

# Martingale et mouvement brownien

Raphael Ducatez

29 décembre 2023

Version très préliminaire. N'hésitez à me signaler les passages qui ne vous paraissent pas clairs.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Martingales discrètes</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Rappels de probabilité.</b>	<b>6</b>
1.1	Feuille d'Exercices 1 : Rappels de probabilité. . . . .	6
<b>2</b>	<b>l'espérance conditionnel</b>	<b>8</b>
2.0.1	Introduction sur un exemple. . . . .	8
2.0.2	Espérance conditionnel . . . . .	9
2.0.2.1	Quelques rappel sur les espaces mesurables. . . . .	9
2.0.2.2	Définitions de l'espérance conditionnel. . . . .	10
2.0.3	Quelques propriétés de l'espérance conditionnelle. . . . .	12
2.0.3.1	Independance . . . . .	14
2.1	Feuille d'exercice 2 : Espérance conditionnelle . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Les Martingales discrètes</b>	<b>15</b>
3.0.1	Definition de martingales/surmartingales/sousmartingales	15
3.0.2	Lemme martingale et les temps d'arrets . . . . .	16
3.1	Feuille d'exercice 3 : Martingales discrètes et temps d'arrêt . . . .	18
<b>4</b>	<b>Convergences de martingales</b>	<b>20</b>
4.0.1	Convergence presque sure. . . . .	20
4.0.2	Convergence $L^p$ . . . . .	21
4.0.3	Convergence $L^1$ . . . . .	22
4.0.4	Le Théorème centrale limite pour les martingales . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Introduction aux chaine de Markov sur un ensemble discret</b>	<b>25</b>
5.0.1	Définition des chaine de Markov . . . . .	25
5.0.1.1	Propriétés élémentaires de la matrice stochastique.	25
5.0.1.2	Propriétés élémentaire de la chaine de Markov . . . . .	26
5.0.2	Markov et martingale . . . . .	26
5.0.3	Propriétés de Markov faible et forte . . . . .	27
5.0.4	Application Le problème de Dirichlet discret. . . . .	29
5.1	Feuille d'exercice 5 : Chaine de Markov et fonction harmonique. . .	29

<b>II</b>	<b>Mouvement Brownien</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>Introduction au mouvement brownien</b>	<b>33</b>
6.0.1	Rappel Vecteurs Gaussiens. . . . .	33
6.0.2	Limite de somme de variables aléatoires iid. . . . .	34
6.0.3	Définition et propriétés élémentaires du mouvement brownien. . . . .	35
6.0.4	Propriété de Markov forte. . . . .	38
6.1	Feuille d'exercice 6 : Martingale et mouvement brownien . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Construction du Mouvement Brownien</b>	<b>42</b>
7.0.1	Espace Gaussien . . . . .	42
7.0.2	Construction du mouvement brownien sur $[0, 1]$ . . . . .	43
7.1	Fonction harmonique, mouvement brownien et problème de Dirichlet. . . . .	45
7.1.1	Problème de Dirichlet et fonction harmonique. . . . .	46
7.2	Feuille d'exercice 7 : Martingale et mouvement brownien . . . . .	49
7.3	Feuille d'exercice 8, Martingale et mouvement brownien . . . . .	49
<b>III</b>	<b>Martingales Continues</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Quelques propriétés des martingales continues</b>	<b>53</b>
8.0.1	Définitions et exemples . . . . .	53
8.0.2	Quelques propriétés . . . . .	54
8.0.3	Temps d'arrêt . . . . .	56
8.1	Feuille d'exercice 9, Martingales continues. . . . .	58
<b>9</b>	<b>Processus à variation finie</b>	<b>60</b>
9.0.1	Fonction à variation fini . . . . .	60
9.0.2	L'intégrale de Stieljes (discussion) . . . . .	63
9.0.3	Processus à variation . . . . .	63
9.1	Feuille d'exercice 11, Variation finie et p-variation. . . . .	63
<b>10</b>	<b>Variation quadratique des martingales continues</b>	<b>65</b>
10.1	Feuille d'exercice 12, Variation quadratique martingale continue. . . . .	68
<b>11</b>	<b>Intégrale Stochastique</b>	<b>70</b>
11.1	Feuille d'exercice 13 : Intégrale stochastique . . . . .	74
<b>12</b>	<b>Formule d'Ito</b>	<b>76</b>
12.0.1	La formule d'Ito, énoncé et exemples simples. . . . .	76
12.0.2	Applications de la formule d'Ito . . . . .	79
12.1	Feuille d'exercice 14 : Formule d'Ito . . . . .	81

<b>13 Equation différentielle stochastique</b>	<b>84</b>
13.0.1 Equation différentielle stochastique . . . . .	84
13.0.2 Cas Lipschitzien . . . . .	85
13.0.2.1 Preuve de l'unicité . . . . .	86
13.0.2.2 Preuve de l'existence . . . . .	87
<b>IV Corrections des Exercices et Examens</b>	<b>90</b>
<b>14 Corrections des Exercices</b>	<b>91</b>
14.1 Feuille d'exercice 1 : Rappel de probabilité. . . . .	91
14.2 Feuille d'exercice 2 : Espérance conditionnelle . . . . .	92
14.3 Feuille d'exercice 3 : Martingales discrètes et temps d'arrêt . . . .	94
14.4 Feuille d'exercice 4 : Convergence de martingales discrètes. . . . .	96
14.5 Feuille d'exercice 5 : Chaîne de Markov et fonction harmonique. . . .	99
14.6 Feuille d'exercice 6 : Martingale et mouvement brownien . . . . .	102
14.7 Feuille d'exercice 7, Martingale et mouvement brownien . . . . .	105
14.8 Feuille d'exercice 8, Martingale et mouvement brownien . . . . .	107
14.9 Feuille d'exercice 9, Mouvement Brownien et problème de Dirichlet. Correction . . . . .	112
14.10 Feuille d'exercice 10, Martingales continues. Correction . . . . .	115
14.11 Feuille d'exercice 11, Variation finie et p-variation. . . . .	119
14.12 Feuille d'exercice 12, Variation quadratique martingale continue. Correction . . . . .	123
14.13 Feuille d'exercice 13 : Intégrale stochastique. Correction . . . . .	126
14.14 Feuille d'exercice 14 : Formule d'Ito . . . . .	130
<b>15 Corrections des Examens</b>	<b>135</b>
15.1 Devoir maison 1 : Martingales Discrètes, Correction. . . . .	135
15.1.1 Énoncé . . . . .	135
15.1.2 Correction . . . . .	136
15.2 Devoir maison 2 : Mouvement Brownien et calcul stochastique . . . .	140
15.2.1 Énoncé . . . . .	140
15.2.2 Correction . . . . .	142
15.3 Examen Martingale et Mouvement Brownien. . . . .	149
15.3.1 Problèmes . . . . .	149
15.3.2 Correction . . . . .	151

Première partie

**Martingales discrètes**

# Chapitre 1

## Rappels de probabilité.

### 1.1 Feuille d'Exercices 1 : Rappels de probabilité.

Dans chacun des exercices suivants dites pour chacune des affirmations si elle est vraie ou fautive et expliquez pourquoi.

**Exercice 1.1.1.** (Espaces mesurables) Soit  $\Omega$  un ensemble. Les tribus et fonctions ci-dessous sont définies sur  $\Omega$ .

1. Soit  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux tribus telle que  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$  alors toute fonction  $\mathcal{F}_1$  mesurable est  $\mathcal{F}_2$  mesurable.
2. Soit  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux tribus et  $\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Alors pour tout  $A \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ ,  $A \in \mathcal{F}_1$  ou  $A \in \mathcal{F}_2$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire,  $\sigma(X)$  la tribu engendrée par  $X$  et  $f$  une fonction continue  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f(X)$  est une fonction  $\sigma(X)$  mesurable.
4. Soit  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de fonction  $\mathcal{F}$  mesurables et  $f$  une fonction telle que  $\forall \omega \in \Omega \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = f(\omega)$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{F}$  mesurable.

**Exercice 1.1.2.** (Espérance)

1.  $\mathbb{E}(\exp(X)) \leq \exp(\mathbb{E}(X))$ .
2.  $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  (ie : si  $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$  alors  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ ).
3.  $\mathbb{E}(\liminf X_n) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n)$
4. Si  $X > 0$ , alors  $\mathbb{P}(X > 2) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(X)$ .

**Exercice 1.1.3.** (Convergence)

1. Si  $X_n \rightarrow X$  presque sûrement alors  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ .
2. Si  $X_n \rightarrow X$  dans  $L^2$  alors  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ .
3. Si  $X_n \rightarrow X$  en loi alors  $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$  pour tout  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.
4. Si  $X_n \rightarrow X$  dans  $L^1$  alors  $X_n \rightarrow X$  en probabilité.

**Exercice 1.1.4.** (Indépendance)

1. Pour  $X, Y$  indépendants  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .
2.  $X$  et  $Y$  sont indépendants si et seulement si  $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$  pour tout  $f, g$  mesurables et bornées.
3. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants,  $X$  et  $Z$  sont indépendants et  $Y$  et  $Z$  sont indépendants. Alors  $X, Y, Z$  sont indépendants.
4. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires iid tel que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = 0$ .

**Exercice 1.1.5.** (Lois aléatoires usuelles)

1. La somme de 3 variables de bernoulli indépendantes de paramètre  $p$  donne une loi binomiale  $B(3, p)$ .
2. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables de bernoulli iid. On définit  $T = \inf\{i : X_i = 1\}$  (ie : la première apparition d'un 1). Alors  $T$  suit une loi géométrique.
3. La somme de deux variables aléatoires gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne.
4. La somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson.

## Chapitre 2

# l'espérance conditionnel

### 2.1 Introduction sur un exemple.

Soit  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < 1$  et on considère  $f$  une fonction constante par morceaux sur les segments  $[t_i, t_{i+1})$  (où on notera  $t_0 = 0$  et  $t_n = 1$ ). Soit  $\{s_1, \dots, s_{l-1}\} \subset \{t_1, \dots, t_{n-1}\}$ , on souhaiterai approximer  $f$  par une fonction  $g$  constante par morceaux sur les segments  $[s_i, s_{i+1})$ . On peut penser à un signal où  $f$  est un séquencage à haute précision et que l'on veut se restreindre à un signal plus grossier mais conservant à peu près les caractéristiques de  $f$ . On a plusieurs approche possible :

La première possibilité est de directement prendre la moyenne de  $f$  sur chacun des segments  $[s_i, s_{i+1})$

$$g = \sum b_i 1_{[s_i, s_{i+1})}$$

où  $b_i = \frac{1}{s_{i+1} - s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u) du$ .

Une deuxième approche plus formelle est de minimiser  $\|f - g\|$  pour une certaine norme. La plus facile est de considérer la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  :

$$\|f - g\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(u) - g(u)|^2 du$$

car c'est un espace de Hilbert. il se trouve que pour ce choix ci la solution obtenue est la même que précédemment. En effet on on peut vérifier en écrivant aussi  $g = \sum b_i 1_{[s_i, s_{i+1})}$ , le minimum est atteint lorsque

$$0 = \frac{d}{db_i} \|f - g\|_{L^2}^2 = 2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u) - b_i du$$

et donc  $(s_{i+1} - s_i)b_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u) du$ .

Une troisième approche est d'aspect un peu pratique. Plutôt que voir  $f$  comme une fonction on peut la voir plutôt comme une forme linéaire (une dis-

tribution) sur un ensemble des fonction

$$\langle f, h \rangle = \int_0^1 f(u)h(u)du$$

On peut penser que si  $f$  est un signal, les  $\langle f, h \rangle$  sont les informations que l'on souhaite extraire du signal. Si les  $h$  considérés sont tous grossiers : constante par morceaux sur les segments  $[s_i, s_{i+1})$ , il est inutile de conserver tout le séquencage de haute précision. On introduira plutôt  $g$  également constante par morceau  $[s_i, s_{i+1})$  qui agit de la même manière que  $f$  :

$$\langle g, h \rangle = \langle f, h \rangle$$

pour tout  $h$ . Cette troisième définition de  $g$  donne encore la même fonction que précédemment. En effet on peut vérifier pour  $h = 1_{[s_i, s_{i+1})}$

$$\langle g, h \rangle = \int_{s_i}^{s_{i+1}} b_i du = \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(u)du = \langle f, h \rangle$$

Cet exemple illustre les différents points de vu de considérer l'espérance conditionnelle que nous voyons maintenant.

## 2.2 Espérance conditionnel

### 2.2.0.1 Quelques rappel sur les espaces mesurables.

Soit  $\Omega$  un ensemble.  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $\Omega$  si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  avec  $\mathcal{F}$  stable par unions, intersections dénombrable et complémentaire ( $\sigma$ -algèbre).

**Exemple 2.2.1.** Si  $\mathcal{B}$  est une tribu fini de  $\Omega$  alors il existe une partition  $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_k$  des "atomes" de la tribu tel que pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , il existe  $I \subset \{1, \dots, k\}$

$$B = \cup_{i \in I} A_i.$$

**Définition 2.2.2.** Soit deux tribu  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sur  $\Omega$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est plus fine que  $\mathcal{G}$  et réciproquement que  $\mathcal{G}$  est plus grossière que  $\mathcal{F}$  ssi  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ . On dit aussi que  $\mathcal{G}$  est une sous tribu de  $\mathcal{F}$ .

**Définition 2.2.3.** Soit  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  deux espaces mesurable. Une fonction  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  est dite mesurable si pour tout  $A \in \mathcal{F}_2$  on a  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ . Remarque si  $\mathcal{F}'_1$  est plus fine que  $\mathcal{F}_1$ , respectivement  $\mathcal{F}'_2$  plus grossière que  $\mathcal{F}_2$  alors  $f$  est également mesurable pour  $(\Omega_1, \mathcal{F}'_1), (\Omega_2, \mathcal{F}'_2)$ .

On supposera toujours que  $\mathbb{R}$  est muni de la tribu borélienne. Dans ce cas  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable ssi  $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

*Remarque 2.2.4.* Pour  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  un espaces mesurable, une fonction  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  génère une tribu sur  $\Omega_1$  via  $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_2\}$ .

*Remarque 2.2.5.* L'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}$  mesurable est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel et si  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  alors les fonctions  $\mathcal{G}$  mesurables forment un sous espace vectoriel.

**Proposition 2.2.6.** L'ensemble de fonctions  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ .

**2.2.0.2 Définitions de l'espérance conditionnelle.**

**Définition 2.2.7.** Soit  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et soit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$  une sous tribu

1. Si  $\mathcal{B}$  est une tribu fini, on pose

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) := \sum_{A \text{ atomes de } \Omega} 1_A \cdot b_A, \quad b_A := \begin{cases} \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{E}(1_A X) & \text{si } \mu(A) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Si  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , on pose

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) := \pi_{L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)}(X)$$

où  $\pi_{L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)}$  est la projection orthogonale (pour le produit scalaire de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ) sur  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ .

3. On définit  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  comme l'unique fonction de  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  tel que

$$\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

pour toute fonction  $Z$   $\mathcal{G}$ -mesurable bornée. Ou de manière équivalente comme l'unique fonction de  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  tel que

- 4.

$$\mathbb{E}(1_A X) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

pour tout  $A \in \mathcal{G}$ .

La première définition est très intuitive : une espérance conditionnelle consiste simplement à moyenniser la fonction sur des petits sous espaces. On peut conjecturer que les propriétés que l'on connaît sur la moyenne se généralisent à l'espérance conditionnelle.

La deuxième définition donne un autre point de vu aussi très intéressant : l'espérance conditionnelle est une application linéaire, mieux une projection ! Ceci nous permet aussi de deviner certaines de ces propriétés.

La troisième définition est plus formelle et moins transparente. Cependant c'est la plus générale et c'est donc elle que l'on doit utiliser pour les démonstrations.

Montrons que ces trois définitions sont bien équivalentes (sur leur domaine de définition).

*Démonstration.*  $1 \Leftrightarrow 2$  : Soit  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et  $\mathcal{B}$  une tribu fini. La variable  $\pi_{L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)}(X) =: \pi(X)$  est la fonction  $\mathcal{B}$  mesurable qui minimise  $\|X - Y\|_{L^2}^2$  sur toutes les fonctions  $\mathcal{B}$  mesurable  $Y = \sum_{A \text{ atome de } \Omega} 1_A b_A$ . On a donc  $\pi(X) =$  et En dérivant

$$\frac{d}{db_A} \|X - Y\|_{L^2}^2 = \frac{d}{db_A} \sum_{A' \text{ atome de } \Omega} \int_{A'} (X - b_{A'})^2 d\mu = 2 \int_A (X - b) d\mu = 0$$

et donc  $b_A \mu(A) = \int_A X d\mu = \mathbb{E}(1_A X)$ .

3 $\Leftrightarrow$ 2 Soit  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , on a  $X = \pi(X) + (X - \pi(X))$  où par définition de la projection orthogonal  $(X - \pi(X)) \perp L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ . Soit  $Z \in \mathcal{B}$  mesurable borné. Alors  $\mathbb{E}((X - \pi(X))Z) = 0$  et on a

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\pi(X)Z) + \mathbb{E}((X - \pi(X))Z) = \mathbb{E}(\pi(X)Z)$$

ce qui redonne bien la définition 2. Le sens 3 $\Rightarrow$ 2 se déduit alors de l'unicité.  $\square$

**Exercice 2.2.8.** En utilisant les trois définitions, montrer que pour  $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$  la tribu grossière pour tout  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  on a

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)1_\Omega$$

(la fonction constante égale  $\mathbb{E}(X)$ ).

**Solution 2.2.9.** C'est immédiat en utilisant la première définition :  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mathbb{E}(X1_\Omega)1_\Omega = \mathbb{E}(X)1_\Omega$  puisque  $\mu(\Omega) = 1$ . Pour la deuxième puisque  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  est  $\mathcal{B}$  mesurable,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = b1_\Omega$ . On cherche  $b$  qui minimise  $\mathbb{E}((X - b1_\Omega)^2)$ . Il suffit de dériver :  $\frac{d}{db}\mathbb{E}((X - b1_\Omega)^2) = 2\mathbb{E}(X - b1_\Omega) = 0$  soit  $\mathbb{E}(X) = b\mathbb{E}(1_\Omega) = b$ . Enfin pour la troisième définition. On a encore  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = b1_\Omega$  et  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1_\Omega X) = \mathbb{E}(1_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(b1_\Omega) = b$  car  $\Omega \in \mathcal{B}$ .

On montre maintenant que la troisième définition est valide : que l'on a bien existence et unicité.

