On peut simplifier le terme du milieu en utilisant l'hypothèse de récurrence, et on obtient $\sum_{j=0}^{i} P_k^{(j)}(a_j) P_k^{(j)}(a_j) = P_k^{(i)}(a_i)$ et donc $P_k^{(i)}(a_i) = 0$.

Par ailleurs, on a : $(P_k, P_k) = 1 = \sum_{j=0}^{k} P_k^{(j)}(a_j)^2 = P_k^{(k)}(a_k)^2$. Comme le coefficient dominant de P_k est positif, on a $P_k^{(k)}(a_k) = 1$.

4) On a $P_k = \frac{1}{k!}(X - \alpha)^k$.

Exercice 1.35. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ avec B symétrique définie positive. On suppose que pour tout X (vecteur colonne)

$$\left| X^t A X \right| \leqslant X^t B X.$$

1. Montrer que $|\det A| \leqslant \det B$. (Indication : on pourra chercher à définir $B^{1/2}$.)
2. Soient $S_1, \ldots, S_k$ des matrices symétriques définies positives (dans $S_n(\mathbb{R})$) et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels (non tous nuls). Montrer que

$$\left| \det \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i \right) \right| \leqslant \det \left(\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \, S_i \right).$$

Solution 1.35. 1) En utilisant le théorème spectral on définit la matrice $B^{1/2}$. En appliquant le résultat avec $Y = B^{-1/2} X$ on a

$$\left| X^t (B^{-1/2} A B^{-1/2}) X \right| \leqslant X^t X.$$

Comme la matrice $B^{-1/2} A B^{-1/2}$ est symétrique, toutes ses valeurs propres sont plus petites que 1 en valeur absolue. On a donc $\left| \det(B^{-1/2} A B^{-1/2}) \right| \leqslant 1$ et donc $|\det A| \leqslant \det B$.

2) On applique le résultat avec $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i$ et $B = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \, S_i$. On vérifie que B est bien définie positive et la condition de la question 1

$$\left| X^t A X \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^t S_i X \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \, X^t S_i X = X^t B X.$$

Exercice 1.36. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés :

1. A est diagonalisable.
2. Il existe une matrice S symétrique définie positive telle que $AS = SA^t$.

Indication : on pourra introduire $S^{1/2}$.

Solution 1.36. (i) $\implies$ (ii). Si A est diagonalisable $A = P^{-1}DP$ avec P inversible et D diagonale. Alors $A^t = P^tD(P^{-1})^t$. On peut poser $S = P^{-1}(P^{-1})^t$ et on a bien

$$AS = P^{-1}D(P^{-1})^t = P^{-1}(P^t)^{-1}P^tD(P^{-1})^t = SA^t.$$

(ii) $\implies$ (i). On définit $S^{1/2}$ la racine carrée de S. On a que AS est symétrique (car $AS = SA^t$), et donc $S^{-1/2}(AS)S^{-1/2} = S^{-1/2}AS^{1/2}$ est aussi symétrique. Donc $S^{-1/2}AS^{1/2}$ est diagonalisable et $S^{-1/2}AS^{1/2} = PDP^{-1}$ et donc $A = (S^{1/2}P)D(S^{1/2}P)^{-1}$ et A est diagonalisable.

Exercice 1.37. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes : (i) $A\bar{A} = I_n$ et (ii) $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\bar{S}^{-1}$.

Indication : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on posera $S_\theta = e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I_n$.

Solution 1.37. On vérifie par un calcul explicite que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$A\bar{S}_\theta = A(e^{-i\theta}\bar{A} + e^{i\theta}I_n) = e^{-i\theta}I_n + e^{i\theta}A = S_\theta.$$

Comme $\det(A + zI_n)$ admet au plus n racine dans $\mathbb{C}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $0 \neq \det(A + e^{-2i\theta}I_n) = e^{-in\theta}\det S_\theta$ et donc S_θ est inversible.

Exercice 1.38. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice n et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AN = NA$. Montrer que A est un polynôme en N.

Solution 1.38. On peut vérifier que $\{x, Nx, \ldots, N^{n-1}x\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On décompose Ax dans cette base en écrivant

$$Ax = \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n N^{n-1}x.$$

Montrons que $A = \lambda_1 I_n + \ldots + \lambda_n N^{n-1}$. Pour cela, on remarque que

$$AN^kx = N^kAx = \lambda_1 N^kx + \ldots + \lambda_n N^{n+k-1}x = (\lambda_1 I_n + \ldots + \lambda_n N^{n-1})(N^kx).$$

Donc les matrices A et $(\lambda_1 I_n + \ldots + \lambda_n N^{n-1})$ prennent les mêmes valeurs lorsqu'elles sont évaluées sur la base $x, Nx, \ldots, N^{n-1}x$, elles sont donc égales.

Exercice 1.39. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si ses deux valeurs propres sont complexes conjuguées, il existe une matrice de passage P, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$A = rP^{-1}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}P.$$
2. A quel condition existe t-il $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ tel que tout point $a \in \mathbb{R}^2$ est dans le triangle A^nx, A^ny, A^nz pour tout n suffisament grand ?

Solution 1.39. 1) En notant $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de A, $X \in \mathbb{C}^2$ le vecteur propre associé à λ, $\bar{X}$ est le vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$. En notant $X = Y + iZ$ et $\lambda = |\lambda|(\cos\theta + i\sin\theta)$ on a

$$AY + iAZ = AX = |\lambda|(\cos\theta + i\sin\theta)X = |\lambda|\left(\cos\theta Y - \sin\theta Z + i(\sin\theta Y + \cos\theta Z)\right).$$

et donc

$$\begin{cases} AY = |\lambda| (\cos\theta Y - \sin\theta Z) \\ AZ = |\lambda| (\sin\theta Y + \cos\theta Z) \end{cases}$$

On a que dans la base (Y, Z) (qui est une base sinon Y est vecteur propre de A) la matrice A est une rotation multiplié par $|\lambda|$.

2) Si les deux valeurs propres sont complexes conjuguées alors par la question précédente il faut et suffit que $|\lambda| > 1$. Si les deux valeurs propres sont réels distincts alors il est necessaire et suffisant qu'elles soient toute les deux en valeurs absolue strictement plus grand que 1.

Si les deux valeurs propres sont égales, alors à changement de base près la matrice est de la forme

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où λ est la valeur propre. Sa puissance $n-i$eme est $\lambda^n \begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En choisissant les vecteurs $(1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$ et leurs images on voit qu'il est necessaire et suffisant que $|\lambda| > 1$.

Dans tous les cas, il faut donc que le module des deux valeurs propres soit strictement plus grand que 1.

Exercice 1.40. Soit P_k une famille de polynome avec $\deg(P_k) = k$. On considère l'opérateur $L = \sum_{k\in\mathbb{N}} P_k D^k$ où D est l'opérateur de dérivation. A quel condition sur les P_k a t-on que L est bijective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Solution 1.40. On calcule $L(X^i) = \sum_{k=0}^{i+1} P_k(X) X^{i-k} \frac{i!}{(i-k+1)!}$ et donc si on écrit a_k le coefficient de P_k de degré k, alors $\deg(L(X^i)) \leqslant i$ et son coefficient de degré i est $i! \sum_{k=0}^{i+1} \frac{a_k}{(i-k+1)!}$. La CNS est que ces coefficients sont non nul pour tout $i \in [0...n]$. Si c'est le cas alors la famille des $L(X^i)$ est libre donc une base, et sinon on prend le premier i_0 où ce coefficient est 0 et la famille des $L(X^i)$ pour $i \leqslant i_0$ est alors liée car d'image de dimension strictement inférieur à la taille de la famille.

Exercice 1.41. Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$ et $A_{n+1} = 2A_n - A_n^2$ pour tout $n \geqslant 0$. Calculer la limite de $\det(A_n)$ quand $n \to +\infty$. ´

Solution 1.41. On diagonalise et on note λ_n, μ_n les valeurs propres de A_n. On a alors

$$\lambda_0 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \mu_0 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_{n+1} = f(\lambda_n), \quad \mu_{n+1} = f(\mu_n)$$

où $f(x) = x(2 - x)$. Par une étude de suite standard on montre que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \mu_n = 1.$$

Et on peut écrire

$$A_n = P \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_2.$$

Exercice 1.42. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons J_x la matrice carrée de taille n contenant des x sur sa diagonale et des 1 partout ailleurs.

1. Calculer $\det(J_x)$.
2. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ de $\{1, \ldots, n\}$, on note $s(\sigma)$ sa signature et $f(\sigma)$ son nombre de points fixes. Montrer que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \frac{s(\sigma)}{f(\sigma)+1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

Solution 1.42. 1) On note $A = J_x - (x-1)I_n$ qui est la matrice remplie de 1 et donc a comme valeurs propres n (de multiplicité 1) et 0 (de multiplicité $n-1$), donc $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X-n)$, et $\det(J_x) = \chi_A(1-x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$.

2) On réécrit la définition du déterminant de la matrice J_x :

$$\det(J_x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} s(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (J_x)_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} s(\sigma) x^{f(\sigma)}.$$

On remarque donc en intégrant entre 0 et 1 que

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \frac{s(\sigma)}{f(\sigma)+1} = \int_0^1 \det(J_x) dx &= \int_0^1 (x-1)^{n-1}(x+n-1) dx \\
&= \int_0^1 (x-1)^n dx + n \int_0^1 (x-1)^{n-1} \\
&= \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + n \left[\frac{(x-1)^n}{n} \right]_0^1 \\
&= -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - (-1)^n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.43. Un répunit est un nombre entier positif dont l'écriture décimale ne comprend que des 1. Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que l'image d'un répunit par ce polynôme soit toujours un répunit.

Solution 1.43. n est un répunit ssi $9n+1$ est une puissance de 10 (supérieure à 10). Si f est un polynôme, en posant $g(n) = 9f(\frac{n-1}{9}) + 1$, f envoit répunit sur répunit ssi le polynôme g envoit toutes les puissances de 10 (supérieures à 10) sur une puissance de 10 (supérieure à 10).

Supposons que g soit un tel polynôme. Si le plus grand coefficient de g est $a_k X^k$ ($k \geqslant 0$), alors $g(10^i)/10^{ki} \to a_k$ quand $i \to +\infty$, or ce ratio est une puissance de 10 par hypothèse, donc il est constant à partir d'un certain rang et il existe $I \in \mathbb{Z}$ tel que $a_k = 10^I$. Par conséquent, $g - 10^I X^k$ est un polynôme qui admet une infinité de racines, donc est nul, d'où $g(x) = 10^I x^k$. A noter que $g(10) = 10^{I+k}$ doit être une puissance de 10 supérieure à 10, donc $I \geqslant 1-k$, et donc pour tout $i \geqslant 1$, $g(10^i) = 10^{ki+I} \geqslant 10^{k+I} \geqslant 10$.

Par conséquent, il existe $k \geqslant 0$ et $I \geqslant 1-k$ entiers tels que

$$f(n) = \frac{1}{9}(10^I(9n+1)^k - 1),$$

et tous ces polynômes fonctionnent.

Chapitre 2

Analyse

Exercice 2.1. Soit $f : [0,1] \to (0,\infty)$ une fonction intégrable tel que $f(x)f(1-x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx \geqslant 1.$$

Solution 2.1. Par changement de variable $u = 1-x$ on a

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 &= \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(1-x)dx\right) \\
&\geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)f(1-x)}dx\right)^2 \\
&= \left(\int_0^1 1dx\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

où on a utilisé Cauchy-Schwarz.

Exercice 2.2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (deux fois dérivables dont la seconde dérivée est continue) tel que

$$f(7x+1) = 49f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 2.2. On trouve x_0 tel que $7x_0 + 1 = x_0$, donc $x_0 = -\frac{1}{6}$. Alors

$$f\left(7\left(-\frac{1}{6}\right)+1\right) = f\left(-\frac{1}{6}\right) = 49f\left(-\frac{1}{6}\right)$$

Donc $f\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$. Maintenant on dérive notre équation

$$7f'(7x+1) = 49f'(x)$$
$$49f''(7x+1) = 49f''(x)$$

Donc $f''(x) = f''(7x+1)$ pour tout x. On pose $g(u) = f''(u - \frac{1}{6})$. Alors

$$g(u) = f''(u - \frac{1}{6}) = f''(7u - \frac{7}{6} + 1) = f''(7u - \frac{1}{6}) = g(7u).$$

Montrons que g est constante : pour tout u

$$g(u) = g(\frac{u}{7^n}) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{u}{7^n}) = g(0)$$

par continuité. Donc g est constante il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x) = a$ pour tout x. Finalement les seules solutions sont $f(x) = \frac{a}{2}\left(x + \frac{1}{6}\right)^2$.

Exercice 2.3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 = 0$ et

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ converge.

Solution 2.3. Calculons les premiers termes : $a_1^3 = -8$, donc $a_1 = -2$. $a_2^3 = -4$ donc $a_2 = -2^{2/3}$. Comme on a ici des valeurs négatives posons $b_n = -a_n$ et on a

$$b_{n+1} = \sqrt[3]{8 - b_n^2}.$$

La fonction $f(t) = \sqrt[3]{8 - t^2}$ est décroissante sur $[0, \infty[$, positive sur $[0, 2\sqrt{2}]$ et $f([0, 2\sqrt{2}]) \subset [0, 2] \subset [0, 2\sqrt{2}]$. Donc $b_n \in [0, 2]$ pour tout n.

On a que $f(t) - t$ est strictement décroissante, $f(0) = 2$ et $f(2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ donc il existe un unique t^* tel que $f(t^*) = t^*$.

$$f'(t) = -\frac{2}{3}t(8 - t^2)^{-2/3}.$$

Ensuite

$$b_{n+1} - b_n = f(b_n) - f(b_{n-1}) = f'(c)(b_n - b_{n-1})$$

pour un certain $c \in [b_{n-1}, b_n]$. Il suffit alors de montrer (par une analyse de fonction) qu'il existe $\eta < 1$ tel que pour tout $t \in [0, 2]$,

$$|f'(t)| < \eta.$$

Alors

$$|b_n - b_{n-1}| \leqslant C\eta^n$$

dont la somme converge.

Exercice 2.4. Soit V l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ différentiables sur $]0, 1[$ avec la propriété $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Trouver tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in V$ il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$f(\xi) + \alpha = f'(\xi).$$

Solution 2.4. On pose
$$f'(\xi) - f(\xi) = h(\xi)$$
et on résout l'équation différentielle
$$\begin{aligned} f'(\xi)e^{-\xi} - f'(\xi)e^{-\xi} &= h(\xi)e^{-\xi} \\ \frac{d}{d\xi}[f(\xi)e^{-\xi}] &= h(\xi)e^{-\xi} \\ f(\xi)e^{-\xi} &= \int_0^\xi h(t)e^{-t}dt \\ f(\xi) &= e^\xi \int_0^\xi h(t)e^{-t}dt \end{aligned}$$

Supposons que $h(t) > \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$, alors
$$f(1) > \alpha e \int_0^1 e^{-t}dt = \alpha(e-1)$$
ce qui est absurde si $\alpha \geqslant \frac{1}{e-1}$. Même raisonnement dans le cas $h(t) < \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$, alors
$$f(1) < \alpha e \int_0^1 e^{-t}dt = \alpha(e-1)$$
ce qui est absurde si $\alpha \leqslant \frac{1}{e-1}$. Conclusion il existe $t \in [0,1]$ tel que $h(t) = \frac{1}{e-1} = \alpha$. C'est le seul α avec cette propriété car
$$f(\xi) + \frac{1}{e-1} = f'(\xi)$$
admet une solution dans V.

Exercice 2.5. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On modifie la méthode de Newton de la manière suivante. On définit la suite par
$$u_0 \neq u_1, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$$

1. Montrer que si u_0, u_1 sont suffisamment proches de 0 alors $u_n \to 0$ pour $n \to \infty$.
2. Montrer que dans ce cas $u_n = o(u_{n-1})$ lorsque $n \to \infty$
3. On considère le cas $f(x) = x + x^2$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|u_n|}{\log|u_{n-1}|} = \gamma$$
avec $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

Solution 2.5. 1) Pour $|u_0|, |u_1| \leqslant \epsilon$, on

$$\begin{aligned}\frac{f(u_1) - f(u_0)}{u_1 - u_0} &= f'(c) \quad c \in]u_0, u_1[\\ &= f'(0) + O(\epsilon)\end{aligned}$$

et

$$f(u_1) = u_1 f'(0) + O(\epsilon^2).$$

Donc

$$\begin{aligned}u_2 &= u_1 - \frac{u_1 f'(0) + O(\epsilon^2)}{f'(0) + O(\epsilon)} \\ &= u_1 - u_1 + O(u_1\epsilon + \epsilon^2) \\ &= O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Donc $u_2 = O(\epsilon^2)$. On fait la même chose pour $u_3 = O(\epsilon^2)$. (Par le même calcul mais en étant plus précis sur $O(...)$ on obtient $|u_2| \leqslant 4 \sup_{x \in [-\epsilon, \epsilon]} |f''(x)| \epsilon^2)$. Par un raisonnement similaire on une relation de récurrence entre (u_{2n}, u_{2n+1}) et (u_{2n+2}, u_{2n+3}) de la forme

$$\max\{|u_{2n+2}|, |u_{2n+3}|\} \leqslant \eta \max\{|u_{2n+2}|, |u_{2n+3}|\}$$

avec $\eta < 1$ ce qui impique que $u_n \to 0$.

2) Avec le même calcul que précédement on a $u_n = O(u_{n-1}\epsilon + \epsilon^2)$ et donc $u_n = o(u_{n-1})$.

3) Dans le cas $f(x) = x + x^2$, on remarque que

$$f(x) - f(y) = (x - y) + (x - y)(x + y) = (x - y)(1 + (x + y))$$

on a alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n - \frac{1}{1 + (u_n + u_{n-1})}(u_n + u_n^2) \\ &= u_n - (u_n + u_n^2)(1 - u_n + u_{n-1} + u_{n-1}^2 + \cdots) \\ &= u_n u_{n-1}(1 + o(u_{n-1}))\end{aligned}$$

Finalement

$$\log|u_{n+1}| = \log|u_n| + \log|u_{n-1}| + o(1)$$

On reconnait la suite de Fibonacci.

Exercice 2.6. On considère la suite suivante

$$a_{n+1} = 10^n a_n^2$$

pour quel $a_1 > 0$ a-t-on $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Solution 2.6. On calcul les premiers termes $a_2 = 10a_1^2$, $a_3 = 10^2(10a_1^2)^2 = 10^4a_1^4$ et observe que a_n est de la forme

$$a_n = 10^{\beta_n}a_1^{\alpha_n} \quad \text{et } a_{n+1} = 10^n \left(10^{\beta_n}a_1^{\alpha_n}\right)^2$$

et donc

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n, \quad \beta_{n+1} = n + 2\beta_n$$

avec $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$. Alors $\alpha_n = 2^{n-1}$ et il nous reste à calculer β_n. On remarque que

$$\beta_{n+1} + n + 2 = 2(\beta_n + n + 1)$$

donc en posant $\widehat{\beta}_n = \beta_n + n + 1$ on a

$$\widehat{\beta}_{n+1} = 2\widehat{\beta}_n, \quad \widehat{\beta}_1 = 2$$

et donc $\widehat{\beta}_n = 2^n$. Finalement $\beta_n = 2^n - n - 1$ et donc

$$a_n = 10^{2^n-n-1}a_1^{2^{n-1}} = \left(10^2a_1\right)^{2^{n-1}} 10^{-n-1}.$$

On peut alors conclure si $a_1 > \frac{1}{100}$ alors $a_n \to \infty$ mais si $a_1 \leq \frac{1}{100}$ alors $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2.7. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$f(t)^2 = f(\sqrt{2}t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Solution 2.7. On a $f \geqslant 0$ et

$$f(0)^2 = f(0).$$

Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. On a aussi

$$f(t)f'(t) = \sqrt{2}f'(\sqrt{2}t)$$

Donc

$$f(0)f'(0) = \sqrt{2}f'(0)$$

ainsi dans les deux cas $f(0) = 0$ ou 1 on obtient $f'(0) = 0$.

Par direct itération

$$f(t)^{2^n} = f((\sqrt{2})^n t)$$

Donc pour tout u

$$f(u) = f\left(\frac{u}{2^{n/2}}\right)^{2^n}$$

Autour de 0, on a

$$f\left(\frac{u}{2^{n/2}}\right) = f(0) + f'(0)\frac{u}{2^{n/2}} + f''(0)\frac{u^2}{2^n} + o\left(\frac{u^2}{2^n}\right)$$

Si $f(0) = 1$ alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{u}{2^{n/2}}\right)^{2^n} &= \left(1 + (f''(0) + o(1))\frac{u^2}{2^n}\right)^{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + (f''(0) + o(1))\frac{u^2}{2^n}\right)^{2^n} \\ &= \exp(u^2) \end{aligned}$$

Et si $f(0) = 0$, alors

$$f\left(\frac{u}{2^{n/2}}\right)^{2^n} = \left((f''(0) + o(1))\frac{u^2}{2^n}\right)^{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left((f''(0) + o(1))\frac{u^2}{2^n}\right)^{2^n} = 0.$$

Exercice 2.8. On rappel que $u_n \to \ell$ «pour Césaro» signifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell = 0$$

Pour quelle fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a-t-on : $u_n \to \ell$ «pour Césaro» $\Rightarrow f(u_n) \to f(\ell)$ «pour Césaro» ?

Solution 2.8. Les fonctions affines sont clairement solutions. En effet pour $f(x) = ax + b$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} au_k + b = a\ell + b$$

Réciproquement soit $x < y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Choisissons une suite u_n qui ne prend que deux valeurs : x et y et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \leqslant n,\, u_k = x\}}{n} = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \leqslant n,\, u_k = y\}}{n} = 1 - \lambda.$$

Alors on a la convergence pour Césaro

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\#\{k \leqslant n,\, u_k = x\}x + \#\{k \leqslant n,\, u_k = y\}y\right) = \lambda x + (1-\lambda)y = \ell$$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\#\{k \leqslant n,\, u_k = x\}f(x) + \#\{k \leqslant n,\, u_k = y\}f(y)\right) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

On en déduit que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

La fonction est donc affine sur l'intervalle $[x, y]$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 2.9. Soit $X = \{1, \cdots, n\}$ et on note $\mathcal{P} = \{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ l'ensemble des lois de probabilité sur X. Montrer que

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^n p_i f(i) - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \right) = \log \sum_{i=1}^n \exp(f(i)).$$

Solution 2.9. Notons

$$E(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i f(i) - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

$\mathcal{P}$ est un compact donc le maximum est atteint en un point $(p_1, \cdots, p_n)$. Supposons que $p_i \in]0, 1[$ pour tout i.

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$ nous introduisons la fonction

$$h(s) = E(p_1, \cdots, p_i + s, \cdots, p_j - s, \cdots, p_n)$$

alors

$$h'(0) = f(i) - f(j) - \log p_i + \log p_j.$$

Comme c'est un extremum alors $h'(0) = 0$. Donc

$$f(i) - \log p_i = f(j) - \log p_j$$

Ceci est vrai pour tous les i, j donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(i) - \log p_i = C$$

pour tout i et donc

$$p_i = \exp(f(i) - C).$$

De plus $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ donc $e^{-C} \sum_{i=1}^n e^{f(i)} = 1$ donc $C = \log \sum_{i=1}^n e^{f(i)}$.

Considérons le cas où il existe i tel que $p_i = 0$. Soit j tel que $p_j \neq 0$ alors

$$E(p_1, \cdots, p_i + s, \cdots, p_j - s, \cdots, p_n) - E(p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_n) = -s \log s + O_{s \to 0}(s)$$

qui est strictement positif pour s suffisament petit.

Autre méthode : on pose $p_n = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{n-1}$ et on étudie la fonction

$$\tilde{E}(p_1, \cdots, p_{n-1}) = E(p_1, \cdots, p_{n-1}, 1 - p_1 - \cdots - p_{n-1}).$$

On obtient alors les mêmes équations à l'extremum.

Exercice 2.10. On considère la suite a_n, $b_n$définit de la manière suivante $a_0 > b_0 > 0$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

1. Montrer qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \ell$.

2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|a_{n+1}-b_{n+1}|}{\log|a_n-b_n|} = 2.$$

Solution 2.10. 1) Par récurrence on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n.$$
Donc les suites sont monotones et bornées donc convergentes. On note
$$\ell_1 = \lim b_n \quad \ell_2 = \lim a_n$$
et alors
$$\ell_1 = \frac{\ell_1+\ell_2}{2} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \sqrt{\ell_1\ell_2}$$
donc $\ell_2 = \ell_1 = \ell$.

2) (Méthode 1) On a
$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_n - b_n}{2\sqrt{c_n}}\right)^2 \end{aligned}$$
avec $c_n \in [a_n, b_n]$. Donc finalement
$$\log(a_{n+1}-b_{n+1}) = 2\log(a_n-b_n) - \log(8c_n)$$
et alors
$$\frac{\log(a_{n+1}-b_{n+1})}{\log(a_n-b_n)} = 2 - \frac{\log(8c_n)}{\log(a_n-b_n)}$$
qui converge vers 2, car $\log c_n \to \log \ell$ et $\log(a_n - b_n) \to 0$.

(Méthode 2) Notons $x_n = a_n - \ell$ et $y_n = b_n - \ell$. Alors
$$x_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \ell = \frac{x_n+y_n}{2}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{(\ell+x_n)(\ell+y_n)} = \sqrt{\ell^2 + (x_n+y_n)\ell + x_n y_n}$$
On a alors
$$y_{n+1} = \sqrt{\ell^2 + (x_n+y_n)\ell + x_n y_n} - \ell.$$
On sait que $x_n, y_n \to 0$ donc on peut faire un DL en notant $\eta_n = \max(|x_n|, |y_n|)$
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \ell\left(\sqrt{1 + (x_n+y_n)\ell^{-1} + x_n y_n \ell^{-2}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x_n+y_n) + x_n y_n \ell^{-1}\right) - \frac{1}{4}(x_n+y_n)^2\ell^{-1} + o(\eta_n^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x_{n+1} - y_{n+1} &= -\frac{1}{2} x_n y_n \ell^{-1} + \frac{1}{4}(x_n + y_n)^2 \ell^{-1} + o(\eta_n^2) \\ &= \frac{1}{4\ell}(x_n - y_n)^2 + o(\eta_n^2) \end{aligned}$$

Et on reconnait

$$\log(x_{n+1} - y_{n+1}) = 2\log(x_n - y_n) + O(1)$$

Exercice 2.11. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire, continue, tel que $\phi(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ et $\phi(x) = 0$ pour tout $x \geqslant 1$. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que pour tout x

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda(t - x)) f(t) dt = a f'(x).$$

2. Proposer une construction similiare dont la convergence donne $f''(x)$.

Solution 2.11. Puisque $\phi = 0$ en dehors de $[-1, 1]$ on a

$$I = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda(t - x)) f(t) dt = \lambda^2 \int_{x - \frac{1}{\lambda}}^{x + \frac{1}{\lambda}} \phi(\lambda(t - x)) f(t) dt$$

et en faisant le changement de variable $u = \lambda(t - x)$ on obtient l'intégrale

$$I = \lambda \int_{-1}^{1} \phi(u) f(x + \frac{u}{\lambda}) du$$

En faisant un développement limité de f on a alors

$$\begin{aligned} I &= \lambda \int_{-1}^{1} \phi(u) \left(f(x) + \frac{u}{\lambda} f'(x) + O\left(\frac{u^2}{\lambda^2}\right)\right) du \\ &= \lambda f(x) \int_{-1}^{1} \phi(u) du + f'(x) \int_{-1}^{1} u\phi(u) du + O\left(\frac{1}{\lambda} \int |\phi(u)| u^2 du\right) \end{aligned}$$

Le premier terme donne 0 car ϕ est impaire, $\int_{-1}^{1} u\phi(u)du$ donne a et $\frac{1}{\lambda} \int |\phi(u)|u^2 du \to 0$.

On cherche maintenant ψ avec $\psi = 0$ en dehors de $[-1, 1]$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^k \int_{\mathbb{R}} \psi(\lambda(t - x)) f(t) dt = b f''(x).$$

Avec le même calcul

$$\begin{aligned} J = \lambda^{k-1} f(x) \int_{-1}^{1} \psi(u) du + \lambda^{k-2} f'(x) \int_{-1}^{1} u\psi(u) du \\ + \frac{1}{2} \lambda^{k-3} f''(x) \int_{-1}^{1} u^2 \psi(u) du + o\left(\lambda^{k-3} \int |\psi(u)| u^3 du\right) \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir une fonction ψ tel que $\int \psi = 0$, $\int u\psi = 0$ et $\int u^2\psi \neq 0$.

Exercice 2.12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$g(x) = f(x) + \int_0^x f(t)dt$$

converge pour $x \to \infty$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Solution 2.12. Notons $y = \int_0^x f(t)dt$ et $y' = f$. On a l'équation différentielle suivante

$$y' + y = g(x)$$

que l'on peut résoudre

$$\begin{aligned} ye^x + y'e^x &= g(x)e^x \\ (ye^x)' &= g(x)e^x \\ ye^x &= \int_0^x g(t)e^t dt + C \\ y &= e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt + C \end{aligned}$$

Alors

$$y' = g(x) - e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$$

Comme $g(t) \to \ell$, on a

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x g(t)e^{t-x}dt = \ell$$

En effet $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \ell e^{t-x}dt = \ell$ et

$$\begin{aligned} \int_0^x |g(t) - \ell|e^{t-x}dt &= \int_0^{x/2} |g(t) - \ell|e^{t-x}dt + \int_{x/2}^x |g(t) - \ell|e^{t-x}dt \\ &\leqslant \int_0^{x/2} (\|g(t)\|_\infty + \ell)e^{t-x}dt + \int_{x/2}^x \epsilon e^{t-x}dt \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Exercice 2.13. Le but de l'exercice est de montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

1. On suppose que $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Montrez alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$q\int_0^1 x^n e^x dx \in \mathbb{N}^*.$$

   En deduire que $e \notin \mathbb{Q}$.
2. Demontrer que $e^2 \notin \mathbb{Q}$.

Question bonus : montrer que la preuve échoue pour e^3.

Solution 2.13. 1) Soit $u_n = q\int_0^1 x^n e^x dx$. On a $u_n \neq 0$ car $q \neq 0$ et $\int_0^1 x^n e^x dx$ est strictement positif. On montre par récurrence que $u_n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_0 = q\int_0^1 e^x dx = q(e-1) = p - q \in \mathbb{Z}.$$

De plus, par intégration par partie,

$$u_{n+1} = q\int_0^1 x^{n+1} e^x dx = q[x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)u_n = qe - (n+1)u_n \in \mathbb{Z}$$

par hypothèse de récurrence.

Donc pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$. On a $x^n e^x \to 0$ sur $[0,1[$ et donc, par convergence dominée, $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il s'agit cependant d'une suite d'entiers non nuls, on a donc une contradiction.

2) Si $e^2 = \frac{p}{q}$, on considère $v_n = q\int_0^2 (x-1)^{2n} e^x dx$ et on réalise le même raisonnement. On a $v_n \neq 0$, $v_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} v_n &= q[(x-1)^{2n}e^x]_0^2 - 2nq\int_0^2 (x-1)^{2n-1}e^x \\ &= q(e^2-1) - 2nq([(x-1)^{2n-1}e^x]_0^2) + 2n(2n-1)v_{n-1} \\ &= p - q - 2n(p-q) + 2n(2n-1)v_{n-1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

par récurrence. De même par convergence dominée $v_n \to 0$ ce qui conduit à une contradiction.

Exercice 2.14. On considère l'équation

$$u'(t) + u(t) = f(t)$$

avec $u(0) = 1$.

1. Soit $\tau > 0$. Montrez qu'il existe f_τ tel que la solution vérifie $u(\tau) = 0$.
2. Si on impose $\|f\|_{L^\infty} \leqslant a$ avec $a > 0$, quelle est la valeur minimale de τ telle qu'il existe une solution satisfaisant $u(\tau) = 0$?
3. Pour $u'(t) + u^2(t) = -a$, $a > 0$ et $u(0) = 1$, montrer que pour tout $\tau > 0$ il existe $a > 0$ tel que $u(\tau) = 0$

Solution 2.14. 1) On prend $f = -a$ pour un $a > 0$ à determiner. On a alors $u(t) = (1+a)e^{-t} - a$ et donc $u(\tau) = 0$ si $\frac{a}{1+a} = e^{-\tau}$ c'est à dire $\ln\left(\frac{1+a}{a}\right) = \tau$. La fonction $a \to \ln\left(\frac{1+a}{a}\right)$ est bijective de $]0, +\infty[$ dans lui même, ce qui permet donc de trouver a en fonction de τ.