*Démonstration.* Unicité : Soit  $Y_1$  et  $Y_2$  deux fonction  $\mathcal{B}$  mesurable qui satisfont la définition 3. On pose  $A_+ := \{Y_1 > Y_2\}$  et  $A_- := \{Y_2 > Y_1\}$ , puisque  $Y_1$  et  $Y_2$  sont  $\mathcal{B}$  mesurable,  $A_+, A_- \in \mathcal{B}$ . Alors

$$\mathbb{E}(1_{A_+}(Y_1 - Y_2)) = \mathbb{E}(1_{A_+}Y_1) - \mathbb{E}(1_{A_+}Y_2) = \mathbb{E}(1_{A_+}X) - \mathbb{E}(1_{A_+}X) = 0.$$

Mais de plus par construction  $1_{A_+}(Y_1 - Y_2) \geq 0$ . Conclusion  $1_{A_+}(Y_1 - Y_2) = 0$  p.s et donc  $1_{A_+} = 0$  p.s. On réalise le même raisonnement pour  $A_-$  et on obtient  $1_{A_-} = 0$  p.s. Pour  $\{Y_1 \neq Y_2\} = A_+ \cup A_-$  est bien de mesure nulle.  $\square$

Pour l'existence on va d'abord montrer la proposition suivante

**Proposition 2.2.10.** Soit  $X, X' \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Si  $X \leq X'$  alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$  p.s.

Ceci semble évident lorsque l'on pense à la définition utilisant la moyenne avec  $\mathcal{B}$  fini. Donc montrons la dans le cas général.

*Démonstration.* On pose  $A_+ = \{\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) > \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})\}$ . Puisque  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}), \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$  sont  $\mathcal{B}$  mesurable,  $A_+ \in \mathcal{B}$ . Donc

$$0 \leq \mathbb{E}((X' - X)1_{A_+}) = \mathbb{E}((\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+})$$

mais puisque  $(\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+} \leq 0$ , on a alors  $(\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))1_{A_+} = 0$  p.s soit  $1_{A_+} = 0$  p.s. et donc  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$  p.s.  $\square$

On montre maintenant l'existence pour la définition 3.

*Démonstration.* Soit  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  positif, considérons la suite de variables aléatoires  $X \wedge n$ . On a alors  $X \wedge n \rightarrow X$  monotone croissant et  $X \wedge n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  pour tout  $n$ .  $\pi(X \wedge n)$  est donc bien défini et par la proposition 2.0.10,  $\pi(X \wedge n)$  est monotone croissant. Il existe donc  $Y_\infty$  tel que  $\pi(X \wedge n) \rightarrow Y_\infty$ . Tout d'abord pour tout  $n$ ,  $\pi(X \wedge n)$  est  $\mathcal{B}$  mesurable donc  $Y_\infty$  est  $\mathcal{B}$  mesurable comme limite de fonction  $\mathcal{B}$  mesurable. Soit  $A \in \mathcal{B}$ . Alors pour tout  $n$

$$\mathbb{E}(1_A(X \wedge n)) = \mathbb{E}(1_A \pi(X \wedge n))$$

par convergence monotone on a  $\mathbb{E}(1_A(X \wedge n)) \rightarrow \mathbb{E}(1_A X)$  et  $\mathbb{E}(1_A \pi(X \wedge n)) \rightarrow \mathbb{E}(1_A Y_\infty)$ . Conclusion pour tout  $A \in \mathcal{B}$ ,  $\mathbb{E}(1_A Y_\infty) = \mathbb{E}(1_A X)$ , et on peut donc poser  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = Y_\infty$ .  $\square$

## 2.3 Quelques propriétés de l'espérance conditionnelle.

L'espérance conditionnelle est la notion de base pour les martingales. Ici on présente quelques propriétés qui nous seront très utiles dans la suite.

**Proposition 2.3.1.** *Si  $X$  est  $\mathcal{B}$  mesurable, alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$*

1.  $X \rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  est une application linéaire.
2.  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$
3. Si  $X \geq 0$ , alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$  p.s
4.  $|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X|\mathcal{B})$  p.s

*Démonstration.* Preuve : Trivialement  $X$  est  $\mathcal{B}$  mesurable est pour tout  $Z \in \mathcal{B}$  mesurable  $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(XZ)$   $X$  satisfait donc bien les conditions de  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ .

Soit  $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$  est bien  $\mathcal{B}$  mesurable car  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  et  $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$  sont  $\mathcal{B}$  mesurable. De plus pour tout  $Z \in \mathcal{B}$  mesurable on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)Z) &= \lambda \mathbb{E}(X_1 Z) + \mu \mathbb{E}(X_2 Z) \\ &= \lambda \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1|\mathcal{B})Z) + \mu \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})Z) \\ &= \mathbb{E}(Z(\lambda \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbb{E}(X_2|\mathcal{B}))) \end{aligned}$$

Donc par unicité  $\mathbb{E}((\lambda X_1 + \mu X_2)|\mathcal{B}) = \lambda \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbb{E}(X_2|\mathcal{B})$ .

$\Omega$  est évidemment  $\mathcal{B}$  mesurable donc  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1_\Omega X) = \mathbb{E}(1_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$ .

C'est un cas particulier de la proposition 2.0.10 avec  $X' = 0$ .

On écrit  $X = X_+ - X_-$  où  $X_+ = 1_{X \geq 0} X$  et  $X_- = -1_{X < 0} X$ .  $|X| = X_+ + X_-$  et  $\mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}), \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B})$  sont positif p.s. On a alors

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| = |\mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(X_+|\mathcal{B}) + \mathbb{E}(X_-|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(|X_+|\mathcal{B})$$

$\square$

**Proposition 2.3.2.** *Si  $Y$  est  $\mathcal{B}$  mesurable et  $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , alors*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$$

*Démonstration.*  $Y, \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  sont  $\mathcal{B}$  mesurable donc  $Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  aussi. Soit  $Z, \mathcal{B}$  mesurable, alors

$$\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})YZ)$$

car  $YZ$  est  $\mathcal{B}$  mesurable. Par unicité on a donc  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ .  $\square$

**Proposition 2.3.3.** *(Concatenation)*

*Si  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}$  alors  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ .*

*Démonstration.*  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$  est bien  $\mathcal{B}_1$  mesurable. Soit  $Z \mathcal{B}_1$  mesurable,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)Z) = \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)Z)$$

on peut alors conclure par unicité.  $\square$

**Proposition 2.3.4.** *Jensen*

*Soit  $X \in L^1$  et soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe alors*

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{B}) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}))$$

*Démonstration.* On utilise le fait qu'une fonction convexe peut s'exprimer comme le maximum de fonction affines. On pose

$$E_f = \{(a, b) \in \mathbb{Q} : \forall t : f(t) \geq at + b\}$$

et alors

$$f(x) = \sup_{(a,b) \in E_f} ax + b.$$

En effet pour tout  $(a, b) \in E_f$   $ax + b \leq f(x)$  et le cas d'égalité est atteint lors de la tangente à  $f$  au point  $x$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{B}) &= \mathbb{E}\left(\sup_{(a,b) \in E_f} aX + b|\mathcal{B}\right) \\ &\geq \sup_{(a,b) \in E_f} a\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + b \\ &= f(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 2.3.5.** *Convergence :*

1. Si  $X_n$  monotone croissant converge vers  $X$  alors  $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})$  est monotone croissant et converge vers  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ .
2. Si  $X_n$  est une suite positive alors  $\liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{B})$
3. Si  $|X_n| \leq Y$  avec  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et  $X_n \rightarrow X$  p.s alors  $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ .

### 2.3.0.1 Indépendance

**Définition 2.3.6.** Deux tribus  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  sont indépendantes si pour tout  $A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2$  on a  $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$  (ou  $\mathbb{E}(1_{A_1}1_{A_2}) = \mathbb{E}(1_{A_1})\mathbb{E}(1_{A_2})$ ). (def équivalente : pour tout  $Z_1 \mathcal{B}_1$  mesurable et  $Z_2 \mathcal{B}_2$  mesurable on  $\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$ ).

Remarquer que si  $X_1$  est  $\mathcal{B}_1$  mesurable et  $X_2$  est  $\mathcal{B}_2$  mesurable alors  $X_1, X_2$  sont indépendantes.

**Proposition 2.3.7.** Soit  $X \in L^1(\Omega, \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \mu)$  si  $X$  est  $\mathcal{B}_1$  mesurable alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$  p.s

*Démonstration.* Soit  $Z \mathcal{B}_2$  mesurable alors  $\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X))$ .  $\square$

## 2.4 Feuille d'exercice 2 : Espérance conditionnelle

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

**Exercice 2.4.1.** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires quelconques alors :

- $3X^4 + 2$  est  $\sigma(X)$  mesurable.
- $\sigma(X) \subset \sigma(X^2)$ .
- $Y$  est  $\sigma(Y^3)$  mesurable.
- $\sigma(X + Y, X - Y) = \sigma(X, Y)$ .

**Exercice 2.4.2.** On pose  $f(x) = |x| - 1$  pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\mathcal{F}$  est la tribu borélienne sur  $[-1, 1]$  avec la mesure  $\mu(dx) = \frac{1}{2}dx$  et  $\mathcal{B} = \sigma([\frac{k}{13}, \frac{k+1}{13}]_{k \in [-13, 12] \cap \mathbb{Z}})$ . On note  $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$  :

- $\mathbb{E}(g) = -1/2$ .
- $g$  est négatif.
- $\inf g \geq -1$ .
- $g$  est continue sur  $[-1, 1]$ .

**Exercice 2.4.3.** Soit les tribus  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ .

- Soit  $Z$  bornée et  $\mathcal{B}$  mesurable et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Si  $X_n \rightarrow Y$  p.s. alors  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})Z) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})Z)$  p.s.
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$ .
- Si  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et  $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  alors  $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2) \leq \mathbb{E}((X - Y)^2)$ .
- Si  $X \geq \epsilon > 0$  et  $Y$  est  $\mathcal{B}$  mesurable. Alors  $\mathbb{E}(\frac{Y}{X}|\mathcal{B}) \geq \frac{Y}{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}$ .

**Exercice 2.4.4.** Soit  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux tribus indépendantes.

- Si  $X$  est  $\mathcal{B}_1$  mesurable alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$  p.s.
- Si  $X$  est à la fois  $\mathcal{B}_1$  mesurable et  $\mathcal{B}_2$  mesurable. Alors  $X$  est constante.
- Pour tout  $Z \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  mesurable on a  $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_1)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_2)^2)$ .
- Si  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$  p.s. alors  $X$  est indépendant de  $\mathcal{B}_2$ .

# Chapitre 3

## Les Martingales discrètes

### 3.1 Définition de martingales/surmartingales/sousmartingales

**Définition 3.1.1.** On appelle une filtration une chaîne emboîtée de tribus :  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$ .

**Définition 3.1.2.** On dit qu'un processus  $X_n$  est adapté si pour tout  $n$ ,  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$  mesurable.

**Exemple 3.1.3.** On peut penser aux exemples suivants

1.  $\mathcal{F}_n = \{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), 0 \leq k \leq 2^n\}$  est une filtration
2. Les pavages emboîtés forment une filtration.
3. Soit  $X_i$  des variables aléatoires et  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  est une filtration.
4. De manière triviale  $X_n$  est adapté pour la filtration  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .
5. Dans ce cas  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  est aussi adapté pour  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

**Définition 3.1.4.** (Martingale) Soit  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$  une filtration. On dit que  $M_n$  est une martingale si c'est un processus adapté, pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$  et que pour tout  $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) = M_m$$

que c'est une sous martingale si pour tout  $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) \geq M_m$$

et surmartingale si pour tout  $m \leq n$

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m) \leq M_m.$$

**Exemple 3.1.5.** Soit  $X_i$  des variables iid avec  $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$ . Alors  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  est une martingale ssi  $\mathbb{E}(X) = 0$ , une sousmartingale si  $\mathbb{E}(X) \geq 0$  une surmartingale si  $\mathbb{E}(X) \leq 0$ .

Une martingale fermée : soit  $\mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_\infty$  et soit  $X$   $\mathcal{F}_\infty$  mesurable,  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ . Alors  $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  est une martingale.

*Remarque 3.1.6.* Si  $M_n$  est une (sous/sur-)martingale et  $X \mathcal{F}_0$  mesurable alors  $M_n + X$  est une (sous/sur-)martingale.

Exemple : Les moyennes sur les sous segments.

Utilisation de Jensen :

**Proposition 3.1.7.** *Si  $M_n$  est une martingale et  $f$  une fonction convexe. alors  $f(M_n)$  est une sous martingale*

*Si  $M_n$  est sous-martingale et  $f$  une fonction convexe et croissante alors  $f(M_n)$  est une sous martingale*

Exemple :

**Exemple 3.1.8.** Le carré d'une martingale est une sous martingale, la valeur absolue d'une martingale est une sous martingale, l'exponentiel d'une sous-martingale est une sous-martingale.

## 3.2 Lemme martingale et les temps d'arrêts

**Lemme 3.2.1.** *(Fondamental) Si  $H_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$  mesurable (un processus prévisible), borné. Soit  $M_n$  un processus adapté. On définit*

$$(H \cdot M)_n := \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1})$$

*Alors si  $M_n$  est une martingale alors  $(H \cdot M)$  est une martingale*

*Si  $M_n$  est une sous martingale et  $H \geq 0$  alors  $(H \cdot M)$  est une sous martingale.*

*Démonstration.* Dans le cas d'une martingale on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + \mathbb{E}(H_n(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (H \cdot M)_{n-1} + H_n \mathbb{E}((M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (H \cdot M)_{n-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une sousmartingale et avec  $H \geq 0$ , il suffit de remplacer la dernière égalité par  $\geq (H \cdot M)_{n-1}$ .  $\square$

Le Lemme précédent est assez extraordinaire : a partir d'une martingale : on peut contruire un très grand nombre d'autre martingale. Dans énormement de cas pour résoudre un problème avec des Martingale, il suffit de considérer le bon processus prévisible  $H$  et d'utiliser le lemme.

Il a aussi une interprétation très naturelle. Supposer que vous jouiez à un jeu de hasard (pile ou face, roulette, dès, ...) et qu'à chaque tour vous misiez une certaine quantité d'argent. Supposons en plus que les règles du jeu soit équilibré et que Alors quelque soit votre stratégie, c'est à dire la somme d'argent que vous misez à chaque tour, le jeu reste équilibré et en moyenne vous ne gagner ni ne perdre rien.

**Définition 3.2.2.** (temps d'arrêt)

Soit  $\mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$  une filtration, et  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .  $T$  est un *temps d'arrêt* si pour tout  $n$ ,  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

Exemple de temps d'arrêt.

**Exemple 3.2.3.** Le temps d'arrêt constant,  $\{T = n\} \in \{\emptyset, \Omega\}$

**Exemple 3.2.4.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  mesurable et  $X_n$  un processus adapté alors  $T := \inf\{n : X_n \in A\}$  est un temps d'arrêt. En effet  $\{T = n\} = \bigcap_{k < n} \{X_k \notin A\} \cap \{X_n \in A\}$ . Par contre le maximum n'est en générale pas un temps d'arrêt.

**Proposition 3.2.5.** *On a*

1.  $S \wedge T$  est un temps d'arrêt
2.  $S \vee T$  est un temps d'arrêt
3.  $\max S_i$  est un temps d'arrêt,  $\inf S_i$  est un temps d'arrêt

*Démonstration.*  $\{T \wedge S \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ .  $\{T \vee S \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . Pareillement  $\{\max S_i \leq n\} = \bigcap \{S_i \leq n\}$  et  $\{\inf S_i \leq n\} = \bigcup \{S_i \leq n\}$   $\square$

Exemple

**Définition 3.2.6.** On définit la tribu  $\mathcal{F}_T$  associé au temps d'arrêt  $T$  par  $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$ .

On vérifie que c'est bien une tribu : En effet  $\Omega \cup \{T = n\} = \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ ,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \cap \{T = n\} = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n$$

and  $A^c \cap \{T = n\} = \{T = n\} \cap (A \cap \{T = n\})^c \in \mathcal{F}_n$ . Donc stable par union dénombrable et complémentaire.

Interprétation c'est la tribu qui contient l'information de ce qui s'est passé avant le temps d'arrêt.

**Proposition 3.2.7.** *Soit deux temps d'arrêt  $S$  et  $T$  tel que  $S \leq T$  alors  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .*

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $X_n$  un processus adapté. On définit*

$$X_T = \begin{cases} X_n & \text{si } T = n \\ 0 & \text{si } T = \infty \end{cases}$$

*Alors  $X_T$  est  $\mathcal{F}_T$  mesurable.*

**Lemme 3.2.9.** *Si  $M_n$  est une martingale (resp. sous martingale) alors  $M_{n \wedge T}$  est une martingale (resp. sous martingale)*

*Démonstration.* On choisit le processus prévisible suivant

$$H_n = 1_{n \leq T}$$

En effet  $H_n = 0 \Leftrightarrow T \leq n - 1$  est donc bien  $\mathcal{F}_{n-1}$  mesurable. Alors

$$(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n 1_{k \leq T} (M_k - M_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n \wedge T} (M_k - M_{k-1}) = M_{T \wedge n} - M_0$$

est une martingale. Puisque  $M_0$  est  $\mathcal{F}_0$  mesurable,  $M_{T \wedge n} = (H \cdot M)_n + M_0$  est bien une martingale on en déduit le théorème de l'arrêt.  $\square$

On peut alors en déduire le théorème suivant.

**Théorème 3.2.10.** *Soit  $T$  est un temps d'arrêt tel qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  avec  $T \leq N$  p.s. Si  $(M_n)$  est une martingale alors*

$$\mathbb{E}(M_T) = M_0$$

*Si  $M_n$  est une sousmartingale alors*

$$\mathbb{E}(M_T) \geq M_0.$$

*Démonstration.* On a

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_{T \wedge N}) = (\geq) \mathbb{E}(M_{T \wedge 0}) = \mathbb{E}(M_0)$$

où on a utilisé que  $M_{n \wedge T}$  est une martingale (ou sousmartingale.)  $\square$

### 3.3 Feuille d'exercice 3 : Martingales discrètes et temps d'arrêt

Pour chacun des exercices dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier.

**Exercice 3.3.1.** Soit  $X_n$  des variables iid telles que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$ , et on pose  $\mathcal{F}_n = \sigma((X_k)_{k \leq n})$  la filtration canonique associée à  $X_n$ . Dans ce qui suit martingales, surmartingales ou sousmartingales sont sous entendus pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- $A_n = \sum_{k=1}^n 3X_k$  est une martingale.
- $B_n = \sum_{k=2}^{n+1} kX_k$  est une martingale.
- $C_n = \sum_{k=1}^n k^2 X_k - 3n$  est une sousmartingale.
- $D_n = (A_n)^4$  est une sousmartingale.