2) Montrons que l'exemple au dessus est optimal. Pour cela on écrit pour un f générique que

$$u(t) = e^{-t}\left(1 + \int_0^t e^s f(s) ds\right).$$

On a donc

$$u(t) \geqslant e^{-t}\left(1-\int_0^t e^s a ds\right) = e^{-t}(1-a(e^t-1)) = -a+(1+a)e^{-t}$$

ce qui était la valeur de $u(t)$ dans l'exemple de la question 1) et qui est strictement positif sur $[0, \ln\left(\frac{1+a}{a}\right)[$.

3) On considère toujours $f(t)=-a$. On a alors $u_a'(t) \leqslant -a$ donc $u_a(t) \leqslant 1-at$ donc $u_a(t) \leqslant 0$ pour $t \geqslant \frac{1}{a}$. Pour n'importe quelle $a>0$ on peut donc définir $\tau_a > 0$ la première valeur où $u_a(\tau_a)=0$. Par décroissante de u_a, on a en fait unicité de τ tel que $u_a(\tau)=0$. Le fait que $a \to \tau_a$ est continue est une conséquence de la continuité d'une solution d'une equation différentielle par rapport à ses coefficients, et le fait que $u_a(\tau)=0$ admet une unique solution. On a $\tau_a \leqslant \frac{1}{a}$ donc on peut le rendre aussi petit que l'on veut en prenant $a>0$ grand.

Si maintenant $a \to 0$, appellons $T_1 > 0$ le premier temps où $u(t) \leqslant 2\sqrt{a}$ et $T_2 > 0$ le permier temps où $u(t) \leqslant \sqrt{a}$. Sur $[T_1, T_2]$ on a donc $u'(t) = -a-u^2(t) \geqslant -2a$ donc $-\sqrt{a} = u(T_2)-u(T_1) \geqslant -2a(T_2-T_1)$, et donc $T_2 - T_1 \geqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \to \infty$ quand $a \to 0$, donc $\tau_a \geqslant T_2 \to +\infty$ quand $a \to 0$.

Exercice 2.15. Soit $c \in \mathbb{C}$. On définit la suite $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$. On définit

$$M = \{c \in \mathbb{C}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornee}\}.$$

1. Montrer que si $|c| \leqslant 1/4$ alors $c \in M$.
2. Montrer que si $|c| \geqslant 3$ alors $c \notin M$.
3. Calculer $M \cap \mathbb{R}$.
4. Montrer que pour une suite $c_k \in M$ tel que $\lim_{k\to\infty} c_k = c$ alors $c \in M$.

Solution 2.15. 1) On montre que si $|c| \leqslant \frac{1}{4}$ alors $|z_n| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout n par récurrence.

2) On montre que si $|c| \geqslant 3$ alors la suite (z_n) va diverger. Remarquons que $|z_{n+1}| \geqslant |z_n|^2 - |c|$ et $|z_1| = |c|$. Donc si on écrit $|z_n| = \mu_n|c|, |c| \geqslant 3$ on a $\mu_1 = 1$ et $\mu_{n+1} \geqslant 3\mu_n^2 - 1$. Une telle suite μ_n diverge (par exemple on peut prouver par récurrence que $\mu_n \geqslant n$ pour tout n).

3) On sait déjà que $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \in M \cap \mathbb{R}$. Montrons que si $c > \frac{1}{4}$ alors $c \notin M$. On a $z_{n+1} - z_n = z_n^2 - z_n + c = \left(z_n - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} > 0$ donc la suite z_n est strictement croissante, si elle est bornée elle converge donc vers une limite $\lambda > 0$ qui vérifie l'équation $\lambda = \lambda^2 + c$, donc les solutions sont purement imaginaire si $c > \frac{1}{4}$, on a donc une contradiction.

Montrons maintenant que si $0 > c \geqslant -2$ alors $c \in M$. On va montrer par récurrence que $|z_n| \leqslant 2$. On a $z_{n+1} = z_n^2 + c \geqslant c \geqslant -2$ et $z_{n+1} \leqslant 4 + c \leqslant 4 - 2 \leqslant 2$ donc on a bien le résultat.

Si maintenant $c < -2$, par un argument similaire a la question 2 on montre que $|z_n|$ diverge.

4) On remarque que pour tout n, $z_{n,k}$ est une fonction continue de c_k et $z_{n-1,k}$ donc par récurrence celle ci converge lorsque $k \to \infty$ et sa limite est z_n la suite construite avec c. De plus si il existe n tel que $z_{n,k} > 10(1+|c|)$ alors $\lim_{n\to\infty} z_{n,k} = \infty$ (car la suite $|z_{n,k}|$ grandit de facon quadratique maintenant), Donc pour tout (n,k), $z_{n,k} \leqslant 10(1+|c|)$ et finalement $z_n \leqslant 10(1+|c|)$. La suite est bornée donc $c \in M$.

Exercice 2.16. On considère l'équation $u'(x) = f(u(x))$ avec $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = 0, f'(z) \neq 0$. Donc $u(x) = z$ est solution de l'équation.

1. À quelle condition sur f a t-on la proprieté suivante : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $z_0 \in [z-\varepsilon_0, z+\varepsilon_0]$, la solution de $u'(x) = f(u(x)), u(0) = z_0$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x) = z$?
2. On suppose qu'il existe $z_0 < z_1 < z_2$ avec $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = 0$ et $f > 0$ sur $]z_0, z_1[$ et $f < 0$ sur $]z_1, z_2[$. Que dire de $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ si u vérifie $u'(x) = f(u(x)), u(0) \in [z_0, z_2]$?

Solution 2.16. 1) La condition est $f'(z) < 0$. On écrit l'équation comme $u'(x) = (u(x) - z)f'(z) + g(x)$ où $g(x) = O((u(x) - z)^2)$. Alors pour ϵ_0 suffisament petit, si u est monontone décroissante si $z_0 \in [z, z + \epsilon_0]$ et monotone croissante si $z_0 \in [z - \epsilon_0, z]$ et on verifie quelle converge bien vers z.

2) Si $u(0) = z_0$ ou $u(0) = z_2$ alors la solution est constante, sinon on étudie le signe de u' en fonction des zones et on voit qu'on doit converger vers une limite qui sera toujours z_1.

Exercice 2.17. Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une suite de fonction affine par morceaux f_n tel que $\|f_n - f\|_{L^\infty([0,1])} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   Pour une fonction affine par morceaux, on définit $L^+(f) = \{x \in [0,1], f'(x) > 0\}$ et $L^-(f) = \{x \in [0,1], f'(x) < 0\}$.
2. Montrer que si f est croissante alors on peut choisir f_n de la question 1 tel que $L^-(f_n) = \emptyset$.
3. Montrer que si f est croissante on peut choisir f_n de la question 1 tel que $|L^-(f_n)| > |L^+(f_n)|$.

Solution 2.17. 1) On considère la fonction f_n affine par morceaux avec $f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in [0 \ldots n]$. En notant $\kappa = \|f'\|_{L^\infty([0,1])}$, on vérifie que

$\|f_n'\|_{L^\infty([0,1])} \leqslant \kappa$ et on a pour $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f(x)| \\ \leqslant & \left|f_n(x) - f_n\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ \leqslant & 2\kappa\left|x - \frac{k}{n}\right| \\ \leqslant & \frac{2\kappa}{n} \\ \to & 0 \end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$.

2) Le choix précédent fonctionne

3) On impose toujours $f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$, mais maintenant on impose aussi

$$f_n\left(\frac{k+\frac{2}{3}}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

On a alors $|L^-(f_n)| = \frac{2}{3}$ et $|L^+(f_n)| = \frac{1}{3}$.

Exercice 2.18. Soit $g \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ avec $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$. Pour $\lambda > 0$ on note $A(\lambda) = \{x > 0, g(x) = \lambda x\}$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $]0, \lambda_0] \subset \{\lambda > 0, A(\lambda) \neq \emptyset\}$.
   On note $\lambda_* = \max\{\lambda > 0, A(\lambda) \neq \emptyset\}$ avec eventuellement $\lambda_* = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $\lambda < \lambda_*$, $A(\lambda) \neq \emptyset$.
3. Pour $0 < \lambda < \lambda_*$ on note $X_\lambda = \inf\{x > 0, x \in A(\lambda)\}$.
   (a) Montrer que $X_\lambda \neq 0$.
   (b) La fonction $\lambda \to X_\lambda$ est t-elle forcément continue sur $]0, \lambda_*[$?
   (c) Montrer que si $g'' > 0$ alors la fonction $\lambda \to X_\lambda$ est bien continue.

Question bonus : Montrer que de façon générale, $\lambda \to X_\lambda$ est continue sauf en un nombre dénombrable de points.

Solution 2.18. 1) Comme $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$, Pour $\epsilon > 0$ on a

$$g(x) \geqslant (1-\epsilon)\frac{g''(0)}{2}x^2$$

si $x > 0$ est suffisament petit (disons $x < x_0$). Donc $\frac{g(x_0)}{x_0} \geqslant (1-\epsilon)\frac{g''(0)}{2}x_0$ donc par continuité de g on a que $A(\lambda)$ est non vide pour tout $\lambda < (1-\epsilon)\frac{g''(0)}{2}x_0$.

2) On note $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est continue et on la prolonge par continuité avec $h(0) = 0$. On a $\max_{x\in\mathbb{R}^+} h(x) = \lambda_*$ et donc par le theorème des valeurs intermediaires pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$ il existe x_λ tel que $h(x_\lambda) = \lambda$.

3)a) Comme $g(x) \leqslant \frac{2}{1-\epsilon}g''(0)x^2$ si $x > 0$ est suffisament petit on a $\lambda X_\lambda = g(X_\lambda) \leqslant \frac{2}{1-\epsilon}g''(0)X_\lambda^2$ donc $X_\lambda \geqslant \frac{\lambda(1-\epsilon)}{2g''(0)} > 0$ donc $X_\lambda \neq 0$.

3)b) Non, il est possible de construire un contre exemple avec une fonction qui n'est pas convexe.

3)c) On note $f_\lambda(x) = g(x) - \lambda x$. On a $f''_\lambda(x) = g''(x) > 0$ ce qui implique que $f(x) = 0$ admet une unique solution non nul car $f_\lambda(0) = 0$ et $f'_\lambda(0) < 0$. On note X_λ cette solution, c'est à dire $g(X_\lambda) - \lambda X_\lambda = 0$. Si on peut dériver par rapport à λ, on a $\partial_\lambda X_\lambda(g'(X_\lambda) - \lambda) = X_\lambda$, et $g'(X_\lambda) \neq \lambda$. En effet, sinon on a $f'_\lambda(X_\lambda) = 0$ of f_λ est convexe et $f_\lambda(0) = 0, f'_\lambda(0) < 0$ ce qui donne $X_\lambda < 0$ ce qui est une contradiction. On a donc même que $\lambda \to X_\lambda$ est C^1 donc en particulier continue.

Exercice 2.19. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Calculer
$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + ax^p)^2 dx.$$
Que dire de sa valeur quand $p \to +\infty$?
2. Que dire de l'expression suivante ?
$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2x}(1 + ax^p)^2 dx$$
Quand l'infimum est-il atteint ?

Solution 2.19. 1) On a
$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + ax^p)^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + 2ax^p + a^2x^{2p})dx$$
et comme $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^k dx = k!$ on obtient
$$f(a) = 1 + 2a(p!) + a^2(2p)!$$
Le minimum est atteint lorsque
$$f'(a) = 2(p! + a(2p)!) = 0$$
donc $a = -\frac{p!}{(2p)!}$ et alors $f(a) = 1 - \frac{(p!)^2}{(2p)!} \to 1$ quand $p \to +\infty$.

2) Par le changement de variable $y = a^2x$ on a (si $a \neq 0$)
$$g(a) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2x}(1+ax^p)^2 dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-y}(1+a^{1-2p}y^p)^2 dy = \frac{1}{a^2} f(a^{1-2p}).$$
Donc $g(a) \sim \frac{1}{a^2}$ quand $a \to +\infty$ si $p \geqslant \frac{1}{2}$ (car $f(0) = 1$) donc dans ce cas l'infimum est 0. Il n'est jamais atteint car pour tout $a \in \mathbb{R}$ la fonction intégrée est positive non identiquement nulle.

Si $p = 0$ alors l'inf est atteint en $a = -1$.

Exercice 2.20. Soit f une fonction C^2 bornée avec $f(0) \neq 0$.

1. Calculer $\lim_{t\to+\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|e^{-x^2t}$.
2. On suppose que $f(0) = 0$ mais $f'(0) \neq 0$. Trouver un équivalent quand $t \to +\infty$ de $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|e^{-x^2t}$.
3. Généraliser si f est C^{k+1} avec $f^{(k)}(0) \neq 0$ et $f^{(j)}(0) = 0$ pour $j < k$.

Solution 2.20. 1) Pour $x \notin [-1, 1]$ on a convergence uniforme vers 0. Pour $x \in [-1, 1]$ on a $||f(x)|-|f(0)||e^{-x^2t} \leqslant \|f'\|_{L^\infty([-1,1])}|x|e^{-x^2t}$ et par une analyse de fonction standard on a qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |x|e^{-x^2t} \leqslant \frac{K}{t^{1/2}}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}|f(0)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|e^{-x^2t} &\leq |f(0)| + \max_{x\in[-1,1]} ||f(x)| - |f(0)||e^{-x^2t}\\ &\leq |f(0)| + \frac{K}{t^{1/2}}\|f'\|_{L^\infty([-1,1])}\end{aligned}$$

Le résultat est donc $|f(0)|$.

2) et 3) On peut toujours se ramener dans un voisinage de 0 en utilisant la borne

$$\sup_{x\notin[-\epsilon,\epsilon]} |f(x)|e^{-x^2t} \leq \|f\|_{L^\infty} e^{-\epsilon^2 t}.$$

On calcule le maximum de la fonction $h(x) = x^k e^{-x^2t}$. On a

$$h'(x) = (kx^{k-1} - 2tx^{k+1})e^{-x^2t}$$

et alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} h(x) = h\left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right) = \left(\frac{k}{2t}\right)^{k/2} e^{-k/2}.$$

On écrit alors que dans un voisinage de 0

$$\begin{aligned}|f(x)|e^{-x^2t} &= h(x)|f^{(k)}(0)| + O(x^{k+1}e^{-x^2t})\\ &= h(x)|f^{(k)}(0)| + O\left(\left(\frac{k}{2t}\right)^{(k+1)/2} e^{-(k+1)/2}\right)\end{aligned}$$

et on peut conclure

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|e^{-x^2t} = |f^{(k)}(0)| \left(\frac{k}{2t}\right)^{k/2} e^{-k/2} + O\left(\frac{1}{t^{(k+1)/2}}\right)$$

Exercice 2.21. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ intégrable qui ne s'annule que en 1.

1. Montrer que
$$\sup_{\lambda>0} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{1+\frac{1}{\lambda}} f(\lambda x)dx$$
est atteint.

2. Est-ce toujours vrai si $f(1) = 1$ mais $f'(1) > 0$?

Solution 2.21. 1) La quantité est bien définie, mais le supremum peut être atteint pour $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to +\infty$. On pose le changement de variable $y = \lambda x$ et on regarde donc la fonction

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_1^{1+\lambda} f(y)dy.$$

On a $g(\lambda) \to f(1) = 0$ quand $\lambda \to 0$ et $g(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$ car f est intégrable. Or par exemple $g(1) > 0$, donc son maximum est atteint.

2) La réponse est Vrai. On peut exclure le cas $\lambda \to \infty$ de la même manière que pour 1) et il reste alors le cas $\lambda \to 0$. On a

$$g'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2} \int_1^{1+\lambda} f(y)dy + \frac{f(1+\lambda)}{\lambda} = \frac{f'(1)}{2} + o_{\lambda \to 0}(1)$$

Donc g est croissante au voisinage de $\lambda = 0$, qui n'est donc pas le maximum.

Exercice 2.22. Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $g(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Soit f la solution de $f'(t) - f(t) = g(t)$ avec $f(0) = a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique valeur de $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Solution 2.22. On a

$$f(t) = ae^t + e^t \int_0^t g(x)e^{-x}dx$$

et $\int_0^t g(x)e^{-x}dx$ converge vers une limite finie quand $t \to +\infty$. Il faut donc $a = -\int_0^{+\infty} g(x)e^{-x}$ sinon f diverge. On a alors

$$f(t) = e^t \int_t^{+\infty} g(x)e^{-x}dx.$$

Comme $g \to 0$ en $+\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant t assez grand on a $x \geq t \Rightarrow |g(x)| \leq \epsilon$ et donc $|f(t)| \leqslant \varepsilon e^t \int_t^{+\infty} e^{-x} \leqslant \varepsilon$. On a alors bien la convergence.

Exercice 2.23. Soit $f \in C^0([0,1],[0,1])$ bijective. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)}(x) = f \circ f \ldots \circ f(x) = x$. Montrer que $f^{(2)}(x) = x$.

Solution 2.23. On a deux cas possibles, soit f est croissante soit f est décroissante. Si f est croissante alors on peut prouver qu'elle est égale à l'identité. Pour cela on procède par l'absurde et considère un point fixe x satisfaisant une des deux propriétés suivantes : (i) il existe $\delta > 0$ tel que $f(y) > y$ pour tout $y \in (x, x+\delta]$ ou (ii) $f(y) < y$ pour tout $y \in (x, x+\delta]$, ou bien la même chose avec δ négatif (N.B. il faut bien justifier que ça existe). Une fois qu'on a ce résultat, on justifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon > 0$ (qui dépend de k) tel que pour tout $y \in (x, x+\epsilon)$, $f^{(k)}(x) > x$ ce qui contredit l'énoncé.

Dans le cas ou f est décroissante, on a que $f \circ f$ est croissante et $f^{(2k)}(x) = x$ donc $f \circ f(x) = x$.

Exercice 2.24. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour toute partie bornée K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}^2$ est borné. Montrer que f admet un maximum ou un minimum.

Solution 2.24. On peut supposer sans perte de généralité que $\inf f < 0 < \sup f$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe deux suites $x_n \in \mathbb{R}^2$ et $y_n \in \mathbb{R}^2$ telles que $\|x_n\|, \|y_n\| \to \infty$, $f(x_n) \to \sup f$ et $f(y_n) \to \inf f$ (N.B. sinon la fonction f admet un maximum ou un minimum en utilisant qu'une fonction continue sur un fermé borné atteint ses bornes).

On utilise alors les observations suivantes pour obtenir une contradiction :

— Pour tout $R > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \geqslant R$ et $|y_n| \geqslant R$. Dans ce cas, il existe donc un chemin continu reliant x_n et y_n qui reste hors de la boule B_R.

— On peut choisir un entier $R > 0$ tel que $f^{-1}(\{0\}) \subseteq B_R$

— On peut choisir n assez grand de sorte que (i) $|x_n| \geqslant R$ et $|y_n| \geqslant R$ et (ii) $f(x_n) > 0$ et $f(y_n) < 0$, et donc la fonction f s'annule le long du chemin reliant x_n et y_n mais elle ne s'annule que dans B_R.

Exercice 2.25. On considère une suite $(p_{ij})_{i,j \geqslant 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\, i < j \Rightarrow p_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{j=0}^{n} p_{nj} = 1.$$

On considère l'application suivante définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (t_n = \sum_{j=0}^{n} p_{nj} s_j)_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
   (i) $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_{nk} \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$
   (ii) $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s \implies t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$ (on considère une limite finie $s \in \mathbb{R}$).
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \infty$ et $\frac{a_n}{b_n} \to s$. Montrer que
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \to s.$$

Solution 2.25. On montre $(ii) \implies (i)$. On considère une suite s_n strictement positive convergeant vers 0 (e.g., $s_n = 1/n$). En utilisant la positivité des coefficients p_{ij}, on a : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geqslant k$,

$$t_n = \sum_{j=0}^{n} p_{nj} s_j \geqslant p_{nk} s_k \geqslant 0.$$

L'hypothèse (i) implique que t_n tend vers 0, et donc $p_{nk} s_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On conclut en remarquant que s_k est strictement positif.

On montre $(i) \implies (ii)$. On peut supposer sans perte de généralité que $s = 0$ et que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n| \leqslant 1$ (en considérant la suite $(s_n - s)/\sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n - s|$). Soit $\epsilon > 0$ et $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_\epsilon$, $|s_n| \leqslant \epsilon$. On considère alors un entier M_ϵ choisi suffisamment grand de sorte que $\forall k \in \{1, \ldots, N_\epsilon\}$ et $\forall n \geqslant M_\epsilon$, $P_{nk} \leqslant \epsilon/N_\epsilon$.

On a donc, pour tout $n \geqslant M_\epsilon$,

$$\begin{aligned}
|t_n| &\leqslant \sum_{j=0}^{N_\epsilon} p_{nj}|s_j| + \sum_{j=N_\epsilon}^{n} p_{nj}|s_j| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{N_\epsilon} \frac{\epsilon}{N_\epsilon} + \epsilon \sum_{j=N_\epsilon}^{n} p_{nj} \\
&\leqslant \epsilon + \epsilon \sum_{j=0}^{n} p_{nj} \\
&\leqslant 2\epsilon.
\end{aligned}$$

2) On traite les cas $s = 0$ et $s \neq 0$ séparemment. Pour le cas $s = 0$, on fixe $\epsilon > 0$ et un entier N_ϵ tel que $\forall n \geqslant N_\epsilon, |a_n| \leqslant \epsilon b_n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} |a_i| &= \sum_{i=0}^{N_\epsilon} |a_i| + \sum_{i=N_\epsilon}^{n} |a_i| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N_\epsilon} |a_i| + \epsilon \sum_{i=N_\epsilon}^{n} b_i \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N_\epsilon} |a_i| + \epsilon \sum_{i=0}^{n} b_i.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} |a_i|}{\sum_{i=0}^{n} b_i} \leqslant \frac{\sum_{i=0}^{N_\epsilon} |a_i|}{\sum_{i=0}^{n} b_i} + \epsilon.$$

Cette dernière somme peut être rendue plus petite que 2ϵ en choisissant n suffisamment grand.

Dans le cas $s \neq 0$ on peut choisir $s > 0$ sans perte de généralité (en considérant la suite $-a_n$). On fixe $\epsilon > 0$ et choisit $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ de sorte que $\forall n \geqslant N_\epsilon$, $a_n/b_n \in [(1-\epsilon)s, (1+\epsilon)s]$. On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i &= \sum_{i=0}^{N_\epsilon} a_i + \sum_{i=N_\epsilon}^{n} a_i \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N_\epsilon} a_i + (1+\epsilon)s \sum_{i=N_\epsilon}^{n} b_i \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N_\epsilon} a_i + (1+\epsilon)s \sum_{i=0}^{n} b_i.
\end{aligned}$$

Et donc
$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{\sum_{i=0}^{n} b_i} \leqslant \frac{\sum_{i=0}^{N_\epsilon} a_i}{\sum_{i=0}^{n} b_i} + (1+\epsilon)s.$$
Le premier terme de droite peut être rendu plus petit que $(1+2\epsilon)s$ en choisissant n assez grand. Le même calcul dans l'autre direction donne la borne inférieure
$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{\sum_{i=0}^{n} b_i} \geqslant \frac{\sum_{i=0}^{N_\epsilon} a_i - \sum_{i=0}^{N_\epsilon} b_i}{\sum_{i=0}^{n} b_i} + (1-\epsilon)s,$$
qui peut aussi être rendu plus petit que $(1-2\epsilon)s$ pour n assez grand.

Exercice 2.26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in (0,1)$. Montrer l'existence d'une fonction lipschitzienne F telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $F(x+a) - \lambda F(x) = f(x)$. Y-a-t-il unicité ?

Solution 2.26. *Intuition de la solution :* On a $F(x) = f(x) + \lambda F(x-a) = f(x) + \lambda f(x-a) + \lambda^2 F(x-2a)$. En itérant le procédé, on obtient (formellement)
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x-ka).$$

Solution : On remarque que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x-ka)$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ (comme une fonction lipschitzienne croît au plus linéairement vite). On pose donc
$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x-ka).$$
Il reste à vérifier que F satisfait les conditions de l'énoncé. On a
$$|F(x)-F(y)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (f(x-ka) - f(y-ka))\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k |x-y| = \frac{|x-y|}{1-\lambda}.$$
La fonction F est donc $1/(1-\lambda)$ lipschitzienne. Par ailleurs on a
$$\begin{aligned} F(x) - \lambda F(x-a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x-ka) - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x-(k+1)a) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(x-ka) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k f(x-ka) \\ &= f(x). \end{aligned}$$
Concernant l'unicité, s'il existe deux fonctions F et G qui sont lipschitziennes et satisfont l'hypothèse de l'énoncé alors on peut poser $H = F - G$. Cette fonction est lipschitzienne et satisfait
$$H(x) - \lambda H(x-a) = 0.$$

En itérant on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H(x) = \lambda^k H(x - ka).$$

En preannt la limite $k \to \infty$ (et en utilisant qu'une fonction lipschitzienne croît au plus linéairement vite), on obtient $H = 0$. Ceci guarantit l'unicité de la fonction F.

Exercice 2.27. Soit $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction C^1 telle que $\frac{f'}{f} \to -\infty$ lorsque $x \to \infty$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.
2. Montrer que $\sum_{k \geqslant n}^{\infty} f(k) \sim f(n)$ pour $n \to \infty$.

Solution 2.27. 1) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \geqslant N$, $f'(x)/f(x) \leqslant -1$. On a donc $(\ln f)'(x) \leqslant -1$ et donc pour tout entier $n \geqslant N$, $f(n+1) \leqslant e^{-1} f(n)$. En itérant on obtient $f(n) \leqslant e^{-(n-N)} f(N)$. La suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ décroît donc plus vite qu'une série géométrique de raison plus petite que 1. La série est donc sommable.

2) On fixe un entier $K \in \mathbb{N}$ grand et un entier N_K tel que pour tout $x \geqslant N_K$, $f'(x)/f(x) \leqslant -K$. On a donc pour tout $n \geqslant N_K$, $f(n+1) \leqslant e^{-K} f(n)$. On a donc, pour tout $n \geqslant N_K$

$$f(n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} e^{-K(k-n)} f(n) \leqslant f(n) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-Kk} = \frac{f(n)}{1 - e^{-K}}.$$

On a donc obtenu : Pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_K$,

$$1 \leqslant \frac{1}{f(n)} \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leqslant \frac{1}{1 - e^{-K}}.$$

Le reste de la suite est donc équivalent à $f(n)$.

Exercice 2.28. Pour $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto f(x + a)$. On définit l'espace vectoriel $F_f := \mathrm{Vect}(f_a \, : \, a \in \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\dim F_f < \infty$ alors $\dim F_{f'} < \infty$.
2. Caractériser les fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\dim F_f = 1$.
3. Caractériser les fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\dim F_f = 2$.

Solution 2.28. 1) Soit $f_{a_1}, \ldots, f_{a_k}$ une base de l'espace F_f. On a donc pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$f_a = \lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_k f_{a_k}.$$

En dérivant les deux côtés de l'identité, on obtient

$$f'_a = \lambda_1 f'_{a_1} + \ldots + \lambda_k f'_{a_k}.$$

Ceci implique que la famille $(f'_{a_1}, \dots, f'_{a_k})$ est une famille génératrice finie de l'espace $F_{f'}$. Cet espace est donc de dimension finie.

2) Dans ce cas, pour tout $\epsilon > 0$, il existe λ_ϵ tel que

$$f_\epsilon = \lambda_\epsilon f \implies \frac{f_\epsilon - f}{\epsilon} = \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon} f. \tag{2.1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$ (s'il n'existe pas de tel x alors $f = 0$ et F_f est un espace vectoriel de dimension nulle). On a alors

$$\frac{f_\epsilon(x) - f(x)}{\epsilon f(x)} = \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon}$$

Le terme de gauche converge lorsque ϵ tend vers 0. On a donc

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Et donc en posant $\mu = \frac{f'(x)}{f(x)}$ et en réinjectant dans (2.1),

$$f' = \mu f.$$

On obtient une equation différentielle d'ordre 1 que l'on peut résoudre. On obtient $f(y) = Ce^{\mu y}$.

3) On suppose sans perte de généralité que f, f_1 forme une base de F_f et que $f(0) \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc λ_ϵ et μ_ϵ tels que

$$f_\epsilon = \lambda_\epsilon f + \mu_\epsilon f_1 \quad \implies \quad \frac{f_\epsilon - f}{\epsilon} = \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon} f + \frac{\mu_\epsilon}{\epsilon} f_1 \tag{2.2}$$

On considère $x \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $(f(0), f(1))$ et $(f(x), f(x+1))$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ (si un tel x n'existe pas, on peut démontrer que la famille (f, f_1) est liée).

En utilisant l'identité (2.2), on a en particulier

$$\begin{pmatrix} \frac{f_\epsilon(0) - f(0)}{\epsilon} \\ \frac{f_\epsilon(x) - f(x)}{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) & f_1(0) \\ f(x) & f_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon} \\ \frac{\mu_\epsilon}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{pmatrix} \frac{f(\epsilon) - f(0)}{\epsilon} \\ \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(x) & f(x+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon} \\ \frac{\mu_\epsilon}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Comme la matrice 2×2 du terme de droite est inversible, on a

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(x) & f(x+1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{f(\epsilon) - f(0)}{\epsilon} \\ \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_\epsilon - 1}{\epsilon} \\ \frac{\mu_\epsilon}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Le terme de gauche converge lorsque $\epsilon \to 0$, donc le terme de droite aussi. On note (λ, μ) le vecteur limite. En réinjectant dans (2.2), on a donc

$$f' = \lambda f + \mu f_1,$$

et donc $f' \in F_f$. Le même argument montre que $f'_a \in F_f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et donc $F_{f'} \subseteq F_f$. Donc $\dim F_{f'} \leqslant 2$, et on peut utiliser le même argument pour montrer que $f'' \in F_{f'} \subseteq F_f$. La famille (f'', f', f) est donc une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, elle est donc liée et il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 f'' + \lambda_2 f' + \lambda_3 f = 0.$$

Ce qui donne une équation différentielle de degré 2 à coefficients contants que l'on peut résoudre.

Exercice 2.29. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 0$ et il existe $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant $f + g$ est croissante. Montrer que f s'annule.

Solution 2.29. On peut supposer que $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$ (sinon le résultat est démontré). Dans ce cas on pose $x_0 := \inf\{y \in [0,1],\ f(y) < 0\}$.

Supposons que $f(x_-) > 0$. Dans ce cas, on a que $x_- < 1$. En utilisant que $f + g$ est croissante, on a que pour tout $\epsilon > 0$ (petit), on a $f(x_- + \epsilon) \geqslant f(x_-) + g(x_-) - g(x_- + \epsilon)$, et donc pour tout ϵ suffisamment petit, on a $f(x_- + \epsilon) > 0$ (en utilisant $f(x_-) > 0$ et la continuité de g), ce qui contredit la définition de x_-.

Maintenant, supposons que $f(x_-) < 0$. Dans ce cas on a que $x_- > 0$. En utilisant que $f + g$ est croissante, on a que pour tout $\epsilon > 0$ (petit), on a $f(x_- - \epsilon) \leqslant f(x_-) + g(x_-) - g(x_- - \epsilon)$, et donc pour tout ϵ suffisamment petit, on a $f(x_- - \epsilon) < 0$ (en utilisant $f(x_-) < 0$ et la continuité de g), ce qui contredit la définition de x_-.

Exercice 2.30. Soient $S, T : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que (i) $S \circ T = T \circ S$ et (ii) T est croissante. Montrer que S et T ont un point fixe commun.

Solution 2.30. On sait que que S admet un point fixe (en considérant la fonction $x \mapsto S(x) - x$ qui s'annule sur $[0,1]$) que nous dénotons $x_0 \in [0,1]$. On considère alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = T(x_n)$. On observe que (i) la suite x_n est monotone (le signe de $x_{n+1} - x_n$ est le même que celui de $x_n - x_{n-1}$ car T est croissante), elle converge donc vers un réel $x \in [0,1]$ et (ii) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(x_n) = x_n$ (ce résultat s'établit par récurrence, il est vrai au rang 0 par définition, et s'il est vrai au rang n alors $S(x_{n+1}) = S(T(x_n)) = T(S(x_n)) = T(x_n) = x_{n+1}$). En utilisant la continuité de la fonction S, on obtient donc $S(x) = x$. Par ailleurs $x_{n+1} = T(x_n)$, en utilisant la continuité de T et la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $T(x) = x$.