**Exercice 3.3.2.** Soit  $\mathcal{F}_n$  une filtration et  $G_n$  un processus adapté.

- $T_1 = \min(k \in \mathbb{N} | G_k > 1)$  est un temps d'arrêt.
- $T_2 = \min(k > T_1 | G_k < 0)$  est un temps d'arrêt.
- $T_3 = \max(k \in \mathbb{N} | G_k = 0)$  est un temps d'arrêt.

$$- T_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } G_0 \leq 0 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est un temps d'arrêt.}$$

(temps d'arrêt évidemment sous entendu pour  $\mathcal{F}_n$ .)

**Exercice 3.3.3.** Soit  $\mathcal{F}_n$  une filtration et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une martingale et  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sousmartingale, soit  $R_n$  et  $P_n$  des processus prédictibles positifs.

- $A_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_k$  est une martingale.
- $B_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_{k-1}$  est une martingale.
- $C_n = -\sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})2R_k$  est une sousmartingale.
- $D_n = \sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})(\sum_{i=1}^k P_i)$  est une sousmartingale.

**Exercice 3.3.4.** Soit  $\mathcal{F}_n$  une filtration,  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une martingale avec  $M_0 = 2$  p.s. et  $T$  un temps d'arrêt fini p.s.

- $\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = 2$
- $\mathbb{E}(M_T) = 2$
- Si  $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |M_n| < C$  p.s, alors  $\mathbb{E}(M_T) = 2$
- Si  $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < C$  alors  $\mathbb{E}(M_T) = 2$

**Exercice 3.3.5.** Soit  $X_n$  une suite de variables aléatoires iid tel que  $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$  avec  $p > 1/2$  et  $\mathcal{F}_n$  la filtration canonique pour  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- $A_n = \sum_{k=1}^n X_k$  est une martingale
- $B_n = 10 + \sum_{k=1}^n X_k + (2p - 1)n$  est une martingale
- Soit  $T = \inf[k \in \mathbb{N}, A_k = -10]$ . Alors  $T < \infty$  p.s.
- $\mathbb{E}(T) = \frac{10}{2p-1}$

# Chapitre 4

## Convergences de martingales

### 4.1 Convergence presque sure.

**Proposition 4.1.1.** *Nombre de montés de Doob.*

$$(b - a)\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \mathbb{E}((M_n - a)_+) - \mathbb{E}((M_0 - a)_+)$$

*Démonstration.* On définit une suite de temps d'arrêt.  $T_i$  et  $S_i$   $S_i = \inf\{k \geq T_{i-1} : M_k \leq a\}$  et  $T_i := \inf\{k \geq S_i : M_k \geq b\}$ . On vérifie que ce sont des temps d'arrêt : On a  $\{T_i = n\} = \cup_{l \leq n} \{S_{i-1} = l\} \cap \{M_n \geq k\} \cap_{l \leq m < n} \{M_m < k\}$  ce qui permet de conclure par récurrence immédiate. Et on définit le processus

$$H_n = \sum_i 1_{S_i < n \leq T_i}$$

C'est un processus prévisible : en effet  $1_{S_i < n \leq T_i} = 0 \Leftrightarrow \{T_i > n - 1\} \cup \{S_i \geq n - 1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ .

Puisque  $(\cdot)_+$  est convexe,  $\tilde{M} = (M_n - a)_+$  est une sousmartingale. Donc

$$\begin{aligned} (H \cdot \tilde{M})_n &= \sum_i 1_{S_i < k \leq T_i} (\tilde{M}_k - \tilde{M}_{k-1}) \\ &= \sum_{i, T_i \leq n} (\tilde{M}_{T_i} - \tilde{M}_{S_i}) \\ &= \sum_{i \leq N_{a,b}} (\tilde{M}_{T_i} - \tilde{M}_{S_i}) \\ &\geq (b - a)N_{a,b} \end{aligned}$$

Donc

$$(b - a)\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \mathbb{E}((H \cdot \tilde{M})_n) \leq \mathbb{E}((1 \cdot \tilde{M})_n) = \mathbb{E}((M_n - a)_+) - \mathbb{E}((M_0 - a)_+)$$

□

Consequence : si  $\mathbb{E}((M_n - a)_+) \leq C < \infty$  il y a en moyenne au plus  $\mathbb{E}(N_{a,b}) \leq \frac{C}{(b-a)}$ .

Si l'espérance de  $\mathbb{E}((M_n - a)_+)$  est borné uniformément pour tout  $n$ , le nombre d'aller retour entre  $a$  et  $b$  est alors fini presque sûrement.

**Théorème 4.1.2.** *Théorème convergence presque sur.*

Si  $\mathbb{E}((M_n)_+) \leq C < \infty$  pour tout  $n$ . Alors  $M_n$  converge presque sûrement.

**Lemme 4.1.3.** *Si pour tout  $a, b \in \mathbb{Q}, N_{a,b} < \infty$  alors il existe  $l$  tel que  $u_n \rightarrow l$ .*

Preuve : Pour tout  $a \leq b$ , au bout d'un certain temps :  $u_n \geq a$  ou  $u_n \leq b$ . On  $b_\infty = \inf b$  comme précédemment et  $a_\infty = \sup a$  comme précédemment.

## 4.2 Convergence $L^p$

**Proposition 4.2.1.** *Inégalité maximale de Doob. Soit  $M_n$  une sousmartingale et  $a \geq 0$ . Alors*

$$a\mathbb{P}(\exists k \leq n : M_k \geq a) \leq \mathbb{E}(M_n 1_{\sup_{k \leq n} M_k \geq a}) \leq \mathbb{E}((M_n)_+)$$

*Démonstration.* On introduit  $T = \inf\{k : M_k \geq a\}$ . Alors

$$a\mathbb{P}(\exists k \leq n : M_k \geq a) \leq \mathbb{E}(M_T 1_{T \leq n})$$

□

**Exercice 4.2.2.** Soit  $M_n$  une sousmartingale et  $S, T$  deux temps d'arrêt. Si  $S \leq T$  alors  $\mathbb{E}(M_S) \leq \mathbb{E}(M_T)$ .

En effet on choisit le processus prévisible  $H_n = 1_{S < n \leq T}$  alors on a

$$M_T = M_S + (H \cdot M)$$

En particulier  $0 = \mathbb{E}((H \cdot M)_0) \leq \mathbb{E}(H \cdot M)$

Dans la suite, nous notons  $M_n = \sup_{k \leq n} M_k$ .

**Proposition 4.2.3.** *Comparaisons martingale/maximum de martingale. Soit  $p > 1$ ,*

1. *Soit une sous martingale positive, alors*

$$\mathbb{E}(\tilde{M}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(M_n^p).$$

2. *Soit  $M_n$  une martingale, alors*

$$\mathbb{E}(|\tilde{M}_n|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_n|^p).$$

**Théorème 4.2.4.** *Théorème de convergence dans  $L^p$ . Soit  $p > 1$ .*

1. *Soit  $M_n$  une sousmartingale positive tel que  $\exists C > 0$ , pour tout  $n$   $\mathbb{E}(M_n^p) \leq C$  alors il existe  $M_\infty$  tel que  $M_n \rightarrow M_\infty$  p.s. et dans  $L^p$ .*
2. *Soit  $M_n$  une martingale tel que  $\exists C > 0$ , pour tout  $n$   $\mathbb{E}(|M_n|^p) \leq C$  alors il existe  $M_\infty$  tel que  $M_n \rightarrow M_\infty$  p.s. et dans  $L^p$ .*

### 4.3 Convergence $L^1$

**Définition 4.3.1.** On dit que  $M_n$  est une martingale fermée si il existe  $Z$ ,  $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$  tel que  $M_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ .

**Théorème 4.3.2.** Soit  $M_n$  une martingale. On a équivalence entre

1.  $M_n$  converge p.s. et dans  $L^1$ .
2.  $M_n$  est une martingale fermée.

*Démonstration.* Supposons que  $M_n \rightarrow M_\infty$  p.s. et dans  $L^1$ . Soit  $A \in \mathcal{F}_n$  alors pour tout  $m \geq n$

$$\mathbb{E}(1_A M_m) = \mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(1_A M_n)$$

et donc puisque l'on a convergence dans  $L^1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_A M_m) = \mathbb{E}(1_A M_\infty)$$

soit  $\mathbb{E}(1_A M_\infty) = \mathbb{E}(1_A M_n)$  de plus  $M_n$  est bien  $\mathcal{F}_n$  mesurable. Par unicité de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n$ .

Supposons maintenant que  $M_n$  soit une martingale fermée. Soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que  $\mathbb{E}(|Z|1_{|Z|>C}) \leq \epsilon$ . On pose  $M_n^{(1)} = \mathbb{E}(|Z|1_{|Z| \leq C}|\mathcal{F}_n)$  et  $M_n^{(2)} = \mathbb{E}(|Z|1_{|Z|>C}|\mathcal{F}_n)$ . On a  $M_n = M_n^{(1)} + M_n^{(2)}$ . Ainsi que  $|M_n^{(1)}| \leq C$  et  $\mathbb{E}(|M_n^{(2)}|) \leq \epsilon$ . Alors  $M_n^{(1)}$  est une martingale uniformément borné, elle converge donc p.s. De plus par  $|M_n^{(1)}| \leq C$  et convergence dominé alors  $M_n^{(1)}$  converge dans  $L^1$ . Il existe donc  $N$  tel que pour tout  $n, m \geq N$ ,  $\mathbb{E}(|M_n^{(1)} - M_m^{(1)}|) < \epsilon$  et donc

$$\mathbb{E}(|M_n - M_m|) \leq \mathbb{E}(|M_n^{(1)} - M_m^{(1)}|) + \mathbb{E}(|M_n^{(2)}|) + \mathbb{E}(|M_m^{(2)}|) < 3\epsilon.$$

Ainsi  $M_n$  est une suite de Cauchy dans  $L^1$  et donc converge dans  $L^1$ . Puisque pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|Z|)$ , on a également la convergence p.s.  $\square$

**Exemple 4.3.3.** Soit  $f \in L^1([0, 1])$ . Considérons

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(t) 2^n \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f(s) ds.$$

Alors  $f_n$  converge vers  $f$  p.s. sur  $[0, 1]$  et dans  $L^1$ .

### 4.4 Le Théorème centrale limite pour les martingales

Rappel pour le théorème centrale limite classique. On a  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  avec  $X_i$  des variables iid intégrables tel que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$ . Alors on a la convergence en loi

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

ou  $\mathcal{N}(0, 1)$  est la loi gaussienne.

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}S_n}) &= \mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^n i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}X_j}) \\ &= \left[ \mathbb{E}(e^{i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}X_1}) \right]^n \\ &= \left[ 1 + i\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}(X_1) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2n}\mathbb{E}(X_1^2) + o\left(\frac{\alpha^2}{n}\right) \right]^n \\ &= \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{n} + o\left(\frac{\alpha^2}{n}\right) \right]^n \\ &= \exp(-\alpha^2 + o(1)) \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  $\square$

Remarquer que  $S_n$  est une martingale particulière. On va maintenant adapter ce théorème à un ensemble de martingale plus générale.

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $M_n$  une martingale,  $M_0 = 0$  tel que*

1. *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $n$ ,  $|M_{n+1} - M_n| < C$ ,*
2.  *$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n) \rightarrow \sigma^2$  p.s. pour  $N \rightarrow \infty$ .*

Alors

$$\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

pour  $N \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on cherche à calculer  $\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}})$  pour cela on introduit  $F_n$  un processus prévisible tel que  $e^{i\alpha\frac{M_n}{\sigma\sqrt{N}} - F_n}$  soit une martingale. Construisons ce  $F_n$ , on a

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_n}{\sigma\sqrt{N}} - F_n} | \mathcal{F}_{n-1}) = e^{i\alpha\frac{M_{n-1}}{\sigma\sqrt{N}} - F_{n-1}}$$

soit

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha\frac{M_n - M_{n-1}}{\sigma\sqrt{N}}} | \mathcal{F}_{n-1}) = e^{F_n - F_{n-1}}$$

alors

$$1 + \frac{i\alpha}{\sigma\sqrt{N}}\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2N}\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_n) + o\left(\frac{1}{n}\right) = e^{F_n - F_{n-1}}$$

Puisque  $M_n$  est une martingale  $\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$  et donc

$$F_n - F_{n-1} = -\frac{\alpha^2}{\sigma^2N}\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_n) + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

Ainsi

$$F_N = \sum_{n=1}^N (F_n - F_{n-1}) = \sum_{n=1}^N -\frac{\alpha^2}{\sigma^2 N} \mathbb{E}((M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_n) + o\left(\frac{1}{N}\right) = -\alpha^2 + o(1)$$

Conclusion

$$1 = \mathbb{E} \left( e^{i\alpha \frac{M_0}{\sigma\sqrt{N}} - F_0} \right) = \mathbb{E} \left( e^{i\alpha \frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}} - F_N} \right) = \mathbb{E} \left( e^{i\alpha \frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}} + o(1)} \right) e^{\alpha^2}$$

Et on peut conclure  $\mathbb{E} \left( e^{i\alpha \frac{M_N}{\sigma\sqrt{N}}} \right) = e^{-\alpha^2 + o(1)}$  qui est bien la fonction caractéristique de la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  $\square$

# Chapitre 5

## Introduction aux chaîne de Markov sur un ensemble discret

### 5.1 Définition des chaîne de Markov

On peut décrire une chaîne de Markov comme un processus aléatoire qui ne dépend pas du passé.

**Définition 5.1.1.** Soit  $E$  un ensemble dénombrable. On définit une matrice stochastique  $Q : E \times E \rightarrow [0, 1]$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\sum_{y \in E} Q(x, y) = 1$ .

**Définition 5.1.2.** Une chaîne de Markov associée à la  $Q$  est un processus  $X_n$  tel que

$$\mathbb{P}(X_n = x | X_0, \dots, X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1}) = Q(X_{n-1}, x)$$

Exemple de Chaîne de Markov :  $X_n$  des variables iid,  $S_n$  la somme de variables aléatoires, Une marche aléatoire sur des graphe, ..

Remarque : il est possible de considérer des chaînes de Markov dites inhomogène avec une matrice stochastique différente à chaque étape  $\mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1}) = Q_n(X_{n-1}, x)$ . Mais on ne s'intéressera dans la suite qu'à des chaînes de Markov homogène.

#### 5.1.0.1 Propriétés élémentaires de la matrice stochastique.

**Définition 5.1.3.** Une matrice stochastique  $Q$  agit sur les mesures de probabilité via

$$[Q\mu](y) = \sum_x \mu(x)Q(x, y).$$

Elle définit également une application sur l'ensemble des fonctions bornées sur  $E$ .

$$[Qf](x) = \sum_y Q(x, y)f(y).$$

Remarquer que l'on a bien  $\sum_y [Q\mu](y) = 1$ . Ces deux applications sont duales l'une de l'autre. En effet

$$\langle \mu, Qf \rangle = \sum_x \mu(x)Qf(x) = \sum_{x,y} \mu(x)Q(x, y)f(y) = \sum_x Q\mu(x)f(x) = \langle \mu, Qf \rangle$$

**Proposition 5.1.4.** *Le produit de matrices stochastique est une matrice stochastique.*

$$\sum_z [Q_1 Q_2](x, z) = \sum_{z,y} Q_1(x, y)Q_2(y, z) = \sum_{y,z} Q_1(x, y) \sum_z Q_2(y, z) = 1$$

### 5.1.0.2 Propriétés élémentaire de la chaîne de Markov

**Proposition 5.1.5.** *On a*

1. Pour tout  $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ ,  $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2) \cdots Q(x_{n-1}, x_n)$ .
2. Si  $\mu$  décrit la probabilité de  $X_n$  alors  $Q\mu$  décrit la probabilité de  $X_{n+1}$  et pour tout  $k$   $Q^k \mu$  décrit la probabilité de  $X_{n+k}$ .
3.  $X_{nk}$  est une chaîne de Markov de matrice stochastique  $Q^k$ .
4.  $\mathbb{E}_x(f(X_1)) = Qf$ . Plus généralement  $\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = Qf(X_n)$

## 5.2 Markov et martingale

On dit que  $f$  est harmonique si  $Qf = f$ , que  $f$  est sous harmonique si  $Qf \geq f$  et surharmonique si  $Qf \leq f$  On a la relation suivante

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $X_n$  une chaîne de Markov. Alors  $f(X_n)$  est une (sous/sur)martingale ssi  $f$  est (sous/sur)harmonique.*

*Démonstration.*  $\mathbb{E}(f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(f(X_n)|X_{n-1}) = \sum_y Q(X_{n-1}, y)f(y) = f(X_{n-1})$  car  $f$  est harmonique.  $\square$

**Exercice 5.2.2.** Si  $f$  est harmonique sur  $G$  et soit  $T = \inf\{n : X_n \notin G\}$  alors  $f(X_{n \wedge T})$  est une martingale.

**Exercice 5.2.3.** Le temps d'arrêt d'une marche aléatoire non symétrique. Soit  $X_i$  iid avec  $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$  avec probabilité  $p$ .

$S_n = x + \sum X_i$ . Dans un exercice précédent  $T_a = \inf\{n : S_n = a\}$  et  $T_b = \inf\{n : S_n = b\}$  avec  $a \leq x \leq b$ .  $T = T_a \wedge T_b$ .  $\mathbb{P}(T = T_a)$  avec une martingale et le théorème de l'arrêt.

L'idée introduire la fonction  $f(n) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$ .

1-Montrer que  $f$  est harmonique.

On note  $q = (1 - p)$  alors

$$Qf(n) = p \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + q \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p^n q}{q^n} + \frac{p^n p}{q^n} = \frac{p^n}{q^n} (p + q) = f(n)$$

2-Calculer  $\mathbb{P}(T = T_a)$

$f(X_n)$  est une martingale. Donc

$$\frac{p^x}{q^x} = \mathbb{E}(f(X_0)) = \mathbb{E}(f(X_{n \wedge T})) \rightarrow \mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{P}(T = T_a) \frac{p^a}{q^a} + (1 - \mathbb{P}(T = T_a)) \frac{p^b}{q^b}$$

Car la martingale est bornée  $\max \frac{p^b}{q^b}, \frac{p^a}{q^a}$ .

$$\mathbb{P}(T = T_a) = \frac{\frac{p^x}{q^x} - \frac{p^b}{q^b}}{\frac{p^a}{q^a} - \frac{p^b}{q^b}}$$

### 5.3 Propriétés de Markov faible et forte

Ces propriétés sont centrale pour les processus de Markov et dans le cours on les reverra et utilisera beaucoup pour le mouvement brownien.

Soit  $\mu$  une mesure de proba sur  $E$ . On note  $\mathbb{E}_\mu$  pour le processus de Markov avec condition initiale  $X_0$  de loi aléatoire  $\mu$  et simplement  $\mathbb{E}_x$  si  $\mu = \delta_x$ .

Opérateur de décalage :  $\theta_n : E^{\mathbb{N}} \rightarrow E^{\mathbb{N}}$  qui à  $\theta_n(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots)$

La particularité de la chaîne de Markov est tel que conditionnellement au point d'arrivée  $X_n$  au temps  $n$ , ce qui s'est passé avant  $n - 1$  et ce qui se passe après  $n$  sont indépendants. Qui plus est puisque la chaîne de Markov est homogène une chaîne de Markov démarrée au temps  $n$  a la même loi qu'une chaîne de Markov commencée au temps 0. C'est formellement ce qu'affirme le théorème suivant

**Théorème 5.3.1.** (Propriété de Markov faible)

Soit  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $F, \mathcal{F}_n$  mesurable. Alors

$$\mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_n)) = \mathbb{E}_\mu(F \mathbb{E}_{X_n}(G)).$$

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas où  $F = 1_{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n}$  et  $G = 1_{X_0=z_0, X_1=z_1, \dots, X_l=z_l}$ . Alors  $G \circ \theta_n = 1_{X_n=z_0, X_{n+1}=z_1, \dots, X_{n+l}=z_l}$  et

$$\mathbb{E}_{X_n}(G) = 1_{X_n=z_0} Q(z_0, z_1) Q(z_1, z_2) \cdots Q(z_{n-1}, z_n).$$

Finallement

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_n)) \\
 &= \mathbb{E}_\mu \mathbf{1}_{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n} \mathbf{1}_{X_n=z_0, X_{n+1}=z_1, \dots, X_{n+l}=z_l} \\
 &= \mu(x_0)Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbf{1}_{x_n=z_0} Q(z_0, z_1)Q(z_1, z_2) \cdots Q(z_{n-1}, z_n) \\
 &= \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G))
 \end{aligned}$$

Dans le cas générale  $F = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_i$  et  $G = \sum_{j=1}^M \beta_j G_j$  alors

$$\mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_n)) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbb{E}_\mu(F_i(G_j \circ \theta_n)) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbb{E}_\mu(F_i \mathbb{E}_{X_n}(G_j)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_n}(G))$$

et on peut l'étendre à toute fonction  $F, G$  mesurable en prenant une  $F^n$  et  $G^n$  pouvant s'exprimer avec un nombre fini de fonction indicatrice et tel que  $F^n \rightarrow F, G^n \rightarrow G$  dans  $L^1$ .  $\square$

On peut améliorer considérablement la propriété de Markov simple en considérant non pas un arrêt fixé à l'avance  $n$  mais avec un temps d'arrêt.

**Théorème 5.3.2.** *Propriété de Markov Forte*

Soit  $T$  un temps d'arrêt finit presque sûrement,  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  borné avec  $F \mathcal{F}_T$  mesurable alors par propriété de Markov faible

$$\mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_T)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_T}(G)).$$

*Démonstration.* Remarquer que  $\mathbf{1}_{T=n}F$  est  $\mathcal{F}_n$  mesurable et donc

$$\mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{T=n}F(G \circ \theta_n)) = \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{T=n}F\mathbb{E}_{X_n}(G)).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_\mu(F(G \circ \theta_T)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{T=n}F(G \circ \theta_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{T=n}F\mathbb{E}_{X_n}(G)) = \mathbb{E}_\mu(F\mathbb{E}_{X_T}(G)).$$

$\square$

**Proposition 5.3.3.** *Soit  $F$  et  $G$  deux ensemble disjoint tel que  $E = F \cup G$  et soit  $g$  une fonction borné définit  $G$ . Soit  $T = \inf\{n : X_n \in G\}$ . On pose*

$$h(x) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{T < \infty} g(X_T))$$

alors

1.  $h$  est harmonique sur  $F$ ,
2.  $h(y) = g(y)$  pour tout  $y \in G$ .

Si de plus  $T < \infty$  p.s, alors  $h$  est l'unique fonction borné qui satisfait ces propriétés.

*Démonstration.* Pour tout  $x \in G$ , conditionnellement à  $X_0 = x$  on a immédiatement  $T = 0$  et donc  $h(x) = g(X_0) = g(x)$ .

Pour  $x \in F$ , alors  $T \geq 1$ . On remarque que  $X_T \circ \theta_1 = X_T$ . Par propriété de Markov faible on a

$$h(x) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_1}(1_{T < \infty} g(X_T))) = \sum_y Q(x, y) \mathbb{E}_y(1_{T < \infty} g(X_T)) = Qh(x)$$

Et donc  $h$  est bien harmonique.

Supposons maintenant que  $T < \infty$ . Soit  $h'$  une autre fonction bornée harmonique sur  $F$  et égale à  $g$  sur  $G$ . On introduit

$$M_n = h'(X_{n \wedge T})$$

D'après le Théorème,  $M_n$  est une martingale donc pour tout  $n$ .

$$h'(x) = \mathbb{E}_x(h'(X_0)) = \mathbb{E}_x(h'(X_{n \wedge T}))$$

Puisque  $T < \infty$  p.s et  $h'(X_{n \wedge T}) \rightarrow h'(X_T) = g(X_T)$  p.s. De plus  $h'(X_{n \wedge T})$  est bornée et par convergence dominée on conclut donc que

$$h'(x) = \mathbb{E}_x(g(X_T)) = h(x)$$

d'où l'unicité de  $h$ . □

## 5.4 Application Le problème de Dirichlet discret.

Soit  $B \subset \mathbb{Z}^d$  on définit le Laplacien discret  $\Delta$  sur les fonction  $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi

$$[\Delta u](x) = \frac{1}{2d} \sum_{|y-x|=1} (u(y) - u(x))$$

Soit  $g$  une fonction sur  $\partial B$ . On cherche  $u$  tel que

1.  $\Delta u|_B = 0$ ,
2.  $u(y) = g(y)$  pour tout  $y \in \partial B$ .

On observe que  $\Delta u|_B = 0$  est équivalent à  $u(x) = \frac{1}{2d} \sum_{|y-x|=1} u(y)$  soit  $u(x) = Qu(x)$  avec  $Q$  la matrice stochastique de la marche aléatoire  $X_n$  sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ . Ainsi  $u$  est harmonique et  $T = \inf\{n : X_n \notin B\}$  est fini presque sûrement car  $B$  est borné. Ainsi

$$u(x) = \mathbb{E}_x(g(X_T))$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet.

## 5.5 Feuille d'exercice 5 : Chaîne de Markov et fonction harmonique.

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre-exemple.

**Exercice 5.5.1.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire usuelle sur  $\mathbb{Z}^2$  :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = (x \pm 1, y) | X_n = (x, y)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = (x, y \pm 1) | X_n = (x, y)) = \frac{1}{4}$$

et 0 dans les autres cas. On note  $Q$  la matrice de transition. Soit la fonction  $h(x, y) = 1_{y \geq 1}$ . On suppose  $X_0 = (0, 0)$ .

- $\mathbb{P}(y_2 \geq 1) = \frac{1}{4}$ .
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \sum_{(x', y'), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}^2} Q((x, y), (x', y')) Q((x', y'), (\tilde{x}, \tilde{y})) = 1$ .
- $Q1 = 1$  (la fonction sur  $\mathbb{Z}^2$  constante égale à 1).
- $[Q^2 h](0, 0) = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 5.5.2.** Soit une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{N}$  avec  $X_0 = x$  et la matrice de transition  $Q$  défini par

$$Q(y, y + 1) = p_y \quad \text{et} \quad Q(y, y - 1) = q_y$$

avec  $p_y + q_y = 1, p_y, q_y > 0$  pour tout  $y > 0, Q(0, 0) = 1$  et  $Q(y, z) = 0$  dans tous les autres cas. On pose  $T_0 = \inf\{k : X_k = 0\}$ .

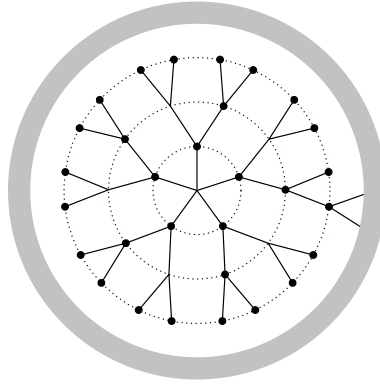
- Si  $p_y < \frac{1}{2}$  pour tout  $y > 0$ , alors  $X_n$  est une surmartingale.
- Si  $p_y < \frac{1}{2}$  pour tout  $y > 0$ , alors  $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$ .
- La fonction

$$f(n) = \prod_{1 \leq y \leq n} \frac{q_y}{p_y}$$

est harmonique sur  $\mathbb{N}^*$ .

- Dans le cas  $p_y = \frac{2}{3}$  et  $q_y = \frac{1}{3}$  pour tout  $y > 0$  et  $x = 3$  alors

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = \frac{1}{8}.$$



**Exercice 5.5.3.** Soit  $E$  un arbre régulier infini de racine  $x_0$ . Sauf à la racine tous les sommets ont le même nombre  $d$  de voisins. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire (standard) sur cet arbre. À chaque étape, elle saute d'un sommet à un sommet voisin de manière équiprobable :  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \frac{1}{d}$  si  $(x, y)$  est une arête du graphe et 0 sinon. On note  $r : E \rightarrow \mathbb{N}$  la distance dans le graphe par rapport à la racine ( $r(x)$  = nombre d'arêtes du plus court chemin de  $x$  à  $x_0$ ). On note  $T_0 = \inf\{n : X_n = x_0\}$

- $(r(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une sousmartingale.
- La fonction  $h(x) = (d-1)^{-r(x)}$  est harmonique sur  $E \setminus \{x_0\}$ .
- Si  $X_0 = x$ ,  $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = (d-1)^{-r(x)}$ .
- La fonction  $g(x) = \mathbb{P}(T_0 < \infty | X_0 = x)$  est une fonction harmonique sur  $E \setminus \{x_0\}$ .

**Exercice 5.5.4.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov sur  $E$  un ensemble discret avec matrice de transition  $Q$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *irréductible* si pour tout  $x, y \in E$ , il existe  $n$  tel que  $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$ . On dit que  $X_n$  est *récurrente* si  $\mathbb{P}(\exists n > 0, X_n = x | X_0 = x) = 1$  (le processus retourne à son point de départ presque sûrement). On admettra que si la chaîne de Markov est irréductible et récurrente alors elle visite tous les points de  $E$  une infinité de fois presque sûrement.

- La marche aléatoire usuelle sur  $\mathbb{Z}$  est récurrente.
- La fonction  $h(n) = n$  est harmonique sur  $\mathbb{Z}$  pour la marche aléatoire usuelle.
- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Alors toute fonction harmonique sur  $E$  et bornée inférieurement est constante.
- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Alors toute fonction harmonique sur  $E$  est constante.

Deuxième partie

**Mouvement Brownien**

# Chapitre 6

## Introduction au mouvement brownien

### 6.1 Rappel Vecteurs Gaussiens.

Les vecteurs gaussiens sont une classe de variables aléatoires qui étendent les variables gaussiennes sur  $\mathbb{R}$  en toute dimension ( $\mathbb{R}^d$  pour  $d \geq 1$ ).

*Remarque 6.1.1.* Soit  $X_1, X_2$  deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne  $\mu_1, \mu_2$  et de variance  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  alors  $X_1 + X_2$  est une variable gaussienne de moyenne  $\mu_1 + \mu_2$  et de variance  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

**Définition 6.1.2.** On dit que  $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur gaussien si chaque  $X_i$  est gaussien et de plus pour tout  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$   $\sum_{i=1}^d a_i X_i$  est une variable gaussienne.

**Exemple 6.1.3.** On a

1. Par la remarque précédente soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  où les  $X_i$  sont des gaussiennes indépendantes alors  $X$  est un vecteur gaussien.
2. Soit  $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$  et  $X = (X_1, \dots, X_n)$  avec  $X_i$  des gaussiennes indépendantes, alors  $Y = (AX)_i = \sum_j A_{ij} X_j$  est un vecteur gaussien.

En effet soit  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  on a

$$\sum_{i=1}^d a_i Y_i = \sum_{i \leq d, j \leq n} a_i A_{ij} X_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^d a_i A_{ij} \right) X_j$$

c'est bien une variable gaussienne une fois encore en utilisant la remarque. Il se trouve que tous les vecteurs gaussiens peuvent s'exprimer de la sorte.

**Proposition 6.1.4.** Soit  $Y$  un vecteur gaussien alors il existe  $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$  et  $X = (X_1, \dots, X_n)$  avec  $X_i$  des gaussiennes indépendantes tel que  $Y = AX$ .

Un vecteur gaussien est caractérisé par sa matrice de covariance

$$C_{ij} = \mathbb{E}((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)).$$

**Exemple 6.1.5.** Si  $X_i$  sont iid centré ( $\mu = 0$ ) et normé :  $\sigma = 1$  alors  $C = I_n$  (la matrice identité).

Si  $Y = AX$  avec  $X$  comme précédemment, alors on a  $C = A^t A$ .

## 6.2 Limite de somme de variables aléatoires iid.

La principale motivation pour introduire le mouvement brownien est qu'il apparait naturellement dans la limite de somme de variables indépendantes. L'élément centrale ici est le théorème centrale limite : Soit  $X_i$  des variables iid,  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\mathbb{E}(X^2) = 1$ , on pose

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i.$$

**Théorème 6.2.1.** Soit  $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ . Alors on a la convergence en loi

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \dots, S_{t_k}^{(n)}) \rightarrow (U_{t_1}, \dots, U_{t_k})$$

tel que :

1.  $U_{t_1}, (U_{t_2} - U_{t_1}), \dots, (U_{t_k} - U_{t_{k-1}})$  sont indépendants.
2. Pour tout  $i \leq k$   $(U_{t_2} - U_{t_1})$  est gaussien de variance  $t_2 - t_1$ .

Avant de prouver ce théorème on va rappeler un Lemme que l'on utilisera par la suite.

**Lemme 6.2.2.** Si pour  $n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$  sont indépendant et  $X_n, Y_n \rightarrow X, Y$  en loi alors  $(X, Y)$  sont indépendant.

On rappelle que  $X$  et  $Y$  sont indépendants ssi pour toutes fonctions  $f, g$  bornées continues  $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ .

*Démonstration.* Pour  $f, g$  continues bornés : alors  $\mathbb{E}(f(X_n)g(Y_n)) = \mathbb{E}(f(X_n))\mathbb{E}(g(Y_n))$  car  $X_n, Y_n$  sont indépendant. Puisque  $X_n, Y_n \rightarrow X, Y$  en loi alors on a  $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$ ,  $\mathbb{E}(g(Y_n)) \rightarrow \mathbb{E}(g(Y))$  et  $\mathbb{E}(f(X_n)g(Y_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X)g(Y))$ . On peut alors conclure

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \lim \mathbb{E}(f(X_n))\mathbb{E}(g(Y_n)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

□

*Preuve du Théorème 6.0.6.* On a pour tout  $i < k$

$$S_{t_{i+1}}^{(n)} - S_{t_i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{\lfloor nt_{i+1} \rfloor} X_l - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{\lfloor nt_i \rfloor} X_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=\lfloor nt_i \rfloor + 1}^{\lfloor nt_{i+1} \rfloor} X_l$$

Tous les termes  $X_i$  apparaissant dans la sommes sont différents de ceux des autres  $S_{t_{j+1}}^{(n)} - S_{t_j}^{(n)}$  ( $j \neq i$ ). On a donc l'indépendance des  $(S_{t_{i+1}}^{(n)} - S_{t_i}^{(n)})$  car les  $X_l$  sont indépendants. On utilise alors le Théorème centrale limite dont nous redonnons la preuve ci dessous :

Tout d'abord on a la convergence en loi, ssi  $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$  pour toute fonction  $f$  continue borné. Cependant pour montrer la convergence il est suffisant de ne considérer que les fonctions  $x \rightarrow \exp(i\alpha x)$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  c'est à dire montrer que  $\mathbb{E}(\exp(i\alpha X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(\exp(i\alpha X))$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On rappelle que si  $X$  est gaussien de variance  $\sigma$  alors

$$\mathbb{E}(\exp(i\alpha X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2 - i\alpha x} dx = e^{-\sigma^2\alpha^2/2}.$$

Intéressons nous maintenant à la somme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(i\alpha S_{t_{j+1}}^{(n)} - S_{t_j}^{(n)})) &= \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=\lfloor nt_j \rfloor + 1}^{\lfloor nt_{j+1} \rfloor} X_l)) \\ &= \prod_{l=\lfloor nt_j \rfloor + 1}^{\lfloor nt_{j+1} \rfloor} \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_l)) \\ &= \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_1))^{\lfloor nt_{j+1} \rfloor - \lfloor nt_j \rfloor} \end{aligned}$$

où on a utiliser l'indépendance des  $X_l$  à la deuxième ligne et qu'il était tous de même loi à la dernière ligne. De plus pour  $n$  grand on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_i)) &= \mathbb{E}(1 + (i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_i) + \frac{1}{2}(i\alpha \frac{1}{\sqrt{n}} X_i)^2 + o(\frac{1}{n})) \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2n} + o(1) \end{aligned}$$

car  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\mathbb{E}(X^2) = 1$  et pour finir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(i\alpha S_{t_{j+1}}^{(n)} - S_{t_j}^{(n)})) &= (1 - \frac{\alpha^2}{2n} + o(1))^{n(t_{j+1} - t_j)} \\ &\rightarrow \exp(-\alpha^2(t_{j+1} - t_j)/2). \end{aligned}$$

qui est la loi gaussienne de variance  $\sigma^2 = (t_{j+1} - t_j)$ . □

### 6.3 Définition et propriétés élémentaires du mouvement brownien.

**Définition 6.3.1.** On dit que  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un mouvement brownien si

1. Pour tout  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ,  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$  sont variables gaussiennes indépendantes de variance respectivement  $\mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) = t_i - t_{i-1}$ ,
2. Pour tout  $\omega \in \Omega$   $t \rightarrow B_t(\omega)$  soit continue.

Il découle immédiatement de la proposition que

1.  $B_0 = 0$ .
2. Pour tout  $t$ ,  $B_t$  est une variable gaussienne centré de variance  $t$ .

Il est cependant possible de poser  $M_t = x + B_t$  on dira alors que  $M_t$  est un mouvement brownien issue de  $x$ .