Exercice 2.31.

1. Montrer qu'il existe une constance $K > 0$ tel que pour toute fonction $f \in C^1([-1,1], \mathbb{R})$ on a
$$|f(0)|^2 \leqslant K \int_{-1}^{1} f^2(x) + f'^2(x) dx.$$
2. Demontrer que cela est faux pour
$$|f(0)|^2 \leqslant K \int_{0}^{1} (f^2(x) + f'^2(x)) x^2 dx.$$
3. Demontrer que cela est faux pour
$$|f(0)|^2 \leqslant K \int_{0}^{1} (f^2(x) + f'^2(x)) x dx.$$

   On pourra considerer la fonction $f(x) = \ln(-\ln(x))$ pour $a > 0$.

Solution 2.31. 1) On considère χ une fonction C^2 tel que $\chi(x) = 1$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $\chi(x) = 0$ si $x \notin \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$ avec $|\chi'| \leqslant 4$. On a alors
$$f(0) = (f\chi)(0) = \int_0^1 (f\chi)'(x) dx = \int_0^1 f'\chi + f\chi'$$
et
$$\left|\int_0^1 f'\chi\right| \leqslant \int_0^1 |f'|$$
ainsi que
$$\left|\int_0^1 f\chi'\right| \leqslant 4 \int_0^1 |f|.$$
On a donc
$$|f(0)|^2 \leqslant \left(\int_0^1 |f'| + 4\int_0^1 |f|\right)^2 \leqslant K \int_0^1 f^2(x) + f'^2(x) dx.$$

2) Si on considère $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors $\int_0^1 (f^2(x) + f'^2(x))|x|^2 dx$ est une quantité fini mais $f(0) = +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut donc considerer
$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} \text{ si } x > \varepsilon \\ \text{affine si } x \leqslant \varepsilon \end{cases}$$
et qui est C^1, et quand $\varepsilon \to 0$ on a $f_\varepsilon(0) \to +\infty$ mais $\int_0^1 (f^2(x) + f'^2(x))|x|^2 dx$ reste bornée.

3) On a pour $f(x) = \ln(-\ln(x))$ que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$ et $f'(x) = \frac{-1}{x\ln(x)}$, donc $\int_0^1 f'^2(x) x dx = \int_0^1 \frac{1}{x\ln^2(x)} < +\infty$. On peut donc conclure avec un argument similaire a la question précédente.

Exercice 2.32. On considère l'équation $f' + f(1-f) = 0$.

1. Trouvez toutes les solutions de cette equation
2. Que dire de l'ensemble $M = \left\{\int_0^1 f(x)dx,\ f' + f(1-f) = 0 \text{ sur } [0,1]\right\}$?
3. Soit $\alpha \in M$. Montrer qu'il existe une unique solution de $f' + f(1-f) = 0$ tel que $\int_0^1 f = \alpha$. On la denote f_α. Montrer que $\partial_\alpha f_\alpha$ est bien définie et la calculer. Quelle équation vérifie t-elle ? Que dire de $\int_0^1 \partial_\alpha f_\alpha$?

Solution 2.32. 1) L'équation s'écrit

$$\frac{f'}{f} + \frac{f'}{1-f} = -1$$

et donc $(\ln(f) - \ln(1-f))' = -1$ c'est à dire

$$\ln\left(\frac{f}{1-f}\right) = C - x,$$

donc $\left(\frac{f}{1-f}\right)(x) = Ce^{-x}$ i.e. $f(x) = (1-f(x))Ce^{-x}$ d'où

$$f(x) = \frac{Ce^{-x}}{1+Ce^{-x}}$$

pour $C \geqslant 0$.

2) On calcule par le changement de variable $y = e^{-x}$ que

$$\int_0^1 \frac{Ce^{-x}}{1+Ce^{-x}}dx = \int_{e^{-1}}^1 \frac{Cdy}{1+yC} = \ln\left(\frac{1+C}{1+e^{-1}C}\right).$$

On vérifie que $C \to \frac{1+C}{1+e^{-1}C}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\lim_{C\to+\infty} \ln\left(\frac{1+C}{1+e^{-1}C}\right) = 1$$

et on obtient 0 pour $C = 0$. On a donc $M = [0, 1[$.

3) L'unicité vient du fait que $C \to \frac{1+C}{1+e^{-1}C}$ est strictement croissante. On definit C_α tel que $\ln\left(\frac{1+C_\alpha}{1+e^{-1}C_\alpha}\right) = \alpha$ qui est donc une fonction C^1 de α et donc $f_\alpha = \frac{C_\alpha e^{-x}}{1+C_\alpha e^{-x}}$ est donc bien C^1 par rapport à α. On vérifie que $\int_0^1 \partial_\alpha f_\alpha = 1$ et

$$\partial_\alpha f'_\alpha + \partial_\alpha f_\alpha - 2\partial_\alpha f_\alpha f_\alpha = 0.$$

Exercice 2.33. Soit $t > 0$ et $u_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui décroit exponentiellement vite en $\pm\infty$. On considère la fonction

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)dy.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie.
2. On suppose que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\int_{\mathbb{R}} P(y)u_0(y)dy = 0$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} u_t(t^{\frac{1}{2}}x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pourra commencer avec le cas $n = 0$.
3. On suppose que u_0 est C^∞ et que toutes ses dérivées décroissent exponentiellement vite en $\pm\infty$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t^{\frac{n}{2}} u_t^{(n+1)}(t^{\frac{1}{2}}x) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Solution 2.33. 1) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) \right| \leqslant K(x)\|u_0\|_{L^\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}}$$

donc l'integrale est bien définie.

2) En developpant on a $u_t(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} exp(-(\frac{2xy}{4\sqrt{t}} + \frac{y^2}{4t}))u_0(y)dy$. Si $n = 0$ on a $\int_{\mathbb{R}} u_0 = 0$, donc en faisant le DL en $1/\sqrt{t}$ du terme exponentiel, le terme constant disparait, et il reste au premier ordre $\int_{\mathbb{R}} \frac{-2xy}{4\sqrt{t}} u_0(y)dy$. On sort le $\sqrt{t}$ et le reste converge par domination vers une limite indépendente de t. Maintenant, dans le cas général, on voit que le DL en $1/\sqrt{t}$ est en fait un DL en $y/\sqrt{t}$ donc tous les terms en $\frac{1}{t^{k/2}}$ pour un k donné on un facteur en y^k, et donc ce terme vaudra 0 si $k \leqslant n$, ce qui permet de conclure.

3) On a $u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4t}} u_0(x-y)dy$, que l'on dérive maintenant $n+1$ fois, puis on fait la transformation inverse. On remarque facilement que $\int_{\mathbb{R}} P(y)u_0^{(n)}(y)dy = 0$ pour tout polynome P de degré $n-1$, donc on conclue par la question précédente.

Exercice 2.34. On note

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

On suppose que $|f(x)| \leqslant \frac{C_1}{(1+|x|)^a}$, $|g(x)| \leqslant \frac{C_2}{(1+|x|)^b}$ pour des constantes $C_1, C_2, a, b > 0$.

1. À quelle condition sur ces constantes a t-on que $f * g$ est bien définie ?
2. Montrer que si $a, b > 1$, alors il existe $C_3 > 0$ tel que

$$|f * g|(x) \leqslant \frac{C_3}{(1+|x|)^{\min(a,b)}}.$$

Question bonus : que se passe t-il si $|f| \leqslant C_1 e^{-a|x|}$ et $|g| \leqslant C_2 e^{-b|x|}$?

Solution 2.34. 1) À x fixé,

$$\frac{1}{(1+|x-y|)^a(1+|y|)^b} \sim \frac{1}{|y|^{a+b}}$$

quand $|y| \to +\infty$. Donc pour n'importe quelle $C_1, C_2 > 0$ avec $a + b > 1$ l'integrale est bien définie. Si $a + b \leqslant 1$ alors pour les fonctions $f(x) = \frac{C_1}{(1+|x|)^a}$ et $g(x) = \frac{C_2}{(1+|x|)^2}$, $f * g$ est mal définie car $\frac{1}{|y|^{a+b}}$ n'est pas intégrable en $+\infty$.

2) La fonction

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x - y|)^a (1 + |y|)^b} dy$$

est bien définie et continue sur $[-1, 1]$ donc admet un maximum. Donc donc pour tout $|x| \leqslant 1$ on a

$$|f * g|(x) \leqslant C_1 C_2 \max_{x \in [-1,1]} \phi(x)$$

il suffit alors de choisir $C_3 \geq 2^{\min\{a,b\}} C_1 C_2 \max_{x \in [-1,1]} \phi(x)$.

Supposons maintenant $|x| \geqslant 1$. On décompose

$$\begin{aligned} & |f * g|(x) \\ \leqslant \;& C_1 C_2 \left(\int_{\{|x-y| \leqslant \frac{|x|}{2}\}} \frac{dy}{(1 + |x - y|)^a (1 + |y|)^b} \right) \\ + \;& C_1 C_2 \left(\int_{\{|x-y| \geqslant \frac{|x|}{2}\}} \frac{dy}{(1 + |x - y|)^a (1 + |y|)^b} \right). \end{aligned}$$

Dans la deuxieme intégrale, on a $\frac{1}{(1+|x-y|)^a} \leqslant \frac{K}{|x|^a}$ et comme $a > 1$, $\frac{1}{(1+|y|)^b} \in L^1(\mathbb{R})$ donc

$$\int_{\{|x-y| \geqslant \frac{|x|}{2}\}} \frac{dy}{(1 + |x - y|)^a (1 + |y|)^b} \leqslant \frac{K}{|x|^a}.$$

Dans la premiere intégrale on a $\frac{1}{(1+|y|)^b} \leqslant \frac{K}{|x|^b}$ et donc

$$\int_{\{|x-y| \leqslant \frac{|x|}{2}\}} \frac{dy}{(1 + |x - y|)^a (1 + |y|)^b} \leqslant \frac{K}{|x|^b},$$

ce qui nous donne donc le résultat.

Exercice 2.35. On cherche à calculer la valeur maximale de

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 \ldots a_n)^{1/n}$$

parmi les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de nombres positif tel que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.

1. Calculez S dans le cas où les $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forment une suite géometrique (i.e. $a_{k+1} = r a_k$).
2. En déduire la valeure maximal de S parmi les suites géométriques.

3. Soit $x_1 \dots x_n$ des réels strictement positif, montrer que

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

4. On note $G_n = (a_1 \dots a_n)^{1/n}$. Montrer que

$$G_n \leqslant \frac{1}{n 2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} 4^k a_k.$$

5. En déduire que $S \leqslant 2/3$.

Solution 2.35. 1) Avec la fonction

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n x^n = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

on a

$$S = \frac{1-r}{\sqrt{r}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \left(\frac{\sqrt{r}}{2} \right)^n = \frac{1-r}{\sqrt{r}} f\left(\frac{\sqrt{r}}{2} \right) = \frac{2(1-r)}{(2-\sqrt{r})^2}$$

2) Avec $t = \sqrt{r} \in [0,1]$ et $\phi(t) = \frac{1-t^2}{(2-t)^2}$ on calcule son maximum

$$\phi'(t) = 2\frac{1-t^2}{(2-t)^3} - \frac{2t}{(2-t)^2} = \frac{2(1-t^2-t(2-t))}{(2-t)^3} = \frac{2(1-2t)}{(2-t)^3}$$

qui est donc atteint en $t = \frac{1}{2}$. Donc le maximum de S (pour les suites géométriques) est atteint pour $r = \frac{1}{4}$ et est égale à $\frac{2(1-\frac{1}{4})}{(2-\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{3}$.

3) Par la concavité du log on a

$$\ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \ln\left((x_1 \cdots x_n)^{1/n} \right)$$

4) On a pour la suite $x_k = 4^k a_k$

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} = 4^{\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n}} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = 2^{n+1} G_n$$

et avec la question précédente

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 4^k a_k$$

5) On a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} G_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{4^{n-k}} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^j} \leqslant \frac{2}{3} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k.$$

On peut échanger les sommes car tous les termes sont positifs.

Exercice 2.36. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ avec $x_0 \in [0, 1]$.

1. À quel condition sur a a t-on que $x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Si $0 \leqslant a < 1$, montrer que $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
3. Que dire si $a = 1$?
4. On note $u_n = x_n - \frac{a-1}{a}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - ax_n$.
5. En déduire que si $a \in]1, 2[$ alors $x_n \to \frac{a-1}{a}$ quand $n \to +\infty$.

Solution 2.36. 1) $x \to ax(1 - x)$ atteint sont maximum sur $[0, 1]$ en $\frac{1}{2}$ où il vaut $\frac{a}{4}$. On doit donc avoir $0 \leqslant a \leqslant 4$.

2) On a $x_{n+1} \leqslant ax_n$ donc $x_n \leqslant a^n x_0 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3) On a $x_{n+1} \leqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, elle converge donc vers une limite $b \in [0, 1]$ qui vérifie $b = b(1 - b)$, donc $b = 0$.

4) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^2x_n - a^2x_n^2 - a + 1}{ax_n - a + 1} = \frac{-a^2x_n^2 + (a^2 - 1)x_n + x_n - a + 1}{ax_n - a + 1} = -ax_n + 1$$

5) Si $a \in]1, 2[$ alors $1 - ax_n \in [-1, 1]$ donc $|u_n|$ est decroissante donc converge vers une limite. Si cette limite n'est pas 0, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ et donc $x_n \to 0$ mais par la relation de reccurence sur x_n, si $x_n < 1 - \frac{1}{a}$ alors $x_{n+1} > x_n$ ce qui est une contradiction avec $x_n \to 0$. Donc $u_n \to 0$ et $x_n \to \frac{a-1}{a}$.

Exercice 2.37. Soit $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ avec $\eta(0) = 1$ et $\eta(x) = 0$ si $x \geqslant 1$.

1. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 + O_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\right).$$
2. Calculer
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \eta\left(\frac{n}{N}\right).$$
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) = CN - \frac{1}{2} + O_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Solution 2.37. 1) Par Taylor Lagrange on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\eta\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \eta'(x_n)\frac{n}{N}\right) = 1 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta'(x_n)n}{2^n}$$

avec $x_n \in [0, \frac{n}{N}]$. Comme la fonction η' est continue est bornée sur $[0, 1]$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et la serie est donc sommable.

2) On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\eta\left(\frac{n}{N}\right) &= \sum_{n=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\eta\left(\frac{2n}{N}\right)-\eta\left(\frac{2n+1}{N}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\left(-\frac{1}{N}\eta'\left(\frac{2n}{N}\right)+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\\ &\underset{N\to\infty}{\to} -\frac{1}{2}\int_0^1\eta'(x)dx=-\frac{1}{2}\eta(0)\end{aligned}$$

où on reconnait une somme de Riemman.

Exercice 2.38. Trouver l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux constantes a, b telles que pour tout x, y,

$$h(x,y)=a\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)+b\frac{\partial h}{\partial y}(x,y).$$

et qu'il existe une constante M tel que $|h(x,y)|\leqslant M$ pour tout x, y.

Solution 2.38. Posons $g(t)=h(x+at,y+bt)$, alors l'énoncé se traduit en $g'(t)=g(t)$ pour tout t, donc $g(t)=g(0)e^t$, donc la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$ est la solution nulle, donc $h=0$.

Exercice 2.39. Trouver l'ensemble des fonctions f dérivables sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in]-1,1[$,

$$f(x)-f(y)\geqslant f(x)^2(x-y).$$

Solution 2.39. Déjà la fonction nulle fonctionne. On a également

$$f'(x)=\lim_{y\to x^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq f(x)^2\leq \lim_{y\to x^-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(x)$$

et donc $f'(x)=f(x)^2$. Si il existe x tel que $f(x)\neq 0$ alors il existe interval $I\subset]-1,1[$ tel que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$ et on a alors $(1/f)'(x)=-1$. Ce qui signifie

$$f(x)=\frac{1}{c-x}$$

pour une certaine constante c. Ces fonctions sont strictement convexes si $c>1$, ce qui est le mauvais sens dans l'inégalité, et strictement concave si $c<-1$, donc les solutions sont $f=0$ et ou $f(x)=\frac{1}{c-x}$, $c<-1$. On a bien

$$f(x)-f(y)=\frac{x-y}{(c-y)(c-x)}\geqslant\frac{x-y}{(c-x)^2}=f(x)^2(x-y)$$

Exercice 2.40. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, strictement positive, décroissante, de limite 0 et intégrable.