*Remarque 6.3.2.* Attention on considère ici un nombre non dénombrable de variables aléatoires. C'est en générale une très mauvaise idée car la théorie des probabilités a été construite pour manipuler seulement un nombre dénombrables d'objets en même temps. Rappelez vous la définition d'une tribu ( $\sigma$ -algèbre) et d'une mesure. Prendre l'intersection (ou l'union)  $\cap_{t \in \mathbb{R}} A_t$  crée à priori un ensemble non mesurable. Ici on est sauvé par la continuité du mouvement brownien. En effet connaitre  $B_t$  pour  $t \in \mathbb{Q}$  alors par continuité c'est connaitre  $B_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{F}_t = \sigma((B_s)_{s \leq t})$  et  $\mathcal{F}_\infty = \sigma((B_s)_{s \geq 0})$

**Exemple 6.3.3.** Considérons  $A = \{\exists t \in [0, 1] : B_t > 1\}$ . En écrivant naïvement  $A = \cup_{t \in [0, 1]} \{B_t > 1\}$  on ne peut pas déduire que  $A \in \mathcal{F}_1$ . Cependant si il existe  $t B_t > 1$ , alors pour  $t_n \rightarrow t$  on a  $B_{t_n} > 1$  à partir d'un certain  $n$ . En choisissant notre suite  $t_n \in \mathbb{Q}$  alors il existe  $t' \in \mathbb{Q}$   $B_{t'} > 1$  et donc

$$A = \cup_{t' \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \{B_{t'} > 1\}$$

qui est l'union dénombrable d'ensemble  $\mathcal{F}_1$  mesurable donc  $\mathcal{F}_1$  mesurable.

*Remarque 6.3.4.* On parle aussi de « Mesure de Wiener » sur l'espace des fonctions continues munie de la tribu borelienne associée à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Il s'agit de la mesure  $\mu$  sur

$$\mu(A) = \mathbb{P}((B_t)_{t \in [0, 1]} \in A).$$

**Proposition 6.3.5.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. Alors

1.  $-B_t$  est un mouvement brownien,
2. Pour tout  $\gamma > 0$ ,  $B_t^\gamma := \frac{1}{\gamma} B_{\gamma^2 t}$  est un mouvement brownien. (changement d'échelle)
3. Pour tout  $s > 0$ ,  $B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s$  est un mouvement brownien. Indépendant de  $\mathcal{F}_s$  (Markov simple)

*Démonstration.* Cela découle directement de la définition du mouvement brownien

1. (exo).

2. Puisque  $B_t$  est continue  $t \rightarrow \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t}$  est bien continue. Soit  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , on considère les  $(B_{t_{i+1}}^\gamma - B_{t_i}^\gamma) = \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t_{i+1}} - \frac{1}{\gamma}B_{\gamma^2 t_i} = \frac{1}{\gamma}(B_{\gamma^2 t_{i+1}} - B_{\gamma^2 t_i})$ . Par la propriété du mouvement brownien  $B$  pour  $\gamma^2 t_i < \gamma^2 t_2 < \dots < \gamma^2 t_{i+1}$  sont des gaussiennes indépendantes et de variance  $\gamma^2(t_{i+1} - t_i)$  et donc  $\frac{1}{\gamma}(B_{\gamma^2 t_{i+1}} - B_{\gamma^2 t_i})$  est de variance  $(t_{i+1} - t_i)$  (Donc  $B^\gamma$  est un mouvement brownien.)
3. Puisque  $B_t$  est continue  $B_{t+s} - B_s$  est bien continue. Soit  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , on considère  $(B_{t_{i+1}}^{(s)} - B_{t_i}^{(s)}) = (B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s})$ . Par propriété du mouvement brownien  $B$  pour les temps  $t_1 + s < t_2 + s < \dots$ . On a  $(B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s})$  sont des variables gaussiennes indépendantes et de variance  $t_{i+1} + s - (t_i + s) = t_{i+1} - t_i$ .

□

**Proposition 6.3.6.** (*Loi du tout ou rien*)

On définit

$$\mathcal{F}_{0^+} := \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s.$$

La tribue  $\mathcal{F}_{0^+}$  est grossière ie pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}_{0^+}$ ,  $\mathbb{P}(A) = 0$  soit 1.

Cette proposition peut sembler un peu abstraite mais on peut la comprendre ainsi : Les accroissements du mouvement brownien sont indépendants. Aussi, en connaissant le mouvement brownien proche de  $t = 0$ , on ne peut pas prédire quoi que ce soit sur son évolution. À la limite  $t \rightarrow 0^+$ , on ne dispose de fait d'aucune information sur le processus.

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{F}_{0^+}$ . On utilise un fait général de la théorie de la mesure : Pour toute fonction  $f$ ,  $\mathcal{F}_\infty$  mesurable (bornée), on peut trouver  $t_1 < t_2 \dots < t_k$  et  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  continue borné tel que  $F(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})$  approxime  $f$ . Dans la suite on ne considère que des fonctions de cette forme ci. Calculons

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})).$$

Puisque  $F$  est continue,  $B_t$  est continue et  $B_0 = 0$

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(1_A F(B_{t_1} - B_\epsilon, B_{t_2} - B_\epsilon, \dots, B_{t_k} - B_\epsilon)).$$

De plus  $A \in \mathcal{F}_\epsilon$  pour tout  $\epsilon > 0$  donc

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1} - B_\epsilon, B_{t_2} - B_\epsilon, \dots, B_{t_k} - B_\epsilon)) = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}(F(B_{t_1} - B_\epsilon, B_{t_2} - B_\epsilon, \dots, B_{t_k} - B_\epsilon))$$

car les accroissements sont indépendants de  $\mathcal{F}_\epsilon$ . À la limite on obtient

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})) = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}(F(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})).$$

On en déduit que  $\mathcal{F}_{0^+}$  et  $\sigma((B_t)_{t \geq 0})$  sont des tribus indépendantes. Or pour tout  $s$   $\mathcal{F}_s \subset \sigma((B_t)_{t \geq 0})$  et donc  $\mathcal{F}_{0^+} \subset \sigma((B_t)_{t \geq 0})$  soit  $\mathcal{F}_{0^+}$  est indépendante avec elle même et donc elle est grossière :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$  et donc  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou 1. □

Voici quelques affirmations que l'on peut déduire de cette loi du tout ou rien.

**Proposition 6.3.7.** Soit  $\delta > 0$

1.  $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s < \delta} B_s > 0) = 1$  et  $\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s < \delta} B_s < 0) = 1$
2.  $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s} B_s = +\infty) = 1$  et  $\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s} B_s = -\infty) = 1$

*Démonstration.* Soit  $\epsilon < \delta$ .

$$A = \bigcap_{\epsilon > 0} \left\{ \sup_{t \leq \epsilon} B_t > 0 \right\}$$

On remarque que  $A \in \mathcal{F}_{0+}$ . Soit  $s > 0$  alors pour  $\epsilon < s$  on a  $\left\{ \sup_{t \leq \epsilon} B_t > 0 \right\} = \bigcup_{t \in [0, \epsilon] \cap \mathbb{Q}} \{B_t > 0\} \in \mathcal{F}_s$ . Donc  $A \in \mathcal{F}_s$  et donc  $A \in \mathcal{F}_{0+}$ . Par la loi du tout ou rien on a  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $1$ . On a

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \leq \epsilon} B_t > 0 \right\}$$

mais puisque  $\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \leq \epsilon} B_t > 0 \right\} \geq \mathbb{P}\{B_\epsilon > 0\} = 1/2$ . On en déduit  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Puisque  $-B_t$  est aussi un mouvement brownien on a également

$$\mathbb{P}\left( \sup_{0 \leq s < \delta} -B_s > 0 \right) = 1 = \mathbb{P}\left( \inf_{0 \leq s < \delta} B_s < 0 \right) = 1.$$

2 : Soit  $C > 0$  montrer  $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s} B_s > C) = 1$ . Soit  $\gamma > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_s > C\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_s^\gamma > C\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_{\gamma^2 s} > \gamma C\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_s > \gamma C\right)$$

Donc en particulier

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_s > C\right) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_s > \gamma C\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s} B_s > 0\right) = 1.$$

Et on conclue le dernier point comme précédemment en utilisant que  $-B_s$  est un mouvement brownien.  $\square$

## 6.4 Propriété de Markov forte.

**Définition 6.4.1.** Temps d'arrêt  $T$  est un temps d'arrêt ssi  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Exercice 6.4.2.** Montrer que  $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Exemple 6.4.3.**  $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$  est un temps d'arrêt. En effet

$$\{T_a < t\} = \{\exists s \leq t : B_s = a\} = \left\{ \inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} |B_s - a| = 0 \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Comme pour les modèle à temps discret on définit la tribu associé au temps d'arrêt.

**Définition 6.4.4.** Tribu du temps d'arrêt  $T$ .  $A \in \mathcal{F}_T$  ssi  $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Théorème 6.4.5.** *Propriété de Markov forte : Soit  $T$  un temps d'arrêt fini presque sûrement alors*

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien. De plus  $B_t^{(T)}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_T$ .

*Démonstration.* On a immédiatement que  $B_t^{(T)}$  est continue.

Soit  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et soit  $A \in \mathcal{F}_T$ . On veut montrer que

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_n}^{(T)})) = \mathbb{E}(1_A) \mathbb{E}(F(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) \quad (6.1)$$

on obtiendra ainsi que  $B^{(T)}$  a la même loi que  $B$  et l'indépendance avec  $\mathcal{F}_T$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}$ , on a

$$B_t^{(T)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} 1_{\frac{k}{2^m} \leq T < \frac{k+1}{2^m}} (B_{T+t} - B_T)$$

on approxime  $B_t^{(T)}$  de la manière suivante

$$B_t^{(T,m)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} 1_{\frac{k}{2^m} \leq T < \frac{k+1}{2^m}} (B_{\frac{k+1}{2^m}+t} - B_{\frac{k+1}{2^m}}).$$

On a bien  $B_t^{(T,m)} \rightarrow B_t^{(T)}$  pour  $m \rightarrow \infty$  car le mouvement brownien est continu.

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T,m)}, \dots, B_{t_n}^{(T,m)})) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(1_A 1_{\frac{k}{2^m} \leq T < \frac{k+1}{2^m}} F((B_{\frac{k+1}{2^m}+t_1} - B_{\frac{k+1}{2^m}}), \dots, (B_{\frac{k+1}{2^m}+t_n} - B_{\frac{k+1}{2^m}}))).$$

Puisque  $A \in \mathcal{F}_T$ ,  $A \cap \{T < \frac{k+1}{2^m}\}$  est  $\mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}}$  mesurable et donc  $1_A 1_{\frac{k}{2^m} \leq T < \frac{k+1}{2^m}}$  est  $\mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}}$  mesurable. Par propriété de Markov simple :  $B_{\frac{k+1}{2^m}+t_1} - B_{\frac{k+1}{2^m}}$  est un mouvement brownien et est indépendant de  $\mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}}$ .

$$\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T,m)}, \dots, B_{t_n}^{(T,m)})) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(1_A 1_{\frac{k}{2^m} \leq T < \frac{k+1}{2^m}}) \mathbb{E}(F((B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \mathbb{E}(1_A) \mathbb{E}(F((B_{t_1}, \dots, B_{t_n}))).$$

Enfin lorsque  $m \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T,m)}, \dots, B_{t_n}^{(T,m)})) \rightarrow \mathbb{E}(1_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_n}^{(T)}))$  par continuité et on peut donc conclure (6.1).  $\square$

## 6.5 Feuille d'exercice 6 : Martingale et mouvement brownien

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 6.5.1.** On considère une boîte  $B = [-3, 3] \times [-3, 3] \cap \mathbb{Z}^2$  et son bord

$$\partial B = [(x, y) \in \mathbb{Z}^2/B, \exists(x', y') \in B : |(x, y) - (x', y')| = 1]$$

On définit sur  $\partial B$  la fonction  $g$  :

$$g(x, y) = \begin{cases} 4 & (x, y) \in \{4\} \times [-3, 3] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère le problème de Dirichlet (discret) sur  $B$  dont la valeur au bord est donné par  $g$  :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in B, \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial B \end{cases}$$

où

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{|(x', y') - (x, y)| = 1} u(x', y') - u(x, y).$$

Alors

- La marche aléatoire standard sur  $\mathbb{Z}^2$  issue de  $(0, 0)$  touche  $\partial B$  p.s.
- $\|u\|_{L^\infty} \leq 4$ .
- $u(0, 0) = 1$ .
- $u(x, y) := \frac{1}{2}(x + 4)$  est une solution.

**Exercice 6.5.2.** Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires telles que pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X + \beta Y}) = e^{2\alpha + \alpha^4 + \beta^2}$$

- $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- $\mathbb{E}(X) = 2$ .
- $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ .
- $Y$  est une gaussienne.

**Exercice 6.5.3.** Soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  des variables gaussiennes iid avec  $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$  et  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

- Pour tout  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ ,  $(S_{k_1}, \dots, S_{k_m})$  est un vecteur gaussien.
- $(S_{17} - S_5)$  et  $(S_{12} - S_9)$  sont indépendants.
- $\sum_{i=1}^m S_i$  est une variable gaussienne centré de variance  $\sigma^2 = m^3$ .
- $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$  converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice 6.5.4.** Soit  $(\xi_i)_{i \geq 0}$  des variables aléatoires Bernoulli iid  $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$  et  $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . Et on pose  $S_0 = \frac{1}{2}$  et  $S_{n+1} = S_n + \text{signe}(S_n)\xi_{n+1}$  où  $\text{signe}(S_n) = 1$  si  $S_n \geq 0$  et  $-1$  si  $S_n < 0$ .

- On a  $S_n = |\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i|$ .
- $S_n$  est une chaîne de Markov.
- Pour tout  $n_1 < n_2$ ,  $S_{n_1}$  et  $S_{n_2} - S_{n_1}$  sont indépendantes.

- En écrivant  $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]}$ , alors pour tout  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$   
 $(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \dots, S_{t_k}^{(n)})$  converge en loi lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers  $(U_{t_1}, U_{t_2}, \dots, U_{t_k})$   
où  $(U_{t_{i+1}} - U_{t_i})$  sont des gaussiennes de variance  $t_{i+1} - t_i$ .

## Chapitre 7

# Construction du Mouvement Brownien

Dans cette section, nous donnons une construction du mouvement brownien avec des fonctions triangulaire sur  $[0, 1]$  et des variables gaussiennes indépendantes.

### 7.1 Espace Gaussien

Le mouvement brownien contient implicitement une infinité de variables gaussiennes. La bonne notion pour aborder cela est ce que l'on appelle un espace gaussien qui peut être vu comme la généralisation des vecteurs gaussien en dimension infini. On aura besoin pour cela d'un espace de Hilberts, par exemple  $(L^2(\Omega, \mu))$ . Quelques rappels :

**Définition 7.1.1.** On appelle un système orthonormé (base orthonormé) une famille  $(\eta_i)_{i \in I} \in H^I$  tel que

1.  $\|\eta_i\| = 1$
2.  $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$
3. Pour tout  $f \in H$ ,  $\sum_{i \in I} \langle \eta_i, f \rangle \eta_i$ .

Quelque soit espace de Hilbert séparable  $H$ , il existe une telle base. Cette base est très pratique par exemple on a

$$\langle f, g \rangle = \sum_i \langle \eta_i, f \rangle \langle \eta_i, g \rangle.$$

En effet

$$\left\langle \sum_i \langle \eta_i, f \rangle \eta_i, \sum_j \langle \eta_j, g \rangle \eta_j \right\rangle = \sum_i \langle \eta_i, f \rangle \sum_j \langle \eta_i, g \rangle \langle \eta_i, \eta_j \rangle = \sum_i \langle \eta_i, f \rangle \langle \eta_i, g \rangle$$

car  $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ . En particulier

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_i |\langle \eta_i, f \rangle|^2.$$

**Définition 7.1.2.** Soit un ensemble de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  engendré par un ensemble dénombrable de variables gaussiennes iid  $\mathcal{N}_i$  centrées de variance 1. L'espace gaussien  $E$  est le sous espace linéaire fermé dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$  engendré par les  $\mathcal{N}_i$ . On appelle *mesure gaussienne* l'application  $\beta : H \rightarrow E$  définie par

$$\beta(f) = \sum_i \langle f, \eta_i \rangle \mathcal{N}_i.$$

**Exemple 7.1.3.** (Élémentaire) Si  $H = \mathbb{R}^2$  avec la base orthogonale  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $X, Y$  deux variables gaussiennes iid, on a  $E = \{aX + bY : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  et pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$   $\beta((a, b)) = aX + bY$ .

Voici quelques propriétés de la mesure gaussienne :

1. Pour tout  $f$ ,  $\beta(f)$  est une variable gaussienne centrée.
2. Pour tout  $f$ ,  $\mathbb{E}(\beta(f)^2) = \|f\|^2$ . En effet

$$\mathbb{E}(\beta(f)^2) = \mathbb{E}(\left(\sum_i \langle f, \eta_i \rangle \mathcal{N}_i\right)^2) = \sum_i \langle f, \eta_i \rangle^2 \mathbb{E}((\mathcal{N}_i)^2) = \sum_i \langle f, \eta_i \rangle^2 = \|f\|^2$$

car les  $\mathcal{N}_i$  sont indépendantes et de variance 1.

3. Pour tout  $f, g \in H$ ,  $\mathbb{E}(\beta(g)\beta(f)) = \langle f, g \rangle$ . En effet

$$\mathbb{E}(\beta(f)\beta(g)) = \sum_{i,j} \langle f, \eta_i \rangle \langle g, \eta_j \rangle \mathbb{E}((\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j)) = \sum_i \langle f, \eta_i \rangle \langle g, \eta_i \rangle = \langle f, g \rangle$$

car les  $\mathcal{N}_i$  sont indépendantes et de variance 1.

4. Pour tout  $f, g \in H$   $\beta(f)$  et  $\beta(g)$  sont indépendants  $\Leftrightarrow f$  et  $g$  sont orthogonaux.

En effet par la propriété précédente :  $\langle f, g \rangle = 0$  ssi  $\mathbb{E}(\beta(g)\beta(f)) = 0$ . On utilise alors propriété des vecteurs gaussiens : la covariance nulle est équivalente à l'indépendance.

## 7.2 Construction du mouvement brownien sur $[0, 1]$ .

Soit  $H = L^2([0, 1])$  et on introduit le système orthonormé  $(1, (h_i^n)_{i,n})$  où

$$(h_i^n)_{i < 2^n} := 2^{\frac{n}{2}} \left( 1_{\left[\frac{2i}{2^{n+1}}, \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right]} - 1_{\left[\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{2i+2}{2^{n+1}}\right]} \right)$$

pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq i < 2^n$ . On définit alors

$$g_i^n(t) = \int_0^t h_i^n(s) ds = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}(t - \frac{2i}{2^{n+1}}) & \text{si } t \in [\frac{2i}{2^{n+1}}, \frac{2i+1}{2^{n+1}}] \\ 2^{\frac{n}{2}}(\frac{2i+2}{2^{n+1}} - t) & \text{si } t \in [\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{2i+2}{2^{n+1}}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose

$$B_t := t\mathcal{N}_{-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \leq 2^n} g_i^n(t) \mathcal{N}_{n,i} \quad (7.1)$$

où  $\mathcal{N}_{-1}$  et les  $\mathcal{N}_{n,i}$  sont des gaussiennes iid de variance 1.

**Théorème 7.2.1.** *Le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  défini par (7.1) est un mouvement brownien.*

*Démonstration.* Tout d'abord montrons qu'il a la même loi. On remarque que  $g_i^n(t) = \langle 1_{[0,t]}, h_i^n \rangle$  et on peut donc écrire

$$B_t = \langle 1_{[0,t]}, 1 \rangle \mathcal{N}_{-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \leq 2^n} \langle 1_{[0,t]}, h_i^n \rangle \mathcal{N}_{n,i}.$$

Conclusion on a

$$B_t = \beta(1_{[0,t]})$$

où  $\beta$  est la mesure gaussienne définie sur  $L^2([0, 1])$ . Soit  $0 < t_1 < \dots < t_n$ . Pour tout  $i < n$  on a

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} = \beta(1_{[0,t_{i+1}]} - 1_{[0,t_i]}) = \beta(1_{[t_i,t_{i+1}]})$$

On en déduit alors que

1. Pour tout  $i$ ,  $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  est une variable gaussienne.
2. Les  $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  sont indépendantes car  $\langle 1_{[t_i,t_{i+1}]}, 1_{[t_j,t_{j+1}]} \rangle = 0$  si  $i \neq j$ .  
En effet les supports des  $1_{[t_i,t_{i+1}]}$  sont disjoints.
3.  $\mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \|1_{[t_i,t_{i+1}]}\|^2 = t_{i+1} - t_i$ .

Montrons maintenant la continuité. On écrit

$$G_n(t) := \sum_{i \leq 2^n} g_i^n(t) \mathcal{N}_{n,i}$$

soit

$$B_t := t\mathcal{N}_{-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} G_n(t).$$

On va montrer la convergence  $L^\infty$  de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} G_n(t)$ . Puisque la limite  $L^\infty$  de fonction continue est une fonction continue, cela nous permettra de conclure.

Calculons

$$\|G_n\|_{L^\infty} = \sup_{i \leq 2^{n-1}} |\mathcal{N}_{n,i}| \times \|g_i^n\|_{L^\infty} = \sup_{i \leq 2^{n-1}} |\mathcal{N}_{n,i}| \times 2^{\frac{n}{2}} \left( \frac{2i+1}{2^{n+1}} - \frac{2i}{2^{n+1}} \right) = \sup_{i \leq 2^{n-1}} |\mathcal{N}_{n,i}| \times \frac{1}{2^{n/2+1}}$$

**Lemme 7.2.2.** *Si  $\mathcal{N}$  est une variable gaussienne centré de variance 1 alors*

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}| \geq a) \leq \exp(-a^2/2)$$

On admettra ce Lemme dont la preuve est un simple calcul. Montrons alors que, avec une probabilité proche de 1,  $\|G_n\|_{L^\infty}$  ne peut pas être très grand.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|G_n\|_{L^\infty} \geq 2^{-(n/4)}) &\leq \mathbb{P}(\sup_{i \leq 2^n - 1} |\mathcal{N}_{n,i}| \geq 2^{n/4}) \\ &= \mathbb{P}(\exists i \leq 2^n - 1 : |\mathcal{N}_{n,i}| \geq 2^{n/4}) \\ &\leq 2^n \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{n,i}| \geq 2^{n/4}) \\ &\leq 2^n \exp(-2^{n/2}/2) \\ &\leq 2^n \times \frac{1}{4^n} \\ &\leq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_n \mathbb{P}(\|G_n\|_{L^\infty} \geq 2^{-(n/4)}) < \infty$$

Par le lemme de Borel Cantelli, p.s il existe un nombre fini de  $n$  tel que  $\|G_n\|_{L^\infty} \geq 2^{-(n/4)}$ . Conclusion p.s il existe  $C > 0$

$$\sum \|G_n\|_{L^\infty} < C + \sum_n 2^{-(n/4)} < \infty.$$

Conclusion  $t\mathcal{N}_{-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} G_n(t) \rightarrow B_t$  dans  $L^\infty$  p.s et donc  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  est continue p.s.  $\square$

### 7.3 Fonction harmonique, mouvement brownien et problème de Dirichlet.

**Définition 7.3.1.** (Mouvement Brownien en toute dimension).

Soient  $(B_t^{(1)}), \dots, (B_t^{(d)})$  des mouvement brownien indépendant et on pose

$$B_t = \begin{pmatrix} B_t^{(1)} \\ \vdots \\ B_t^{(d)} \end{pmatrix}$$

qui est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition 7.3.2.** *Pour  $(B_t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ , ceci est équivalent à*

1.  $B_t$  est continue

2. Pour tout  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  les  $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  sont indépendants
3.  $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  sont des vecteur gaussien (dans  $\mathbb{R}^d$ ), de covariance  $C_{ab} =$
- $$\mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_a (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})_b) = \begin{cases} t_{i+1} - t_i & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \quad C = (t_{i+1} - t_i)I_d$$
- où  $I_d$  est la matrice identité.

**Proposition 7.3.3.** *Le mouvement brownien est isotrope : c'est à dire pour  $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$  (le groupe orthogonal sur  $\mathbb{R}^d$ ) et  $B_t$  un mouvement brownien en dimension  $d$  alors  $(AB_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien en dimension  $d$ .*

*Démonstration.* On a

1. Continuité oui  $AB_t$  est continue,
2. Incrément indépendant  $AB_{t_{i+1}} - AB_{t_i} = A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ ,
3. Combinaison linéaire d'un vecteur gaussien est un vecteur gaussien. La matrice de covariance

$$\tilde{C}_{ab} = \mathbb{E}((A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))_a (A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))_b)$$

on a

$$\tilde{C} = \mathbb{E}(A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))(A(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^T) = A\mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^T)A^T = (t_{i+1} - t_i)AA^T = (t_{i+1} - t_i)I_d$$

□

**Corollaire 7.3.4.** *Soit  $r > 0$ ,  $T = \inf\{t : \|B_t\| \geq r\} = \inf\{t : B_t \in S_r^{d-1}(0)\}$ . Alors la loi de  $B_T$  est la loi uniform sur  $S_r^{d-1}$ .*

*Démonstration.* La loi uniforme sur la sphère est l'unique mesure de proba sur  $S_r^{d-1}$  qui soit invariante par rotation (par l'action de  $\mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ ). On peut conclure avec la proposition précédente. □

## 7.4 Problème de Dirichlet et fonction harmonique.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert. On note  $\Delta$  le Laplacien : Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ,  $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$ .

**Définition 7.4.1.** (definition classique) Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est harmonique si  $\Delta f = 0$ .

**Définition 7.4.2.** (definition via la moyenne) Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est harmonique si pour tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $r > 0$  tel que  $B_r(x) \subset \Omega$

$$f(x) = \int_{S_r(x)} f(y) \mu_{S_r(x)}(dy)$$

où  $\mu_{S_r(x)}$  est la mesure uniforme sur  $S_r(x)$ .

Remarque 7.4.3. (def moyenne) $\Rightarrow$ (def classique).

Démonstration. Soit  $f$  qui est harmonique pour la moyenne, montrons que  $\Delta f = 0$ . On suppose  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

Soit  $x \in \Omega$ .

$$f(y) = f(x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f|_x \cdot (y-x)_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i x_j} f|_x (y-x)_j (y-x)_i + o(\|y-x\|^2) \quad (7.2)$$

□

$$f(x) = \int_{S_r(x)} f(x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f|_x \cdot (y-x)_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x_i x_j} f|_x (y-x)_j (y-x)_i + o(\|y-x\|^2) \mu_{S_r(x)}(dy)$$

On a  $\int_{S_r(x)} f(x) d\mu(dy) = f(x)$  car  $\mu$  est une mesure de proba et  $\int_{S_r(x)} o(\|y-x\|^2) d\mu = o(r^2)$ . Ensuite

$$\int_{S_r(x)} (y-x)_i \mu(dy) = \int_{S_r(0)} y_i \mu(dy) = 0$$

car  $y_i$  est antisymétrique. De même si  $i \neq j$

$$\int_{S_r(x)} (y-x)_j (y-x)_i \mu(dy) = \int_{S_r(0)} y_i y_j \mu(dy) = 0$$

encore une fois par antisymétrie de  $y_i y_j$ . Il reste le cas  $i = j$ . Par simétrie entre les indices on a

$$\int_{S_r(x)} y_i^2 \mu(dy) = \frac{1}{d} \sum_i \int_{S_r(x)} y_i^2 \mu(dy) = \frac{r^2}{d}.$$

L'équation (7.2) devient alors

$$f(x) = f(x) + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{r^2}{d} \times \partial_{x_i x_i} f|_x + o(r^2)$$

soit

$$0 = \frac{r^2}{2d} \times \sum \partial_{x_i x_i} f|_x + o(r^2).$$

On peut donc conclure  $\Delta f = \sum \partial_{x_i x_i} f = 0$ .

**Définition 7.4.4.** (Problème de Dirichlet.) Soit  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On dit que  $h$  est une solution du problème de Dirichlet si

1.  $h$  est harmonique sur  $\Omega$ ,
2. Pour tout  $x \in \partial\Omega$   $\lim_{y \rightarrow x} h(y) = g(x)$ .

**Théorème 7.4.5.** *Supposons  $\Omega$  borné et «sympa». Soit  $B_t$  un mouvement brownien. On note  $\mathbb{E}_x$  pour la loi du mouvement brownien issue de  $x$  (ie :  $W_t = x + B_t$ ).*

*Soit  $T = \inf\{t : W_t \in \partial\Omega\}$ . On pose*

$$h(x) = \mathbb{E}_x(g(W_T))$$

*alors  $h$  est solution au problème de Dirichlet. De plus elle est unique.*

On ne définira pas ce que «sympa» veut dire, les conditions optimales pour que ce théorème soit valide sont loin d'être élémentaire. Cependant on pourra supposer ici que  $\partial\Omega$  est lisse.

*Démonstration.* Montrons que  $h$  est harmonique : Soit  $x \in \Omega$ , et  $r > 0$  tel que  $B_r^d(x) \subset \Omega$ .  $S = \inf\{t : W_t \in S_r(x)\}$ .  $B_r^d(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$   
 $S_r^{d-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| = r\}$

On a  $S < \infty$  p.s. On a toujours  $S < T$  car le mouvement brownien doit sortir de la sphère pour toucher  $\partial\Omega$ .

$$h(x) = \mathbb{E}_x(g(W_T)) = \mathbb{E}_x(g(W_T - W_S + W_S))$$

On sait que  $W_{t+S} - W_S$  est un mouvement brownien par la propriété de Markov forte.  $\tilde{W}_t = W_{t+S} - W_S + W_S$  c'est un mouvement brownien issue de  $W_S$ .

$$\tilde{T} = T - S = \inf\{t \geq 0 : W_{t+S} - W_S + W_S \in \partial\Omega\}.$$

$$h(x) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{W_S}(g(\tilde{W}_{\tilde{T}}))) = \mathbb{E}_x(h(W_S))$$

Puisque la loi de  $W_S$  est la loi uniforme sur  $S_r^{d-1}(x)$  on

$$h(x) = \int_{S_r^{d-1}(x)} h(y)\mu(dy)$$

et donc  $h$  est harmonique.

**Lemme 7.4.6.** *Soit  $x_0 \in \partial\Omega$ . Si  $\Omega$  est «sympa» alors pour tout  $\delta > 0$  la probabilité que le mouvement brownien issue de  $x$  sorte de  $\Omega$  sur l'intervalle de temps  $[0, \delta]$  tends vers 1 lorsque  $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ .*

*Démonstration.* Idée de la preuve. On suppose ici que le bord de  $\Omega$  est régulier, alors quitte à appliquer une translation et une rotation on peut supposé que  $x_0 = 0$  et le vecteur normale à la surface de  $\Omega$  en  $x_0$  est égale à  $\vec{n} = (1, 0, \dots, 0)$ . Alors  $\mathbb{P}(\exists t \in [0, \delta] : (x + W_t)_1 \leq 0) = \mathbb{P}(\exists t \in [0, \delta] : W_t^{(1)} \leq -x_1) \rightarrow \mathbb{P}(\inf_{t \leq \delta} W_t^{(1)} < 0) = 1$  lorsque  $x \rightarrow x_0$   $\square$

Alors on a  $T \rightarrow 0$ . Par continuité de  $W$ ,  $W_T$  est dans un petit voisinage de  $x$  et de  $x_0$ . Enfin puisque  $g$  est continue  $g(W_T) \rightarrow g(x_0)$  et on peut conclure

$$\mathbb{E}_x(g(W_T)) \rightarrow g(x_0).$$

$\square$

## 7.5 Feuille d'exercice 7 : Martingale et mouvement brownien

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 7.5.1.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien.

- $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$ .
- $(2B_1 - B_2, B_1 + B_3, B_2 - B_3)$  est un vecteur gaussien
- $\int_0^1 B_s ds$  est une variable gaussienne de variance 1.
- $B_s - sB_1$  et  $B_1$  sont indépendants.

**Exercice 7.5.2.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien.

- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ .
- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,A]} B_t > AM) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)$ .
- $\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty) = 1$ .
- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M, \sup_{t \in [1,2]} B_t > M + B_1) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)^2$

**Exercice 7.5.3.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien. Soit  $T = \inf\{t \geq 1, B_t = 0\}$ .

- Pour tout  $\delta > 0$ , p.s. il existe  $0 < t_1, t_2 < \delta$  tel que  $B_{t_1} > 0$  et  $B_{t_2} < 0$ .
- Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_t = 0) = 1$ .
- Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists t < \delta, B_{T+t} = 0) = 1$ .
- Pour tout  $\delta > 0$ , p.s pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $B_t = 0$ , il existe  $t < t' < t + \delta$  tel que  $B_{t'} = 0$ .

**Exercice 7.5.4.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ,  $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  deux mouvements browniens indépendant. On définit le processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  par  $W_0 = 0$  et  $W_t = tB_{1/t}$ .

- $\hat{B}_t := B_{1-t} - B_1$  a la même loi qu'un mouvement brownien sur  $[0, 1]$ .
- $\frac{1}{2}(B_t + \tilde{B}_t)$  est un mouvement brownien.
- $\mathbb{E}(W_s W_t) = s \wedge t$ ,
- $W_t$  converge en proba vers 0 pour  $t \rightarrow 0$ .

## 7.6 Feuille d'exercice 8, Martingale et mouvement brownien

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 7.6.1.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien. Pour tout  $u \geq 0$  on note  $T_u = \inf\{t : B_t = u\}$

- Soit  $0 < a < b$ ,  $T_a$  et  $T_b - T_a$  sont indépendants.
- Pour tout  $a > 0$  et  $t > 0$ ,  $\mathbb{P}(T_a < t) = \mathbb{P}(T_1 \leq \frac{t}{a^2}) = \mathbb{P}(T_{\frac{a}{\sqrt{t}}} \leq 1)$ .
- Pour tout  $s < t$ ,  $\mathbb{P}(T_1 \in [s, t]) = 2(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_1^\infty e^{-x^2/2s} dx)$

—  $\mathbb{E}(T_1) < \infty$ .

**Exercice 7.6.2.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien,  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$  et  $W_t = tB_{1/t}$ .

- Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, M]} B_t > \epsilon M) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ .
- $W_t$  est un mouvement brownien.
- Soit  $a > 0$ , pour tout  $t > 0$   $\mathbb{P}(\forall s > t : B_s < as) = \mathbb{P}(T_a > \frac{1}{t})$
- Pour tout  $A > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists s \in (0, \delta) : B_s > As^{1/2}) = 1$ .

**Exercice 7.6.3.** (Pont Brownien) Soit  $(P_t)_{t \in [0, 1]}$  un pont brownien. C'est à dire qu'il a la même loi qu'un mouvement brownien  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  conditionnellement à  $B_1 = 0$ .

- $(P_t)_{t \in [0, 1]}$  a la même loi que  $(P_{1-t})_{t \in [0, 1]}$  (symmétrie).
- Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ ,  $(P_{t_1}, \dots, P_{t_n})$  est un vecteur gaussien.
- $P_{1/2}$  est une gaussienne de variance  $1/2$ .
- Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ ,  $(P_{t_{i+1}} - P_{t_i})$  sont indépendants.

**Exercice 7.6.4.** (Girsanov) Soit  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  un mouvement brownien,  $b \in \mathbb{R}$  et  $W_s = B_s + bs$  (mouvement brownien avec dérive). Soit  $X, Y$  deux variables gaussiennes avec  $\mathbb{E}(X) = 0$ ,  $\mathbb{E}(Y) = b$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}((Y - b)^2) = 1$

- Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  sont des gaussiennes indépendantes de variances  $t_{i+1} - t_i$ .
- $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{W_s}{s} = b$  p.s.
- Pour tout  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}(1_{Y \in A} e^{-bY + \frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{X \in A})$
- Pour tout  $U \subset \mathcal{C}([0, 1])$  (mesurable),  $\mathbb{E}(1_{W \in U} e^{-bW_1 + \frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{B \in U})$

Troisième partie

**Martingales Continues**

On considèrera des processus à temps continue  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . À la différence de processus discret  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il faut beaucoup travailler pour formaliser correctement ces objets et comprendre ce qui est «mesurable», «prévisible», intégrable... Dans toute la suite on considèrera essentiellement des processus à trajectoires continue qui simplifiront beaucoup ce formalisme et nous ne nous attarderons pas dessus. Si l'exemple de base pour les martingales continues est la somme de variables iid de moyenne nulle, l'exemple de base des martingales continues est sans aucun doute le mouvement brownien.

# Chapitre 8

## Quelques propriétés des martingales continues

### 8.1 Définitions et exemples

Ici on utilisera le mot « continue » dans les deux sens, ces processus seront aussi à trajectoire continue, c'est à dire que  $\forall \omega : t \rightarrow M_t(\omega)$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Formellement la définition d'une martingale continue est la même que celle d'une martingale discrète.