1. Montrez que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\int_x^\infty f(t)dt}=0$$

2. Montrer que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=-\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\int_x^\infty f(t)dt}=+\infty$$

Solution 2.40. 1) Soit $\varepsilon>0$, il existe x_0 tel que $f'(x)/f(x)\geqslant-\varepsilon$ pour tout $x\geqslant x_0$, c'est-à-dire

$$(\ln f)'(x)\geqslant-\varepsilon.$$

Remarque : par hypothèse $f>0$, donc $\ln f$ est bien défini, et dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_-$. On a alors

$$\ln f(x+t)\geqslant\log f(x)-\varepsilon t$$

pour tout $t>0$ et $x\geq x_0$ c'est à dire $f(x+t)\geqslant f(x)e^{-\varepsilon t}$ et on peut en déduire

$$\int_x^\infty f(u)du=\int_0^\infty f(x+t)dt\geqslant f(x)\int_0^\infty e^{-\epsilon t}dt=\frac{f(x)}{\epsilon}$$

et donc

$$0\leq\frac{f(x)}{\int_x^\infty f(u)du}\leq\epsilon.$$

2) La preuve est la même en commençant par

$$(\ln f)'(x)\leq -A$$

avec $A>0$ suffisament grand.

Exercice 2.41. Soit $u_0=v_0=0$, $u_1=1$, $v_1=-1$ et $(u_n)_{n\geqslant2}$ et $(v_n)_{n\geqslant2}$ définis par

$$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n+\frac{1}{2}v_n+2u_{n-1}-v_{n-1},\\ v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}v_n-u_{n-1}+2v_{n-1}.\end{cases}$$

Calculer le terme général des suites u et v.

Solution 2.41. Cela s'écrit matriciellement sous la forme

$$a_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix},\quad A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix},\quad a_{n+1}=Aa_n+Ba_{n-1}.$$

Les matrices A et B sont codiagonalisables de vecteurs propres $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Les vecteurs a_0 et a_1 sont proportionnels à $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, donc par récurrence immédiate a_n aussi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=w_n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $w_n\in\mathbb{R}$

$$a_{n+1}=w_nA\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+w_{n-1}B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=w_n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+3w_{n-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

et on se ramène donc à une équation usuelle du second ordre la relation $w_{n+1} = w_n + 3w_{n-1}$. Les racines du polynome $X^2 - X - 3$ sont $x_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$, et donc le terme général est donné par $w_n = ax_+^n + bx_-^n$. Avec les conditions initiales on a $w_0 = a + b = 0$ donc $a = -b$ et $w_1 = a(x_+ - x_-) = 1$ donc $a = 1/\sqrt{13}$.

Exercice 2.42. Soit $f(t) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(2\pi kt)$, où pour tout k, a_k est un réel, et $a_N \neq 0$. Soit N_j le nombre de zéros de $f^{(j)}$ (la dérivée j-ième de f) sur $[0, 1[$, multiplicité comprise. Montrer que la suite $(N_j)_{j \geqslant 0}$ est croissante de limite $2N$.

Solution 2.42. Via le théorème de Rolle : entre chaque zéro $0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k < 1$ de $f^{(j)}$ se trouve un zéro de $f^{(j+1)}$ (en bouclant l'intervalle $[0, 1)$ sur lui-même pour trouver un zéro entre a_k et a_0 comme f est périodique). Ceci marche même si un des zéros est de multiplicité $\geqslant 1$, par exemple $a_u = a_{u+1}$, vu qu'alors a_u sera toujours un zéro de $f^{(j+1)}$, mais de multiplicité 1 de moins. Cela assure donc que $(N_j)_j$ est une suite croissante.

Pour la limite, le terme dominant de $f^{(j)}$ quand $j \to +\infty$ est celui issu de $a_N \sin(2\pi Nt)$,

$$\frac{f^{(j)}(t)}{a_N(2\pi N)^j} = \sin(2Nt + \frac{j\pi}{2}) + o_{N\to\infty}(1)$$

Donc pour N suffisament grand par le TVI sur chaque intervalle où $\sin(2Nt + \frac{j\pi}{2})$ change de signe il y a un zéro de f ce qui produit au moins $2N$ zéros. Par ailleurs, $f^{(j)}$ peut se voir comme un polynôme complexe en $z = \exp(i2\pi t)$ de degré $2N$ divisé par z^N, donc admet au plus $2N$ racines dans $\mathbb{C}$, donc sur le cercle, donc a fortiori $f^{(j)}$ admet au plus $2N$ racines dans $[0, 1)$.

Exercice 2.43. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, dérivables sur $\mathbb{R}$, définie par $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(0) = 1$, et $f_{n+1}'(x) = e^x \sqrt{f_n(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $n \to +\infty$, pour $x > 0$.

Solution 2.43. Par récurrence, on montre que pour $x > 0$, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante, positive et majorée par la solution de $h'(x) = e^x \sqrt{h(x)}$ dont la solution est satisfait $(\sqrt{h})'(x) = e^x/2$, et donc

$$h(x) = (1 + e^x/2)^2.$$

La suite $(f_n(x))$ converge donc vers une fonction $g(x)$, et ce pour tout x ; cette convergence est également uniforme. En effet toutes les fonction f_n sont Lipschitz sur $[0, x]$ de coefficient $e^x f(x)$, donc la limite g aussi. Cela assure donc que f_n' convergence uniformément sur $[0, x]$ et , on en déduit alors que $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g'(x) = \sqrt{g(x)}e^x$. Finalement $g = h$.

Exercice 2.44. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle

$$f'(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) - 1}$$

de condition initiale $f(0) \notin \{0, 1\}$. Fournir un équivalent en $+\infty$ de f. (On pourra admettre qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+$.)

Solution 2.44. Tout d'abord $f(x) = \frac{1}{2}$ est une solution. Supposons $f(0) \in]0, \frac{1}{2}[$. Par Cauchy-Lipschitz les solutions de l'équation différentielle ne peuvent pas se croiser et donc $0 < f(x) < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Donc $f'(x) \geq 0$. f est alors monotone croissante donc convergente et $\frac{1}{2}$ est la seule limite possible (unique zéro de la dérivée). On peut faire le même raisonnement dans le cas $f(0) \in]\frac{1}{2}, 1[$ et avoir que f converge aussi vers $\frac{1}{2}$ dans ce cas là.

Si $f(0) > 1$, alors $f(x) \geqslant f(0) > 1$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet sinon f aurait un maximum local $> f(0)$ vu que $f'(0) > 0$, en lequel $f' = 0$, ce qui impliquerait que $f = 1/2$ en ce point, or ce maximum local est censé être $> f(0)$, contradiction. On a donc pour tout x,

$$\frac{2}{f(x)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{f(x)-1},$$

ce qui implique $(f^2)'(x) \geqslant 4$ et $((f-1)^2)'(x) \leqslant 4$ pour tout $x \geqslant 0$, et donc

$$2\sqrt{x + f(0)^2/4} \leqslant f(x) \leqslant 1 + 2\sqrt{x + (f(0)-1)^2/4},$$

d'où $f(x) \sim 2\sqrt{x}$ en $+\infty$. On peut faire un raisonnement similaire pour $f(0) < 0$.

Exercice 2.45. Fournir un équivalent de $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$ quand $x \to +\infty$ (ou au moins un encadrement à une puissance de x près).

Solution 2.45. Minoration grossière : en notant $f(x)$ cette expression, pour $x > 0$, on a $f(x)^2 \geqslant e^{x^2}$ en développant le produit et en ne gardant que les termes diagonaux, donc $f(x) \geqslant \exp(x^2/2)$.

Majoration grossière : Notons $a_k = \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$ et b_k une suite sommable, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$f(x)^2 = \left(\sum_{k\geqslant 0} a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{a_k^2}{b_k}\right)\left(\sum_{j\geqslant 0} b_j\right) \leqslant c\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^{2k}}{k!b_k}.$$

Prenons $b_k = \frac{1}{k(k-1)}$ si $k \geqslant 2$ et 1 sinon, cela implique

$$f(x)^2 \leqslant c\left(1 + x^2 + \sum_{k\geqslant 2}\frac{x^{2k}}{(k-2)!}\right) = c\left(1 + x^2 + x^4\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^{2k}}{k!}\right) \sim cx^4\exp(x^2),$$

et donc $f(x) = O(x^2\exp(x^2/2))$.

Pour une majoration plus précise, via Stirling, le terme est maximal en $k = x^2$ (on peut supposer x^2 entier pour simplifier), et vérifie $a_{x^2} \sim ce^{x^2/2}/\sqrt{x}$ (c constante, $(2\pi)^{-1/4}$). (À noter, minorer $f(x)$ par le plus grand terme est moins bon que la minoration grossière !)

Ensuite, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et $i \geqslant 0$,

$$a_{x^2(1-\varepsilon)-i} \leqslant a_{x^2(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)^i \leqslant a_{x^2}(1-\varepsilon)^{i/2}$$

et idem pour $a_{x^2(1+\varepsilon)+i}$, donc si ε petit ($\leqslant 1/2$), il existe $c' \geqslant 2$ tel que

$$f(x) \leqslant a_{x^2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-\varepsilon}} + 2\varepsilon x^2\right) \leqslant a_{x^2}\left(\frac{c'}{\varepsilon} + 2\varepsilon x^2\right) \leqslant (2+c')a_{x^2}x$$

en prenant $\varepsilon = 1/x$, donc $f(x) = O(\sqrt{x}\exp(x^2/2))$.

BONUS : c'est le bon ordre de grandeur, en faisant un DL de a_k pour k proche de y^2, on a dans la limite $1 \ll k \ll x^2$:

$$\log a_{x^2-k} - \log a_{x^2} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\log\left(1-\frac{j}{x^2}\right) \sim -\frac{k^2}{4x^2},$$

donc $a_k \geqslant a_{x^2}/2$ sur un intervalle de taille x, d'où $f(x) \gtrsim x a_{x^2}/2$, ce qui est d'ordre $\sqrt{x}\exp(x^2/2)$.

Exercice 2.46. Soit $A > 0$. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre la somme $\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2$ quand $(x_i)_{i\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs (ou nuls) satisfaisant $\sum_i x_i = A$?

Solution 2.46. C'est l'intervalle $(0, A^2]$. La somme est forcément inférieur à A^2 car $(\sum_i x_i)^2 \geqslant \sum_i x_i^2$ par positivité des x_i. Ensuite, en prenant x_i suite géométrique de raison $q < 1$ et de terme initial $A(1-q)$, on a $\sum_i x_i^2 = A^2\frac{(1-q)^2}{1-q^2} = A^2\frac{1-q}{1+q}$, et la fraction en q parcourt $(0, 1]$ quand q parcourt $[0, 1)$. 0 n'est pas atteignable parce qu'au moins un terme de la suite est non nul.

Exercice 2.47. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\int_0^t f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{8}\|f'\|_\infty.$$

Solution 2.47. Notons $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, alors $F(0) = F(1) = 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $\|F\|_\infty = \max_t F(t)$. Notons T le point en lequel ce max est atteint, alors $F'(T) = 0 = f(t)$, et par conséquence, $f(T-u) \leqslant u\|f'\|_\infty$ pour tout $u \in [0,T]$.

Si $T \leqslant \frac{1}{2}$, on en déduit

$$F(T) = \int_0^T f(x)dx = \int_0^T f(T-u)du \leqslant \int_0^T u\|f'\|_\infty du \leqslant \frac{T^2}{2}\|f'\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}\|f'\|_\infty.$$

Si à l'inverse $T \geqslant \frac{1}{2}$, alors comme $\int_0^1 f(x)dx$, on a

$$F(T) = -\int_T^1 f(x)dx \leqslant \frac{(1-T)^2}{2}\|f'\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}\|f'\|_\infty$$

pour la même raison.

Exercice 2.48. Trouver l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrables telles que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en dehors d'un compact (i.e. telle qu'il existe $A > 0$ telles que $f = 0$ en dehors du segment $[-A, A]$), on ait $\int xf(x)g(x)dx = \int f'(x)g(x)dx$.

Solution 2.48. Énoncé + IPP :

$$\int xf(x)g(x)dx = \int f'(x)g(x)dx = [fg]_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x)g'(x)dx,$$

donc comme f nulle en dehors d'un compact, $\int f(x)(xg(x) + g'(x))dx = 0$. (À noter : aucune de ces intégrales ne pose problème, vu qu'on intègre des fonctions continues sur un compact, donc elles sont bornées, donc intégrables).

S'il existe x tel que $xg(x) + g'(x) \neq 0$, disons > 0 alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $yg(y) + g'(y) > 0$ sur $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, et on peut construire une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ qui est nulle en dehors de $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, positive et d'intégrale > 0 (par exemple en prenant la bonne primitive de $t \mapsto -\sin(\pi(t - x)/\varepsilon)1|_{|t-x|\leqslant\varepsilon})$, pour laquelle on aura donc $\int f(y)(yg(y) + g'(y))dy > 0$. Contradiction.

Par conséquent, g doit satisfaire $g'(x) + xg(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $(x \mapsto g(x)e^{x^2/2})'(x) = (g'(x) + xg(x))e^{x^2/2}$, on en déduit que $g(x)e^{x^2/2}$ est constante, donc $g(x) = ce^{-x^2/2}$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$, et toutes ces fonctions sont bien des solutions de l'énoncé.

Remarque : pour résoudre l'équation différentielle, on peut aussi dire que ça implique $(\log g)'(x) = -x$ ou $(\log(-g))'(x) = -x$, mais ça demande de bien vérifier que g est de signe constant et ne s'annule jamais.

Chapitre 3

Probabilité

Exercice 3.1. Soit n et k des entiers strictement positifs fixés et a un entier positif. On choisit un sous ensemble à k éléments $X \subset \{1, \cdots, k+a\}$ aléatoirement selon une loi uniforme et un sous ensemble à n éléments $Y \subset \{1, \cdots, k+n+a\}$ aléatoirement selon une loi uniforme également et tel que X et Y soient indépendant. Montrer que la probabilité

$$\mathbb{P}(\min(Y) > \max(X))$$

ne dépend pas de a.

Solution 3.1. On calcule le nombre total d'états

$$\text{Pour } X : \binom{k+a}{k} \quad \text{Pour } Y : \binom{n+k+a}{n}$$

$$\text{Total } (X,Y) : \binom{k+a}{k}\binom{n+k+a}{n}$$

On calcule maintenant le nombre d'états tel que $\min(Y) > \max(X)$. Pour cela on note $Z = X \cup Y \subset \{1, \cdots, k+n+a\}$. Comme $\min(Y) > \max(X)$, X et Y sont distincts donc $|Z| = n+k$. Soit $Z' \subset \{1, \cdots, n+k+a\}$ un sous ensemble à $n+k$ éléments que nous notons $z'_1 < \cdots < z'_k < z'_{k+1} < \cdots < z'_{k+n}$. On remarque que $z'_k \leqslant k+a+n-n = k+1$. On a donc une bijection

$$(z'_1, \cdots, z'_k) \leftrightarrow X$$
$$(z'_{k+1}, \cdots, z'_k) \leftrightarrow Y$$

entre les sous ensembles à $n+k$ éléments et les couples X, Y vérifiant $\min(Y) >$

$\max(X)$. Il y en a donc $\binom{n+k+a}{n+k}$. Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(Y) > \max(X)) &= \frac{\binom{n+k+a}{n+k}}{\binom{k+a}{k}\binom{n+k+a}{n}} \\ &= \frac{(n+k+a)!k!a!n!(k+a)!}{(n+k)!a!(k+a)!(n+k+a)!} \\ &= \frac{k!n!}{(n+k)!}\end{aligned}$$

Exercice 3.2.

1. Pour $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}(|X_\lambda - \lambda| > \epsilon\lambda) = 0$
2. Soient A, B, C trois variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ. Donner la limite de
$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}(\text{Le polynome } AX^2 + BX + C \text{ a des racines réelles})$$
3. Même question pour $AX^3 + BX^2 + CX + D$.