**Définition 8.1.1.** Soit  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité avec une filtration. On dit que  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une martingale (resp surmartingale/sousmartingale) si

1.  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable
2.  $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$
3. Pour  $s \leq t$   $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$  (resp  $\geq M_s$  ou  $\leq M_s$ )

*Remarque 8.1.2.* On a

1. On supposera toujours que  $(M_t)_{t \geq 0}$  est continue à droite (cad) c'est à dire pour tout  $t$

$$\lim_{s \rightarrow t^+} M_s = M_t.$$

2. Pour tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots$  si on pose  $N_n := M_{t_n}$  c'est une martingale discrète pour la filtration  $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$ .
3. Si on définit

$$M_t^{(n)} := M_{\lfloor \frac{2^n t \rfloor}{2^n}} \tag{8.1}$$

on a alors

$$M_t^{(n)} \rightarrow M_t$$

p.s lorsque  $n \rightarrow \infty$  par continuité à droite.

**Exemple 8.1.3.** Des martingales continue

1. Le mouvement brownien est une martingale continue :

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + B_s = B_s$$

car  $B_s$  est  $\mathcal{F}_s$  mesurable et  $B_t - B_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$  et de moyenne nulle.

2. Soit  $(Z_t)_{t \geq 0}$  un processus à accroissement indépendant. Pour  $t \geq s$ ,  $Z_t - Z_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$ .
  - (a)  $Z_t - \mathbb{E}(Z_t)$  est une martingale.
  - (b) Si  $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ , alors  $Z_t^2 - \mathbb{E}(Z_t^2)$  est une martingale.
  - (c) Le processus

$$\frac{e^{Z_t}}{\mathbb{E}(e^{Z_t})}$$

est une martingale (sous condition que les intégrales soient bien définis).

**Exemple 8.1.4.** On a en particulier

1.  $B_t^2 - t$  est une martingale
2.  $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$  est une martingale

*Démonstration.* Ce sont des cas particuliers de l'exemple précédent. On a en effet  $\mathbb{E}(B_t^2) = t$  et  $\mathbb{E}(e^{\gamma B_t}) = e^{\gamma^2 t/2}$ . □

## 8.2 Quelques propriétés

Pour les martingales discrètes on a montré les théorèmes suivant

- Convergence p.s
- Convergence  $L^p$
- Le nombre de monté de Doob,
- L'inégalité maximale de Doob
- Le théorème de l'arrêt.

Le but de cette partie du cours est de vérifier que ces propriétés restent valident lorsque l'on considère des martingales en temps continues. On peut commencer par « Jensen » :

**Proposition 8.2.1.** (*Jensen*) Si  $M_t$  est une martingale et  $f$  une fonction convexe alors  $f(M_t)$  est une sousmartingale.

Si  $M_t$  est une sousmartingale et  $f$  une fonction convexe et croissante alors  $f(M_t)$  est une sousmartingale.

*Démonstration.* (Même chose que pour le cas discret.) □

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , dans le cas discret il est évident que  $\max_{k \leq n} \mathbb{E}(|M_k|) < \infty$  puisque pour chacun des termes  $\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$ . Dans le cas continue c'est légèrement moins évident puisque l'on considère une infinité de terme. C'est le but de la proposition suivante

**Proposition 8.2.2.** *Soit  $M_t$  une martingale, alors pour tout  $t \geq 0$*

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}(|M_s|) < \infty$$

*Démonstration.* La fonction  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est convexe croissant. Donc  $f(M_t) = (M_t)^+$  est une sousmartingale. On a  $|M_s| = 2(M_s)^+ - M_s$

$$\mathbb{E}(|M_s|) = 2\mathbb{E}((M_s)^+) - \mathbb{E}(M_s) = 2\mathbb{E}((M_t)^+) - \mathbb{E}(M_0) < \infty$$

$$\text{car } \mathbb{E}(M_0) < \infty \text{ et } \mathbb{E}((M_t)^+) \leq \mathbb{E}(|M_t|) < \infty \quad \square$$

**Proposition 8.2.3.** *(Nombre de montés de Doob) Soient  $a < b$ , et  $(M_s)_{s \geq 0}$  une sousmartingale (cad) et soit*

$$N_t = \max\{n : \exists s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < t_n \leq t : \forall i \leq n : M_{s_i} < a \text{ et } M_{t_i} > b\}$$

*(le nombre de fois que  $M_s$  fait des aller retour entre  $a$  et  $b$ .) Alors*

$$(b-a)\mathbb{E}(N_t) \leq \mathbb{E}((M_t - a)^+) - \mathbb{E}((M_0 - a)^+).$$

*Démonstration.* On pose

$$M_t^{(n)} := M_{\lfloor \frac{2^n t \rfloor}{2^n}}$$

alors  $M_{\frac{k}{2^n}}^{(n)}$  est une martingale discrète. On note  $N_t^{(n)}$  le nombre de monté pour  $M_{\frac{k}{2^n}}^{(n)}$ . Donc on a

$$(b-a)\mathbb{E}(N_t^{(n)}) \leq \mathbb{E}((M_t^{(n)} - a)^+) - \mathbb{E}((M_0^{(n)} - a)^+) \leq \mathbb{E}((M_t - a)^+) - \mathbb{E}((M_0 - a)^+)$$

Remarque c'est  $N_t^{(n)}$  est croissante en  $n$  car

$$\left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N} \right\} \subset \left\{ \frac{k}{2^m} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

si  $m \geq n$ . De plus on a que

$$N_t^{(n)} \rightarrow N_t$$

p.s. En effet on a  $N_t^{(n)} \leq N_t$  car  $\left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}_+$ . Soit  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < t_p \leq t : \forall i \leq p : M_{s_i} < a$  et  $M_{t_i} > b$  alors puisque  $M_t$  est continue à droite il existe  $\epsilon$  tel que pour tout  $s \in [s_i, s_i + \epsilon]$   $M_s < a$  et  $t \in [t_i, t_i + \epsilon]$   $M_s > b$ . Il existe  $n$  tel que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$  donc il existe  $k_1 < q_1 < k_2 < q_2 \dots$  tel que  $\frac{k_i}{2^n} \in [s_i, s_i + \epsilon]$  et  $\frac{q_i}{2^n} \in [t_i, t_i + \epsilon]$  pour tout  $i \leq p$ . Conclusion

$$N_t^{(n)} \geq p$$

et donc  $N_t^{(n)} = N_t$  pour  $n$  suffisamment grand. Pour finir

$$\mathbb{E}(N_t^{(n)}) \rightarrow \mathbb{E}(N_t)$$

par convergence monotone et donc  $\mathbb{E}(N_t) \leq \mathbb{E}((M_t - a)^+) - \mathbb{E}((M_0 - a)^+)$ .  $\square$

**Corollaire 8.2.4.** *Si il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $t \geq 0$   $\mathbb{E}(|M_t|) \leq C$  alors  $M_t$  converge p.s.*

*Démonstration.* (Même chose pour le cas discret)  $\square$

**Proposition 8.2.5.** *(Inégalité maximale de Doob)*

*Soit  $M_t$  une sousmartingale alors pour tout  $t \geq 0$  et  $\lambda > 0$*

1. on a

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} M_s > \lambda) \leq \mathbb{E}(|M_0|) + 2\mathbb{E}(|M_t|)$$

2. et

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |M_s|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_t|^p).$$

*Démonstration.* Déjà on a par continuité à droite de  $M_s$

$$\sup_{s \leq t} M_s = \sup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0, t] \cup \{t\}} M_s$$

par l'inégalité maximale de Doob dans le cas discret on a

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{\frac{k}{2^n} \leq t} M_{\frac{k}{2^n}} > \lambda) \leq \mathbb{E}(|M_0|) + 2\mathbb{E}(|M_t|)$$

et

$$\mathbb{E}(\sup_{\frac{k}{2^n} \leq t} |M_{\frac{k}{2^n}}|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_t|^p).$$

On peut conclure avec

$$\sup_{\frac{k}{2^n} \leq t} |M_{\frac{k}{2^n}}| \rightarrow \sup_{s \leq t} |M_s|$$

p.s lorsque  $n \rightarrow 0$  par continuité à droite.  $\square$

**Corollaire 8.2.6.** *Soit  $p > 1$ . Si il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $t \geq 0$   $\mathbb{E}(|M_t|^p) \leq C$  alors  $M_t$  converge p.s et dans  $L^p$ .*

*Démonstration.* (Même chose pour le cas discret)  $\square$

### 8.3 Temps d'arrêt

On rappelle la définition donnée dans la partie du mouvement brownien.

**Définition 8.3.1.** On dit que  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un temps d'arrêt si  $\{T \leq t\}$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable. Et on définit la tribu du temps d'arrêt

$$\mathcal{F}_T = \{A : \forall t, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

En temps discret l'exemple typique du temps d'arrêt est  $T_A = \inf\{n : X_n \in A\}$  avec  $X_n$  un processus adapté. En temps continue, c'est un peu plus délicat parce que l'union ou l'intersection d'un nombre non dénombrable d'ensembles n'est à priori pas mesurable. Il faut ajouter des conditions de régularité sur le processus et on ne peut pas choisir n'importe quel ensemble  $A$  non plus.

**Proposition 8.3.2.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté (c'est à dire  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable pour tout  $t$ ) sur un espace métrique  $O$ . Soit  $A \subset O$

$$T_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

alors

1. Si  $A$  est ouvert et  $X_t$  est cad alors  $T_A$  est un temps d'arrêt.
2. Si  $A$  est fermé et  $X_t$  est continu alors  $T_A$  est un temps d'arrêt.

*Démonstration.* Si  $A$  est ouvert, alors

$$\{T_A \leq t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} \{X_s \in A\} \cup \{X_t \in A\}$$

Le terme de gauche est inclu dans le terme de droite trivialement.

Si il existe  $s < t$  tel que  $X_s \in A$  alors il existe une petite boule de centre  $X_s$  de rayon  $\delta$  tel que  $B_\delta(X_s) \subset A$  car  $A$  est ouvert. Par continuité à droite il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $s' \in [s, s + \epsilon]$ ,  $X_{s'} \in B_\delta(X_s) \subset A$ . Donc il existe  $s' \in [s, s + \epsilon] \cap \mathbb{Q}$ ,  $X_{s'} \in A$ . Et on a donc le terme de droite inclu dans le terme de gauche.

Conclusion  $\{T_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  et donc  $T_A$  est un temps d'arrêt.

Si  $A$  est fermé.

$$\{T_A \leq t\} = \left\{ \inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, A) = 0 \right\}$$

en effet puisque  $A$  est fermé  $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ .

Supposons  $\inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, A) = 0$  alors il exist  $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  tel que  $d(X_{q_n}, A) \rightarrow 0$ .  $[0, t]$  est compact, donc il existe  $s \in [0, t]$  tel qu'une sous suite  $q_{\phi(n)}$  converge vers  $s$ . Puisque  $(X_t)$  est continue alors

$$X_{q_{\phi(n)}} \rightarrow X_s$$

et donc  $d(X_s, A) = 0$  soit  $X_s \in A$ .

On en déduit que  $\{T_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  car  $\inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, A)$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable.  $\square$

**Théorème 8.3.3.** (Théorème de l'arrêt.) Soient  $S, T$  deux temps d'arrêt telle que  $S \leq T$  et  $T < \infty$  p.s et  $(M_s)_{s \geq 0}$  une martingale alors

1.  $M_{t \wedge T}$  est une martingale.
2. Si  $\sup \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$  alors  $\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_S) = M_S$ .
3. Si il existe  $C > 0$  tel que  $T \leq C$  p.s alors  $\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_S) = M_S$ .

*Démonstration.* Idée de preuve : On considère

$$M_T = \sum_k \sum_l 1_{\frac{k}{2^n} \leq S < \frac{k+1}{2^n}} 1_{\frac{l}{2^n} \leq T < \frac{l+1}{2^n}} M_T$$

on approxime  $T$  et  $S$  par  $\frac{l+1}{2^n}$  et  $\frac{k+1}{2^n}$  respectivement.

On travaille comme en discret.

On regroupe le tout lorsque  $n \rightarrow \infty$  et en utilisant la continuité de  $M_t$ .  $\square$

**Exercice 8.3.4.** Soit  $a < 0 < b$  et  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. On pose  $T_a = \inf\{t : B_t \leq a\}$  et  $T_b = \inf\{t : B_t \geq b\}$ . Ce sont des temps d'arrêt par la proposition 10 et  $(-\infty, a]$ ,  $[b, \infty)$  sont fermés.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(T_a \leq T_b) = \frac{b}{b-a}.$$

2. En utilisant que  $B_t^2 - t$  est une martingale, calculer

$$\mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$$

On note  $T = T_a \wedge T_b$ . On a  $T < \infty$  p.s

$$\mathbb{P}(\forall t : B_t \in [a, b]) \leq \mathbb{P}(B_t \in [a, b]) = \mathbb{P}(B_1 \in [\frac{a}{\sqrt{t}}, \frac{b}{\sqrt{t}}]) \rightarrow 0$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ . ( $S = 0$ ) On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}(B_T) = \mathbb{E}(1_{T=T_a} B_T + 1_{T=T_b} B_T) \\ &= a\mathbb{P}(T_a \leq T_b) + b\mathbb{P}(T_a \geq T_b) \\ &= a\mathbb{P}(T_a \leq T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_a \leq T_b)) \end{aligned}$$

on a alors  $\mathbb{P}(T_a \leq T_b) = \frac{-b}{a-b}$ .

$$0 = \mathbb{E}(B_{T \wedge t}^2 - T \wedge t)$$

donc (par convergence monotone et convergence dominé).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(B_T^2 1_{T=T_a} + B_T^2 1_{T=T_b}) \\ &= a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} \\ &= \frac{ab(a-b)}{b-a} \\ &= -ab. \end{aligned}$$

Au bout du compte on peut voir que sans trop de changements, les propriétés des martingales discrètes sont toujours valides pour les martingales continues. Cependant il manque encore le Lemme 3.0.9 qui est peut-être le plus important de tous. On verra qu'il va mener à la définition de l'intégrale stochastique.

## 8.4 Feuille d'exercice 9, Martingales continues.

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

**Exercice 8.4.1.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien,  $a > 0 > b$  et  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$  et  $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$ .

- $T_a \wedge T_b < \infty$  p.s.
- $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|b|}{a+|b|}$ .
- $\mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b}^2) = \mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$
- $\mathbb{E}(T_a \wedge T_b) = |b|a$

**Exercice 8.4.2.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue positive tel que  $M_t \rightarrow 0$  p.s,  $M_0 = a > 0$  et on note  $T_b = \inf\{t : M_t = b\}$  pour  $b \geq 0$ .

- Pour tout  $b > 0$ ,  $T_b < \infty$  p.s,
- Pour tout  $b > 0$ ,  $\mathbb{E}(M_{T_b}) = a$ ,
- Soit  $b > a$  alors  $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq b) = \frac{a}{b}$ ,
- $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t) \geq b) = e^{-2\mu b}$ .

**Exercice 8.4.3.** Comme dans le premier exercice  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien,  $a > 0 > b$  et  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$  et  $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$ .

- Pour tous  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\gamma(B_t - \alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t} + e^{-\gamma(B_t - \alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t}$  est une martingale
- Si  $a = |b|$  alors  $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a \wedge T_b}) = \cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)$
- Pour  $a, b$  quelconque  $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a \wedge T_b}) = \frac{\cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)}{\cosh(\frac{a-|b|}{2}\gamma)}$ .
- Pour tout  $\lambda \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(e^{\lambda T_a \wedge T_b}) < \infty$ .

**Exercice 8.4.4.** Soit  $M_t^{(\gamma)}$  une famille de martingales continues indexée par  $\gamma \in \mathbb{R}$  et "analytique" en  $\gamma$  c'est à dire qu'elle peut s'écrire  $M_t^{(\gamma)} = \sum_{i \geq 0} \gamma^i N_t^i$  où  $N_t^i$  sont des processus continus, bornés dans  $L^1$  sur tout intervalle de temps  $[0, t]$ .

- $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = 1 + \gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}(B_t^2 - t) + O(\gamma^2)$ .
- $B_t^3 - 3tB_t$  est une martingale continue.
- Pour tout  $i$ ,  $N_t^i$  est une martingale continue.
- Pour tout  $k$ ,  $\frac{d^k}{d\gamma^k}[e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}]|_{\gamma=0}$  est une martingale continue.

# Chapitre 9

## Processus à variation finie

Il se trouve que les martingales continues ont un comportement semblable à un mouvement brownien dans la mesure où sur un intervalle de temps, elles restent à peu près à leurs place mais oscillent énormément. En calcul stochastique on décomposera des processus sous la forme

$$X_t = A_t + M_t$$

avec  $M$  une martingale continue, elle contiendra les « oscillations rapides » de  $X$  et  $A_t$  un processus plus régulier et qui reflètera la tendance moyenne du processus. On demandera en fait que  $A_t$  soit à « variation fini ».

### 9.1 Fonction à variation fini

**Définition 9.1.1.** Soit  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $a$  est à variation fini si il existe  $C > 0$ , tel que pour  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$  on a

$$\sum_{i=0}^n |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq C.$$

C'est équivalent à il existes  $\mu_+$  et  $\mu_-$  des mesures finis sur  $[0, 1]$ ,  $\mu = \mu_+ - \mu_-$  (mesure signée) tel que

$$a(t) - a(0) = \int_0^t \mu(ds) = \mu([0, t])$$

**Exemple 9.1.2.** On a que

1. Les fonctions Lipschitziennes sont à variation fini. En effet, si  $a$  est  $\kappa$ -lipschitzienne. Alors pour tout  $i$   $|a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq \kappa|t_{i+1} - t_i|$  et alors

$$\sum_{i=0}^n |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq \sum_{i=0}^n \kappa|t_{i+1} - t_i| \leq \kappa.$$

2. Les fonction  $C^1([0, 1])$  sont à variation fini.(elles sont lipschitziennes)
3.  $a(t) = \frac{1}{t}$  n'est pas à variation fini.
4.  $a(t) = t \cos(\frac{1}{t})$  n'est pas à variation fini (exo).
5. Les fonctions croissantes (ou décroissantes) bornées sont à variations finis.  
On a directement

$$\sum_{i=0}^n |a(t_{i+1}) - a(t_i)| = \sum_{i=0}^n a(t_{i+1}) - a(t_i) = a(1) - a(0).$$

*Remarque 9.1.3.*  $a$  est à variation fini ssi il existe  $g$  croissant et  $f$  décroissant (bornés) tel que  $a(t) = f(t) + g(t)$ .

En posant  $f(t) = \mu_-([0, t])$  et  $g(t) = \mu_+([0, t])$ .

*Remarque 9.1.4.* On peut choisir  $\mu_+$  et  $\mu_-$  de tel sorte quelles soient à support disjoint.