Solution 3.2. 1) On a pour une loi de Poisson $\mathbb{E}(X_\lambda) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X_\lambda) = \lambda$, Donc par Tchebyschev

$$\mathbb{P}(|X_\lambda - \mathbb{E}(X_\lambda)| > \epsilon\lambda) = \frac{\mathrm{Var}(X_\lambda)}{\epsilon^2\lambda^2} = \frac{1}{\lambda\epsilon^2}$$

qui converge vers 0 lorsque $\lambda \to 0$.

2) On peut considérer le discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Avec une probabilité qui converge vers 1 on a $|A - \lambda|, |B - \lambda|, |C - \lambda| \leqslant \epsilon\lambda$ et donc

$$\Delta \leqslant \lambda^2(1+\epsilon)^2 - 4\lambda^2(1-\epsilon)^2 = \lambda^2((1+\epsilon)^2 - 4(1-\epsilon)^2) < 0$$

pour ϵ suffisament petit. Donc n'a pas racine.

3) Pour la dernière question en utilisant Rolle si le polynome admet des racines réelles son polynome dérivé également

$$P' = 3AX^2 + 2BX + C$$

Par le même raisonnement que la question précédente : avec $\Delta = 4B^2 - 12AC$, on a que $\Delta < 0$ dans le cas $|A - \lambda|, |B - \lambda|, |C - \lambda| \leqslant \epsilon\lambda$.

Exercice 3.3. (Théorème central limite) On note γ la fonction $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-x^2/2)$ et on admet que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x)dx = 1$$

Soit(X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On note $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(P(M_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\gamma(x)dx.$$

On pourra commencer par les questions suivantes

1. Cas $P = X^k$ pour k impair.
2. Cas $P = X^2$.
3. Donner une formule de récurrence pour $\int_{\mathbb{R}} x^{2k}\gamma(x)dx$
4. Montrer que $\mathbb{E}(M_n^{2k}) = (k-1)\mathbb{E}(M_n^{k-2}) + o(1)$ lorsque $n \to \infty$.

Solution 3.3. Il suffit de monter l'égalité pour les polynomes de la forme $P = X^k$, $k \in \mathbb{N}$. Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Si k est impair, on peut remarquer que S_n^k a la même loi que $(-S_n)^k = -(S_n)^k$, Donc

$$\mathbb{E}((S_n)^k) = -\mathbb{E}((S_n)^k) = 0.$$

Si k est pair

$$S_n^k = \sum_{i=1}^n X_i S_n^{k-1}$$

Comme tous les X_i ont la même loi on a alors

$$\mathbb{E}S_n^k = n\mathbb{E}X_n S_n^{k-1}$$

On écrit alors

$$S_n^{k-1} = (S_{n-1} + X_n)^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} X_n^m S_{n-1}^{k-1-m}$$

Si m est impair, $X_n X_n^m = 1$ et si m est pair $\mathbb{E}X_n X_n^m = 0$.

$$\mathbb{E}X_n S_n^{k-1} = \sum_{m=1, m \text{ impair}}^{k-1} \binom{k-1}{m} \mathbb{E}S_{n-1}^{k-1-m}$$

Par hypothese de récurrence $\mathbb{E}S_{n-1}^{k-1-m} \sim n^{(k-1-m)/2}$. Donc

$$\mathbb{E}X_n S_n^{k-1} \sim (k-1)\mathbb{E}S_n^{k-2}$$

Et finalement

$$\mathbb{E}M_n^k = n^{-k/2}\mathbb{E}S_n^k \sim n^{1-k/2}(k-1)\mathbb{E}S_n^{k-2} = (k-1)\mathbb{E}M_n^{k-2}.$$

Par intégration par partie on a également la relation de récurrence

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\gamma(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1}\left(x\gamma(x)\right)dx = (k-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2}\gamma(x)dx$$

Exercice 3.4. (Domination stochastique) Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y majore stochastiquement X (on écrit $X \lesssim Y$) si, pour tout réel t, on a $\mathbb{P}(X > t) \leqslant \mathbb{P}(Y > t)$.

1. Montrer que $X \lesssim Y$ si et seulement si, pour toute fonction croissante $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, on a $\mathbb{E}(h(X)) \leqslant \mathbb{E}(h(Y))$
2. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $X \lesssim Y$. Montrer que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) > \frac{1}{2}$
3. Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Poisson, de paramètres respectifs λ et μ. Montrer l'équivalence $\lambda \leqslant \mu \Leftrightarrow X \lesssim Y$.

Solution 3.4. On connait la formule

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X \geq k)$$

et on va montrer une version plus générale pour calculer $\mathbb{E}(h(X))$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\left(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^{\infty} h(k-1)\mathbb{P}(X \geq k) \\
&= h(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(h(k) - h(k-1))\mathbb{P}(X \geq k)
\end{aligned}$$

Comme h est croissante on a $h(k) - h(k-1) \geq 0$ et on obtient

$$\mathbb{E}(h(X)) \leq h(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(h(k) - h(k-1))\mathbb{P}(Y \geq k) = \mathbb{E}(h(Y))$$

où on a utilisé que $\mathbb{P}(X \geq k) \leqslant \mathbb{P}(Y \geq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour la réciproque on pose

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq t \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors h est croissante et on a

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{P}(Y > t).$$

Exercice 3.5. Le but de l'exercice est de donner une estimation de

$$f(n) = \sum_{k\leqslant n} \frac{n^k}{k!} \quad \text{pour } n \to \infty$$

1. Montrer que $f(n) \leqslant \exp(n)$ et que $\log(\frac{n^n}{n!}) \sim n$
2. Montrer que pour tout $\ell \leqslant \epsilon n$

$$\frac{n^{n-\ell}}{(n-\ell)!} = \frac{n^n}{n!} \exp\left(-\frac{\ell^2}{2n}(1 + O(\frac{\ell}{n})\right)$$

3. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k\leqslant n(1-\epsilon)} \frac{n^k}{k!}}{f(n)} = 0.$$

4. Montrer que

$$f(n)e^{-n} \to \frac{1}{2}.$$

5. Donner une interprétation probabiliste de ce résultat.

Solution 3.5. On a directement que

$$f(n) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n$$

et par la formule de Stirling

$$\frac{n^n}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

2) On calcul

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^{n-\ell}}{n^n}\frac{n!}{(n-\ell)!}\right) &= \ln\left(\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-\ell+1}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{0\leq k<\ell} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \\
&= -\sum_{0\leq k<\ell} \left(\frac{k}{n} + O\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right) \\
&= -\frac{\ell^2}{2n} + O\left(\frac{\ell^3}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

3) La suite $u_k = \frac{n^k}{k!}$ est croissante sur $1 \leq k \leq n$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leqslant n(1-\epsilon)} \frac{n^k}{k!} &\leqslant n(1-\epsilon) \times u_{n(1-\epsilon)} \\
&= n(1-\epsilon) \times \frac{n^{n(1-\epsilon)}}{(n(1-\epsilon))!} \\
&\sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \times \frac{e^{n(1-\epsilon)}}{(1-\epsilon)^{n-1}} \\
&= o(u_n)
\end{aligned}$$

4) Avec les questions précédentes

$$f(n) \sim \sum_{n(1-\epsilon) \leq k \leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{0 \leq \ell \leq \epsilon n} \frac{n^{n-\ell}}{(n-\ell)!} = \frac{n^n}{n!} \sum_{0 \leq \ell \leq \epsilon n} \exp\left(-\frac{\ell^2}{2n} + O\left(\frac{\ell^3}{n^2}\right)\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}
e^{-n} f(n) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{0 \leq \ell \leq \epsilon n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\sqrt{n}}\right)^2 + O\left(\frac{\ell^3}{n^2}\right)\right) \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

où on a reconnu une somme de Riemann.

Exercice 3.6. On choisit un entier $n \in \{1, \cdots, N\}$ aléatoirement selon une loi uniforme. Le but de cet exercice est d'estimer le nombre typique de diviseur premier de n lorsque $N \to \infty$ que l'on notera $D(n)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(D(n)) \sim \sum_{p \text{ premier }, p \leqslant N} \frac{1}{p}$ pour $N \to \infty$. (On pourra commencer par donner $\mathbb{P}(p$ divisent $n)$.)
2. Soit $p, q \leqslant N$ deux nombres premiers, calculer $\mathbb{P}(q$ et p divisent $n)$.
3. On admettra que $\sum_{p \text{ premier }, p \leqslant N} \frac{1}{p} \sim \log \log N$ pour $N \to \infty$. Montrer que
$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{D(n)}{\log \log N} - 1\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

Solution 3.6. On calcul

$$\mathbb{E}(D(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{p \in \mathcal{P}} 1_{p|n} = \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n=1}^N 1_{p|n} = \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathcal{P}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$$

Et donc

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leqslant N} \frac{1}{p} \leqslant \mathbb{E}(D(n)) \leqslant \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} + \frac{\#\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant N\}}{N}.$$

Et on pourra admettre que la proportion de nombres premiers temps vers 0.

2) On a directement

$$\mathbb{P}(q \text{ et } p \text{ divisent } n) = \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor.$$

En particulier

$$\mathrm{Cov}(1_{p|n}, 1_{q|n}) = \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor - \frac{1}{N^2}\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(1_{p|n}, 1_{q|n}) \leqslant \frac{1}{pq} - \frac{1}{N^2}\left(\frac{N}{p} - 1\right)\left(\frac{N}{q} - 1\right) = \frac{1}{Np} + \frac{1}{Nq} - \frac{1}{N^2}$$

et

$$\mathrm{Var} D(n) = \mathrm{Var}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}} 1_{p|n}\right) = \sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{q\in\mathcal{P}} \mathrm{Cov}(1_{p|n}, 1_{q|n}) \leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{q\in\mathcal{P}} \left(\frac{1}{Np} + \frac{1}{Nq}\right)$$

Et donc

$$\mathrm{Var} D(n) \leq \frac{2\#\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant N\}}{N} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$$

Par Chebytchev

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{D(n)}{\log\log N} - 1\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(D(n))}{\epsilon^2(\log\log N)^2} \leqslant \frac{2\#\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant N\}}{\epsilon^2(\log\log N)^2 N}$$

Exercice 3.7. On choisit σ une permutation sur $\{1, \cdots, N\}$ aléatoirement selon une loi uniforme. Le but de l'exercice est d'estimer la taille de la plus grande sous suite croissante ?

1. On note $P_2(\sigma)$ l'ensemble des paires $(i,j) \in \{1, \cdots, N\}^2$ telles que $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$. Calculer $\mathbb{E}(|P_2(\sigma)|)$
2. On note $P_k(\sigma) = \{(i_1, \cdots, i_k) \in \{1, \cdots, N\}^k, i_1 < \cdots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)\}$ c'est à dire l'ensemble des sous suites croissantes de longueurs k dans σ. Calculer $\mathbb{E}(|P_k(\sigma)|)$.
3. En déduire que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\text{la plus grande sous suite croissante } > (e+\epsilon)\sqrt{N}) = 0$$

Solution 3.7. 1) et 2) Soit $(i_1, \cdots, i_k)$ tel que $i_1 < \cdots < i_k$ alors

$$\mathbb{P}(\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)) = \frac{1}{k!}$$

Donc en introduisant les fonctions indicatrices $1_{\sigma(i_1)<\cdots<\sigma(i_k)}$ pour chaque suite d'indice croissante

$$\mathbb{E}(|P_2(\sigma)|) = \mathbb{E}(\sum_{(i_1,\cdots,i_k)} 1_{\sigma(i_1)<\cdots<\sigma(i_k)}) = \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \mathbb{E}(1_{\sigma(i_1)<\cdots<\sigma(i_k)}) = \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \frac{1}{k!}$$

et donc

$$\mathbb{E}(|P_2(\sigma)|) = \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \frac{1}{k!} = \binom{N}{k}\frac{1}{k!} = \frac{N!}{(k!)^2(N-k)!}$$

3) On a

$$\frac{N!}{(N-k)!} \leqslant N^k$$

On évalue avec la formule de Stirling : $\log k! \sim k\log k - k$

$$\begin{aligned}\log \frac{N^k}{(k!)^2} &\sim k\log N - 2(k\log k - k)\\ &= k(\log N - 2\log k + 2)\\ &= k\log\left(\frac{e^2N}{k^2}\right)\end{aligned}$$

Dans le cas $k \geqslant (e+\epsilon)\sqrt{N}$ on a

$$\lim_{N\to\infty} \log\frac{N!}{(k!)^2(N-k)!} = -\infty$$

et alors

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(|P_k(\sigma)|) = 0.$$

Par l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(\exists \text{ suite croissante de longueur } k) \leqslant \mathbb{E}(|P_k(\sigma)|) \to 0.$$

Exercice 3.8. (Alternance de projection et de rotation aléatoire.) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On pose la suite suivante

$$u_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad u_{n+1} = A_{n+1}u_n$$

où A_n est une suite de matrices aléatoires indépendantes avec $A_n = R = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle θ avec probabilité p et $A_n = P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ la matrice de projection sur l'axe x avec probabilité $1-p$. Le but de l'exercice est de donner un comportement de u_n pour n.

1. On note $t_1 < \cdots < t_k < \cdots$ les temps tel que $A_{t_k} = P$. Quel est la loi de $\|u_{t_1}\|$? On supposera que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.
2. Estimer le nombre de $\{k : t_k \leqslant N\}$ lorsque $N \to \infty$.
3. Calculer l'espérance de $\log\|u_{t_1}\|$ dans le cas $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
4. Pourriez vous proposer alors un équivalent à $\log\|u_N\|$ lorsque $N \to \infty$?

Solution 3.8. 1) Par composition des matrices de rotations on a pour $m \in \mathbb{N}$

$$R^m = \begin{pmatrix} \cos m\theta & -\sin m\theta \\ \sin m\theta & \cos m\theta \end{pmatrix}, \ R^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} \text{ et } PR^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(m\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $PR^\ell u_0 = \cos(\ell\theta) u_0$. Si $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ les $\cos(m\theta)$ sont tous différents pour $m \in \mathbb{N}$ et on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|u_{t_1}\| = \cos(m\theta)) = \mathbb{P}(t_1 = m+1) &= \mathbb{P}(A_1 = \cdots = A_m = R, A_{m+1} = P) \\ &= p^m(1-p) \end{aligned}$$

2) Par la loi faible des grands nombres on a directement que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{|\{k : t_k \leqslant N\}|}{N} - (1-p) \right| > \epsilon \right) = 0$$

donc $|\{k : t_k \leqslant N\}| \simeq (1-p)N$.

3) Avec la preuve de la question 1) on a que

$$\|u_{t_1}\| = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 = 1 \mod 3 \\ |\cos \frac{2\pi}{3}| = \frac{1}{2} & \text{si } t_1 = 2 \mod 3 \\ |\cos \frac{4\pi}{3}| = \frac{1}{2} & \text{si } t_1 = 3 \mod 3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \log \|u_{t_1}\| &= \sum_k \log \|u_k\| \mathbb{P}(t_1 = k) \\ &= \sum_{k=1 \mod 3} \mathbb{P}(t_1 = k) + \log \frac{1}{2} \sum_{k=0,2 \mod 3} \mathbb{P}(t_1 = k) \\ &= \sum_{k=1 \mod 3} \mathbb{P}(t_1 = k) + \log \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=1 \mod 3} \mathbb{P}(t_1 = k) \right) \end{aligned}$$

Et finalement

$$\sum_{k=1 \mod 3} \mathbb{P}(t_1 = k) = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^{3n} = \frac{1-p}{1-p^3} = \frac{1}{1+p+p^2}$$

Donc

$$\mathbb{E} \log \|u_{t_1}\| = \frac{1 - (p+p^2)\log 2}{1+p+p^2}$$

4) Soit M tel que $t_M \leqslant N < t_{M+1}$ on a alors

$$\begin{aligned} \log \|u_N\| &= \log \frac{\|u_N\|}{\|u_{t_M}\|} + \sum_{k=0}^{M-1} \log \frac{\|u_{t_{k+1}}\|}{\|u_{t_k}\|} \\ &= O(1) + \sum_{k=0}^{M-1} \log |\cos(\theta(t_{k+1} - t_k - 1))| \end{aligned}$$

On remarque que $(\log|\cos(\theta(t_{k+1}-t_k-1))|)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et iid et de même loi que $\log\|u_{t_1}\|$. Encore avec la loi des grands nombre on peut affirmer que

$$\sum_{k=0}^{M-1}\log\frac{\|u_{t_{k+1}}\|}{\|u_{t_k}\|}\sim M\times\mathbb{E}(\log\|u_{t_1}\|)$$

Finalement en combinant les expressions précédentes on peut On peut alors proposer comme estimation

$$\log\|u_N\|\sim(1-p)N\times\frac{1-(p+p^2)\log 2}{1+p+p^2}$$

Exercice 3.9. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des variables de Poisson independantes de paramètre 1 et

$$f(z)=\sum_k X_k z^k$$

pour $z\in]-1,1[$. Montrer que

$$\lim_{z\to 1^-}\mathbb{P}\left(|(1-z)f(z)-1|>\epsilon\right)=0.$$

Discuter d'une généralisation si X_k ne sont pas des variables de Poisson.

Solution 3.9. On a

$$\mathbb{E}f(z)=\sum_{k\geqslant 0}z^k\mathbb{E}X_k=\sum_{k\geqslant 0}z^k=\frac{1}{1-z}$$

pour tout $z\geqslant 0$. Calculons la variance

$$\mathrm{Var}(f(z))=\sum_{k\geqslant 0}z^{2k}\mathrm{Var}(X_k)=\sum_{k\geqslant 0}z^{2k}=\frac{1}{1-z^2}$$

Par Tchébytchev :

$$\mathbb{P}\left(\left|f(z)-\frac{1}{1-z}\right|>\alpha\right)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(f(z))}{\alpha^2}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(|(1-z)f(z)-1|>\epsilon\right)\leqslant\frac{(1-z)^2\mathrm{Var}(f(z))}{\epsilon^2}=\frac{(1-z)}{\epsilon^2(1+z)}\to 0$$

lorsque $z\to 1^-$.

.

Exercice 3.10. Soit A un sous ensemble de $\mathbb{N}$ avec $\{0,1\}\in A$ et tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}|i\in[1\ldots n],i\in A|=0.$$

Montrer que pour tout $k\geqslant 1$, il existe $j\in\mathbb{N}$ tel que $|[j\ldots j+k]\bigcap A|=2$.

Solution 3.10. La fonction qui à j associe $[j\dots j+k]\bigcap A$ a des variations au maximum de 1 quand j varie de 1, et elle vaut au moins 2 en $j=0$, et il existe j_0 suffisament grand tel que $[j\dots j+k]\bigcap A$ soit vide sinon la condition de l'énoncé n'est pas vérifiée, donc il existe un j où elle vaut exactement 2.

Exercice 3.11. Une variable aléatoire X discrète est dite infiniment divisible si elle satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $\mathbb{E}\left[X^2\right]<\infty$;

(ii) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe n variables aléatoires i.i.d. $X_{n,1},\dots,X_{n,n}$ satisfaisant $\mathbb{E}\left[X_{n,1}^2\right]<\infty$ telles que
$$X_{n,1}+\dots+X_{n,n}=X. \tag{3.1}$$

1. Donner un exemple de variables aléatoires infiniment divisibles
2. Montrer que si X est une variable aléatoire discrète infiniment divisible et bornée, alors sa variance est égale à 0.

Solution 3.11. 1- La loi de Poisson

2- Soit X une variable aléatoire infiniment divisible et bornée. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{E}[X]=0$ et $|X|\leqslant 1$. Dénotons par $\sigma^2=\operatorname{var}[X]$ On remarque tout d'abord que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}[X_{n,1}]=\frac{1}{n}\mathbb{E}[X]=0 \text{ et } \operatorname{var}[X_{n,1}]=\frac{1}{n}\sigma^2. \tag{3.2}$$
Cette observation implique en particulier que
$$\mathbb{P}\left[X_{n,1}\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]>0 \text{ ou bien } \mathbb{P}\left[X_{n,1}\leqslant-\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]>0. \tag{3.3}$$
Le résultat (3.3) se justifie de la façon suivante : si les deux probabilités étaient égales à 0, alors on aurait $\mathbb{P}\left[|X_{n,1}|\leqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]=1$, et donc
$$\operatorname{var}[X_{n,1}]=\mathbb{E}\left[|X_{n,1}|^2\right]\leqslant\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2=\frac{\sigma^2}{4n}.$$
(La première égalité parce que la variable a une espérance nulle, la deuxième par l'hypothèse qu'elle est plus petite que $\sigma/(2\sqrt{n})$ avec probabilité 1). Ceci est une contradiction avec (3.2) (sauf si $\sigma=0$, mais dans ce cas elle est constante).

On suppose sans perte de généralité que la première inégalité est vérifiée. On a donc
$$\begin{aligned}0<\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left[X_{n,i}\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right]&=\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\left\{X_{n,i}\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right\}\right]\\&\leqslant\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n}X_{n,i}\geqslant\frac{n\sigma}{2\sqrt{n}}\right]\\&=\mathbb{P}\left[X\geqslant\frac{\sqrt{n}\sigma}{2}\right]\end{aligned}$$

On considère n suffisamment grand de sorte que $\sigma\sqrt{n}/2 > 1$ ce qui implique que le terme le plus à droite de l'inégalité précédente est égal à 0, ce qui est une contradiction.

Exercice 3.12. Soit $(X_n, n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. bornées d'espérance nulle. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. L'objectif est de montrer que pour tout $c > 0$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > c\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{c^2} \tag{3.4}$$

1) On pose

$$A_k := \left\{\max_{1\leqslant i\leqslant k-1} |S_k| \leqslant c < \max_{1\leqslant i\leqslant k} |S_k|\right\}.$$

Montrer que $\mathbf{1}_{A_k}$ est indépendant de $S_n - S_k$.

2) En posant $S_n = S_n - S_k + S_k$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \geqslant c^2 \mathbb{P}(A_k)$$

3) Conclure.

Solution 3.12. 1) L'événement A_k ne dépend que des valeurs de $S_1, \ldots, S_k$ et donc ne dépend que des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$. Plus formellement, il existe une fonction $g : \mathbb{R}^k \to \{0, 1\}$ telle que

$$g(X_1, \ldots, X_k) = \mathbf{1}_{A_k}.$$

Par ailleurs, la variable aléatoire $S_n - S_k$ ne dépend que des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$, i.e., il existe une fonction $f : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(X_{k+1}, \ldots, X_n) = S_n - S_k.$$

Le lemme des coalitions permet de conclure.

2) Le même argument que la question 1 montre que $S_k \mathbf{1}_{A_k}$ est indépendante de $S_n - S_k$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] &= \mathbb{E}\left[(S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] + 2\mathbb{E}\left[(S_n - S_k) S_k \mathbf{1}_{A_k}\right] + \mathbb{E}\left[S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \\ &\geqslant \mathbb{E}\left[S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}\right]\end{aligned}$$

Le deuxième terme de la somme est égal à 0 par la propriété d'indépendance. En utilsant la définition de A_k, on a donc

$$\mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \geqslant c^2 \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_k}\right].$$

On peut alors sommer sur les entiers k en utilisant que les événements A_k sont disjoints (donc $\sum_k \mathbf{1}_{A_k} \leqslant 1$) et que leur union est l'événement apparaissant dans le terme de gauche de (3.4). On obtient alors

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] \geqslant c^2 \mathbb{P}\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > c\right].$$

Exercice 3.13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. prenant des valeurs entières (strictement positives) et dont la loi est donnée par la formule : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant n) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha \in]0,1[.$$

1) Montrer que ces variables ont une espérance infinie.

2) Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives $c > 0$ et $C < \infty$ telles que

$$\forall t \in [0,1], \quad 1 - Ct^\alpha \leqslant \mathbb{E}\left[e^{-tX_1}\right] \leqslant 1 - ct^\alpha$$

3) Montrer qu'il existe une constant $C' < \infty$ telle que, pour tout $K \geqslant 1$ et tout $N \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^N X_k \geqslant K\right] \leqslant \frac{C'}{K^\alpha}$$

Indication : i) On pourra borner inférieurement $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^N X_k}{KN^{1/\alpha}}\right)\right]$

ii) On utilisera l'inégalité $(1-e^{-1})\mathbb{P}[X \geqslant K] \leqslant \mathbb{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{X}{K}\right)\right]$.

4) Montrer qu'il exists une constante $c' > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^N X_k \leqslant \varepsilon\right] \leqslant e^{-c'/\epsilon^\alpha}.$$

Indication : Montrer que la même inégalité est vraie en remplaçant la somme $\sum_{k=1}^N X_k$ par $\max_{i\in\{1,\dots,N\}} X_i$

Question bonus : Que deviennent ces calculs dans le cas où $\alpha = 1$?

Solution 3.13. 1) On utilise la formule

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}[X \geqslant n] = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$

2) Une des bornes est facile : On remarque que

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E}\left[e^{-tX_1}\right] &= \mathbb{E}\left[1 - e^{-tX_1}\right] \\ &\geqslant \mathbb{E}\left[(1 - e^{-tX_1})\mathbf{1}_{\{X_1 \geqslant n\}}\right] \\ &\geqslant (1 - e^{-tn})\mathbb{P}[X_1 \geqslant n] \\ &= \frac{(1 - e^{-tn})}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

On choisit alors un entier $n \in [\frac{1}{t}, \frac{2}{t}]$ pour obtenir

$$1 - \mathbb{E}\left[e^{-tX_1}\right] \geqslant \frac{(1 - e^{-1})}{2^\alpha} t^\alpha$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[e^{-tX_1}\right] \leqslant 1 - \frac{(1 - e^{-1})}{2^\alpha} t^\alpha$$

On obtient le résutat de l'énoncé avec $c = \frac{(1-e^{-1})}{2^\alpha}$.

Pour l'autre inégalité, on écrit

$$\mathbb{E}\left[1 - e^{-tX_1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-tn})\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-tn})\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

On peut estimer ce terme grâce à une comparaison série-intégrale, une façon de faire parmi d'autres

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1 - e^{-tX_1}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-tn})\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-tn})\int_n^{n+1}\frac{\alpha}{s^{\alpha+1}}\,ds \\
&\leqslant \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1-e^{-ts}}{s^{\alpha+1}}\,ds \\
&= \alpha\int_1^{\infty}\frac{1-e^{-ts}}{s^{\alpha+1}}\,ds.
\end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto (1-e^{-ts})/s^{\alpha+1}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a donc

$$\mathbb{E}\left[1 - e^{-tX_1}\right] \leqslant \alpha\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ts}}{s^{\alpha+1}}\,ds.$$

Un changement de variable linéaire donne

$$\mathbb{E}\left[1 - e^{-tX_1}\right] \leqslant \alpha t^\alpha\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-s}}{s^{\alpha+1}}\,ds.$$

on obtient le résultat de l'énoncé avec $C = \alpha\int_0^\infty \frac{1-e^{-s}}{s^{\alpha+1}}\,ds$.

3) On fixe un entier $K \geqslant 1$ et considère

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{KN^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{N}X_k\right)\right] &= \prod_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{KN^{1/\alpha}}X_k\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{KN^{1/\alpha}}X_1\right)\right]^N \\
&\geqslant \left(1 - \frac{C}{K^\alpha N}\right)^N \\
&\geqslant 1 - \frac{C_1}{K^\alpha}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(1-e^{-1})\mathbb{P}\left[\frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{N}X_k \geqslant K\right] \leqslant \mathbb{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{KN^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{N}X_k\right)\right] \leqslant \frac{C_1}{K^\alpha}.$$

Ce qui implique le résultat avec $C' = C_1/(1-e^{-1})$.

4) Comme les X_i sont tous plus grand que 1, l'inégalité est trivialement vraie si $N \leqslant \epsilon N^{1/\alpha}$ (la probabilité est égale à 0). On peut donc supposer que N est suffisament grand pour que $N \leqslant \epsilon N^{1/\alpha}$, et donc en particulier $\epsilon N^{1/\alpha} \geqslant 2$ ($N = 1$ ne marche jamais)

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\frac{1}{N^{1/\alpha}} \max_{k=1,\dots,N} X_k \leqslant \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{N} \left\{X_k \leqslant \epsilon N^{1/\alpha}\right\}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_1 \leqslant \epsilon N^{1/\alpha}\right]^N \\
&= \left(1 - \frac{1}{\epsilon^\alpha N}\right)^N \\
&\leqslant e^{-c'/\epsilon^\alpha}.
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant que $\max_{k=1,\dots,N} X_k \leqslant \sum_{k=1}^{N} X_k$ (les v.a. sont positives).

Exercice 3.14. Soit $\lambda > 0$ et $X_n = \sum_{i=1}^{n} X_{in}$ où $X_{1n}, \dots, X_{nn}$ sont des variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre λ/n. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $n \to \mathbb{E}\left[e^{tX_n}\right]$ converge et identifier sa limite. La fonction génératrice de quelle loi reconnaît-on ?

Solution 3.14. La fonction génératrice de la loi de Bernoulli de paramètre λ/n vaut

$$\mathbb{E}\left[e^{tX_{1n}}\right] = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) + e^t \frac{\lambda}{n} = 1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}$$

Et donc

$$\mathbb{E}\left[e^{tX_n}\right] = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda(e^t-1)}{n}\right) = \left(1 + \frac{\lambda(e^t-1)}{n}\right)^n$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{tX_n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda(e^t-1)}{n}\right)^n = \exp\left(\lambda(e^t-1)\right).$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson.

Exercice 3.15. On tire successivement des boules, sans remise, uniformément au hasard, dans une urne qui contient n boules multicolores donc exactement deux sont rouges. On s'arrête quand on tire la seconde boule rouge, et on note T le nombre de tirages effectués. Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Solution 3.15. Faire un tirage est équivalent à ordonner les boules selon une ligne selon une permutation aléatoire uniforme et de regarder le numéro de la dernière boule rouge. Alternativement, cela revient à tirer au hasard un sous-ensemble de taille 2 de $\{1, \dots, n\}$. Pour tout k entre 2 et n, il y a $(k-1)$

tels sous-ensembles dont le max est exactement k, et au total il y a $\binom{n}{2}$ tels ensembles, donc

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{n(n-1)/2} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2+k) = \frac{2n-3}{3} + 1 = \frac{2n}{3}.$$

Exercice 3.16. Soit σ une permutation aléatoire uniforme de $\{1,\dots,n\}$. On dit que k est un maximum local de σ si $\sigma(k-1) < \sigma(k) > \sigma(k+1)$ (sauf en $k=1$ ou n, on où compare avec son seul voisin au lieu des deux).

Quelle est l'espérance du nombre de maxima locaux de σ ? (Autrement dit nombre moyen de maxima locaux, quand on moyenne sur toutes les permutations possibles)

Solution 3.16. La probabilité que 1 soit un maximum local est $1/2$ (en échangeant $\sigma(1)$ et $\sigma(2)$, il y a toujours autant que permutations possibles commençant par ces deux valeurs). De même pour n. En tous les autres points, la proba est $1/3$ (pareil, en échangeant $\sigma(k-1)$, $\sigma(k)$ et $\sigma(k+1)$, on a autant de permutations pour chacun des échanges, et $1/3$ correspondent à la situation où k est un maximum local).

Ainsi, le nombre moyen est

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\#\{\text{maximum local}\}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{x=1}^{n} 1_{\{x \text{ est un maximum local}\}}\right) \\
&= \sum_{x=1}^{n} \mathbb{P}(x \text{ est un maximum local}) \\
&= \frac{1}{2} + \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.17. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On ajoute une par une, dans une urne initialement vide, des boules ayant chacune une chance $1/N$ d'être rouge. On arrête d'ajouter des boules dès qu'on a mis une boule rouge. Puis, on retire au hasard les boules, une par une, de l'urne, en s'arrêtant dès qu'on a tiré la boule rouge.

Combien reste-t-il de boules dans l'urne à la fin de l'expérience, en espérance ?

Solution 3.17. Loi du nombre de boules dans l'urne : géométrique de paramètre $1/N$, donc d'espérance N.

Sachant qu'il y a T boules dans l'urne, l'indice du tirage de la boule rouge est uniforme sur $\{1,\dots,T\}$, donc d'espérance $(T+1)/2$.

Par conséquent, il reste en moyenne $\mathbb{E}[T-(T+1)/2] = \mathbb{E}[(T-1)/2] = (N-1)/2$ boules à la fin.