On introduit  $\nu = \mu_+ + \mu_-$ .  $\mu$  est « dominé » par  $\nu$  (c'est à dire  $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ ). Theorème de Radon Nikodym. Il existe  $h$  fonction  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mu(dx) = \nu(dx)h(x)$ . On peut alors choisir

$$\tilde{\mu}_+ = \nu h(x) 1_{h(x) \geq 0}$$

$$\tilde{\mu}_- = -\nu h(x) 1_{h(x) < 0}$$

on peut vérifier quelles sont à support disjoint et que  $\mu = \tilde{\mu}_+ - \tilde{\mu}_-$ .

*Démonstration.* Montrons que les deux définitions sont équivalentes :

On note  $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ .

Si  $a(t) - a(0) = \int_0^t \mu(ds)$  alors pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$  on

$$\sum_{i=0}^n |a(t_{i+1}) - a(t_i)| = \sum_{i=0}^n \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(ds) \right| \leq \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mu|(ds) = \int_0^1 |\mu|(ds) < \infty$$

Supposons que il existes  $C > 0$  tel que pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$  on a

$$\sum_{i=0}^n |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq C$$

Construisons  $\mu$ .

On peut construire

$$\tilde{\nu}([s, t]) := \sup_{s < t_1 < \dots < t_n < t} \sum_{i=0}^n |a(t_{i+1}) - a(t_i)|$$

ça définit bien une mesure. On vérifie que c'est cohérent. Soit  $s < s' < t$ . On a

$$\tilde{\nu}([s, t]) = \tilde{\nu}([s, s']) + \tilde{\nu}([s', t])$$

De plus  $\tilde{\nu}$  est une mesure finie. On construit  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mu(dx) = h(x)d\tilde{\nu}(dx)$ .

$$a(t_{i+1}) - a(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu = \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(s)\tilde{\nu}(ds)$$

On pose

$$h^{(n)}(s) = \sum_{i=0}^n 1_{s \in [t_i, t_{i+1})} \frac{a(t_{i+1}) - a(t_i)}{\tilde{\nu}([t_i, t_{i+1}))}$$

On choisit  $t_i^{(n)} = \frac{i}{2^n}$ . On remarque  $h^{(n)}$  est une martingale sur  $[0, 1]$ , pour la filtration  $\mathcal{F}_n = \sigma([\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}))$  pour l'espace de proba  $([0, 1], (\mathcal{F}_n), \tilde{\nu})$ .  $-1 \leq h^{(n)} \leq 1$ . Alors  $h^{(n)}$  converge p.s sur  $[0, 1]$  et dans  $L^1$ . On peut vérifier que

$$a(t) = \int_0^t h(s)\tilde{\nu}(ds)$$

En effet pour tout  $i, n$

$$a(\frac{i}{2^n}) - a(0) = \int_0^{i2^{-n}} h^{(n)}(s)\tilde{\nu}(ds)$$

et on a alors pour tout  $t$  en prenant  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Définition 9.1.5.** (Intégrale) Soit  $a$  une fonction à variation fini et  $\mu$  sa mesure associé. Soit  $f$  tel que  $\int_0^1 |f|d\mu < \infty$ . On note alors

$$\int_0^1 f(s)da(s) := \int_0^1 f(s)d\mu.$$

**Proposition 9.1.6.** Soit  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , et soit  $0 < t_1^{(n)} < \dots < t_{p_n}^{(n)} < 1$  tel que  $\max_{i \leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$ . Alors

$$\sum_{i=0}^{p_n} f(t_i^{(n)})(a(t_{i+1}^{(n)}) - a(t_i^{(n)})) \rightarrow \int_0^1 f(s)da(s)$$

*Démonstration.* On pose  $f^{(n)}(t) = f(t_i^{(n)})$  pour  $t_i^{(n)} \leq t < t_{i+1}^{(n)}$  c'est l'approximation de  $f$  par une fonction constante par morceau (sur les  $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$ ).

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p_n} f(t_i^{(n)})(a(t_{i+1}^{(n)}) - a(t_i^{(n)})) &= \sum_{i=0}^{p_n} f(t_i^{(n)}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\mu \\ &= \sum_{i=0}^{p_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^{(n)}(s)d\mu(s) \\ &= \int_0^1 f^{(n)}(s)d\mu(s). \end{aligned}$$

Puisque  $\max_{i \leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$  et  $f$  est continue on a  $f^{(n)} \rightarrow f$  sur  $[0, 1]$ . Par convergence dominée ( $f$  est continue donc bornée)

$$\int_0^1 f^{(n)}(s) d\mu(s) \rightarrow \int_0^1 f(s) \mu(ds) = \int_0^1 f(s) da(s).$$

□

**Définition 9.1.7.** Soit  $f$  tel que  $\int_0^1 |f| |\mu|(ds) < \infty$  alors

$$b(t) := \int_0^t f(s) \mu(ds)$$

est à variation fini.

*Démonstration.* La mesure  $f(x)\mu(dx)$  est fini. □

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ , la définition « à variation fini » et les propriétés associés de généralisent de manière élémentaire aux fonctions définies sur  $[0, t]$ . On dira également qu'une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  est à variation fini si pour tout  $t \geq 0$ , cette fonction restreinte à  $[0, t]$  est à variation finie.

## 9.2 L'intégrale de Stieljes (discussion)

Avec  $y_i^{(n)} \in [t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$ .

$$\sum_{i=0}^{p_n} f(y_i^{(n)}) (a(t_{i+1}^{(n)}) - a(t_i^{(n)})) \rightarrow? = \int_0^1 f(s) da(s)$$

Ce que l'on vient de voir : OK si  $f$  continue et  $a$  à variation fini.

Question : Pour quel conditions a t on que la limite est bien définie ?

Une condition possible c'est  $f$  est  $p$ -Holder et  $a$  est  $q$ -Holder avec  $p \geq 1/2$  et  $q \geq 1/2$ .

## 9.3 Processus à variation

**Définition 9.3.1.** On dit que  $A$  est un processus à variation fini si pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \rightarrow A_t(\omega)$  est une fonction à variation fini.

Contre exemple : Le mouvement brownien n'est PAS à variation fini. On verra pourquoi dans la suite.

## 9.4 Feuille d'exercice 11, Variation finie et p-variation.

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

**Exercice 9.4.1.** Soit  $a$  une fonction à variation fini sur  $[0, 1]$  et  $g$  une fonction  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $b$  une fonction bornée alors

- $g \circ a$  est à variation fini.
- $h(t) := \int_0^t g(s) da(s)$  est à variation fini.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 g(s) da(s)$
- $\exists C > 0, |\sum_{k=1}^n b(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) - \sum_{k=1}^n b(\frac{k-1}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))| \leq C$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 9.4.2.** Soit  $a$  et  $b$  des fonctions sur  $[0, 1]$  respectivement  $\frac{1}{p}$  Holder et  $\frac{1}{q}$  Holder.

- $a$  est à  $p$ -variation.
- Si  $p < q$  alors  $a$  est de  $q$ -variation nulle.
- Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  alors  $\sum_{k=1}^n (a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))(b(\frac{k}{n}) - b(\frac{k-1}{n})) \rightarrow 0$ .
- Soit  $(t_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}, k \leq n}$  tel que  $\frac{k-1}{n} \leq t_k^{(n)} \leq \frac{k}{n}$ . Alors si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{k=1}^n (a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))b(t_k^{(n)})$$

admet une limite pour  $n \rightarrow \infty$  indépendamment du choix de  $(t_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}, k \leq n}$ .

**Exercice 9.4.3.** Soit  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables iid avec  $\mathbb{E}(Y_i) = 0$  et  $\mathbb{E}(Y_i^2) = 1$ . On pose  $S_n^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n Y_i$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

- $\exists M, \mathbb{P}(\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}| < M) \geq 1 - \epsilon$  pour tout  $N$  suffisamment grand.
- $\exists M, \mathbb{P}(\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}|^2 < M) \geq 1 - \epsilon$  pour tout  $N$  suffisamment grand.
- $K_n := (S_n^{(N)})^2 - \mathbb{E}((S_n^{(N)})^2)$  est une martingale.
- Pour  $N \rightarrow \infty$ , Pour tout  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$   $((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2 - \mathbb{E}((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2))_{i \leq n}$  converge en loi vers  $(B_{t_i}^2 - t_i)_{i \leq n}$ .

**Exercice 9.4.4.** Soit  $B_t$  et  $\tilde{B}_t$  deux mouvements brownien indépendant et  $A_t$  un processus à variation fini.

- $B_t^2$  est à variation fini.
- Pour  $p > 2, \sum_{k=1}^n |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|^p \rightarrow 0$  en proba.
- $\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \rightarrow 0$  en proba.
- $K_t := \int_0^t B_s dA_s$  est un processus à variation fini.

## Chapitre 10

# Variation quadratique des martingales continues

Dans toute cette partie et dans la suite du cours, pour tout martingale  $M$  on supposera que  $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  pour  $t \geq 0$ . Une martingale continue oscille beaucoup, de fait la variation absolue de la partie précédente n'est pas adaptée pour appréhender les fluctuations de  $M$ . Le bon objet sera la variation quadratique :

$$\sup_{(t_i)} \sum_i (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

On verra que ceci converge vers un processus  $\langle M, M \rangle$  qui décrit alors l'intensité des fluctuations  $M$ . Comme pour le mouvement brownien on peut penser une martingale continue comme, dans une certaine limite, une somme d'un grand nombre de petites variables aléatoires de moyenne (conditionnelle) nulle. À la limite, les particularités de ces variables s'effacent et in fine, seules leur variance compte. La «variation quadratique»  $\langle M, M \rangle_t$  de la martingale peut être vue comme le processus aléatoire décrivant la variance de ces petites variables. De manière informelle on a  $\langle M, M \rangle_{t+dt} - \langle M, M \rangle_t = \mathbb{E}((M_{t+dt} - M_t)^2 | \mathcal{F}_t)$ .

De fait la variation quadratique apparaît naturellement pour les martingales continues comme on peut le voir dans la simple proposition suivante.

**Proposition 10.0.1.** *Soit  $M_t$  une martingale continue telle que  $t \geq 0$   $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  alors*

1. *Pour tout  $s < t$  on a  $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s)$ ,*
2. *Pour tout  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  on a  $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s)$ ,*

*En particulier  $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2) = \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2)$ .*

*Démonstration.* On écrit  $M_t = (M_t - M_s) + M_s$  et donc .

$$\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 + 2M_s(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s)$$

On a aussi

$$\mathbb{E}(M_s(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) = M_s\mathbb{E}(M_t - M_s|\mathcal{F}_s) = M_s(\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) - M_s) = 0$$

car  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}\right) | \mathcal{F}_s \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 | \mathcal{F}_{t_i})\right) | \mathcal{F}_s \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 | \mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}(M_{t_n}^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

□

J'ai plusieurs fois répété qu'une martingale continue oscille beaucoup. C'est ce que dit le lemme suivant : sauf cas trivial, une martingale continue n'est pas à variation finie.

**Lemme 10.0.2.** *Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue avec  $M_0 = 0$  tel que  $\forall t$   $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ , à variation finie alors*

$$M_t = 0$$

p.s pour tout  $t$ .

*Démonstration.* Supposons  $M_t$  soit « uniformément à variation finie ». Il existe  $C$  p.s pour tout  $\omega \in \Omega$  la variation de  $M_t(\omega)$  est borné par  $C$ . Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sup_{i \leq n} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \cdot |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sup_{i \leq n} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right) \\ &\leq C\mathbb{E}\left(\sup_{i \leq n} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right) \end{aligned}$$

Puisque  $M_t$  est continue  $\mathbb{E}(\sup_{i \leq n} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|) \rightarrow 0$  pour  $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$ . Conclusion  $\mathbb{E}(M_t^2) = 0$  c'est à dire  $M_t = 0$  p.s.

Pour le cas générale on pose  $T_k := \inf\{t : \sup_{t_i} \sum |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \geq k\}$ . Alors la variation de  $M_{t \wedge T_k}$  est uniformément borné par  $k$ . Donc  $M_{t \wedge T_k} = 0$ . Pour finir  $T_k \rightarrow \infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  p.s car  $M$  est à variation fini. Alors  $0 = M_{t \wedge T_k} \rightarrow M_t$ .  $\square$

**Définition 10.0.3.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue avec  $\forall t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ . On appelle *variation quadratique*  $\langle M, M \rangle_t$  l'unique processus (issu de 0) à variation finie tel que

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

soit une martingale.

Exemple On a vu que  $B_t^2 - t$  est une martingale donc si  $M$  est le mouvement brownien alors  $\langle M, M \rangle_t = t$ .

*Démonstration.* L'unicité : Supposons  $M_t$  uniformément borné. Soit  $\langle M, M \rangle_t^{(1)}$  et  $\langle M, M \rangle_t^{(2)}$  deux processus à variation fini tel que  $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t^{(1)}$  et  $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t^{(2)}$  soient des martingales. Alors

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t^{(1)} - M_t^2 + \langle M, M \rangle_t^{(2)} = \langle M, M \rangle_t^{(2)} - \langle M, M \rangle_t^{(1)}$$

Le terme de droite est une martingale, le terme de gauche est à variation fini donc c'est une martingales continue à variation fini donc  $\langle M, M \rangle_t^{(2)} - \langle M, M \rangle_t^{(1)} = 0$ . Pour le cas général on pose  $T_C := \inf\{t : M_t > C\}$ . Alors le résultat est vrai pour  $M_{t \wedge T_C}$  et on l'étend à  $M_t$  en passant à la limite  $C \rightarrow \infty$   $\square$

**Proposition 10.0.4.** Pour  $0 < t_1 < \dots < t_n < t$  on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \rightarrow \langle M, M \rangle_t$$

en proba lorsque  $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$ .

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} M_{t_i} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \rightarrow M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

en proba lorsque  $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* Idée de la preuve

$$M_t^2 - M_s^2 = 2M_s(M_t - M_s) + (M_t - M_s)^2$$

Par itération immédiate on obtient

$$M_t^2 = 2 \sum_{t_i < t} M_{t_i} (M_{t_i} - M_{t_{i+1}}) + \sum (M_{t_i} - M_{t_{i+1}})^2$$

On pose

$$X_s^{(n)} = 2 \sum M_{t_i} (M_{t_i \wedge s} - M_{t_{i+1} \wedge s})$$

$$Z_s^{(n)} = \sum (M_{t_i \wedge s} - M_{t_{i+1} \wedge s})^2.$$

Observer alors que

1.  $X_s^{(n)}$  est une martingale.
2.  $i \rightarrow Z_{t_i}^{(n)}$  est croissante donc à variation finie.

**Proposition 10.0.5.**  $X_s$  et  $Z_s$  converge en probabilité.

□

**Définition 10.0.6.** (Crochet de Martingale continue)

Soit  $M$  et  $N$  deux martingales continues bornées dans  $L^2$ . On note  $\langle M, N \rangle_t$  l'unique fonction à variation finie tel que

$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

est une martingale.

*Remarque 10.0.7.*  $2\langle M, N \rangle_t = \langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t$ .

**Proposition 10.0.8.** Pour  $0 < t_1 < \dots < t_n < t$  on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \rightarrow \langle M, N \rangle_t$$

en proba lorsque  $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$ .

**Définition 10.0.9.** On dit que  $X_t$  est une semimartingale continue ssi il existe  $M_t$  une martingale et  $A_t$  un processus à variation fini (adapté), issu de 0 tel que

$$X_t = M_t + A_t$$

*Remarque 10.0.10.* C'est décomposition est unique.

## 10.1 Feuille d'exercice 12, Variation quadratique martingale continue.

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

Par défaut on supposera que les martingales satisfont  $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Exercice 10.1.1.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  deux mouvements brownien indépendant et  $(M_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  deux martingales continue issues de 0.

- Si  $\langle M, M \rangle = \langle N, N \rangle$  p.s alors  $M = N$  p.s.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n B_{\frac{k}{n}} (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) - \sum_{k=1}^n B_{\frac{k-1}{n}} (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) \right| = 1$ .
- $\langle B, \tilde{B} \rangle_t = 0$ .

—  $\langle 2B - \tilde{B}, 2B - \tilde{B} \rangle_t = 3t$ .

**Exercice 10.1.2.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue,  $X_t$  un processus continue et  $S_\epsilon = \inf\{t \geq 0, \langle M, M \rangle_t \geq \epsilon\}$ .

- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$  alors  $X_1 = X_0$  p.s
- $\mathbb{E}((M_{t \wedge S_\epsilon} - M_0)^2) \leq \epsilon$
- $\{\langle M, M \rangle_t = 0\} \subset \{M_t = M_0\}$  p.s.
- $\{M_t = M_0\} \subset \{\langle M, M \rangle_t = 0\}$  p.s.

**Exercice 10.1.3.** Soient  $(X_t)_{t \geq 0}, (Y_t)_{t \geq 0}$  des semimartingales continues issue de 0.

- $\mathbb{E}(X_1 Y_1) = \mathbb{E}(\langle X, Y \rangle_1)$ .
- Si pour tout  $s \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} |Y_{\frac{k}{n}} - Y_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$  alors  $Y$  est à variation finie.
- Si il existe  $A$  un processus à variation finie tel que  $X = Y + A$  alors  $\langle X, Y \rangle = \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle$ .
- Si  $X, Y$  sont des martingales avec  $\langle X, Y \rangle_t = 0$  alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exercice 10.1.4.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue avec  $M_0 = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$  et  $S_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t = n\}$ .

- $\{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n = \infty\}$ .
- $\{T_n = \infty\} \subset \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$  p.s.
- Pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(M_{t \wedge S_n}^2) < \infty$ .
- $\{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} = \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$  p.s

# Chapitre 11

## Intégrale Stochastique

On rappelle que pour une martingale discrète  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  martingale et  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un processus prévisible c'est à dire  $(\mathcal{F}_{n-1})$ . Alors

$$(H \cdot M)_n := \sum_{i=1}^n H_i(M_i - M_{i-1}).$$

est une martingale.

On aimerait avoir un Lemme semblable pour  $M_t$  une martingale continue et soit  $H_t$  un processus adapté. Le but est de définir

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s = ?$$

que l'on appellera Intégrale Stochastique. Un point essentielle sera de traduire la notion de «prévisible» dans le cas continue. Remarquer aussi  $M_t$  n'est pas à variation fini et donc la définition de l'intégrale au sens des variations finies ne peut pas être utilisé ici. Il s'agit donc de définir une nouvelle notion d'intégrale, adaptée aux martingales continues.

**Définition 11.0.1.** Soit  $M_t$  une martingale continue et  $H_t$  un processus adapté p.s constant par morceau. C'est à dire qu'il existe  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  et  $(H_i)_{i \leq n-1}$  des variables respectivement  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurables tel que

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}]$$

pour tout  $\omega \in \Omega$ . On définit alors

$$(H \cdot M)_t := \sum_i H_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

*Démonstration.* Vérifions que  $(H \cdot M)_t$  est bien une martingale. Tout d'abord pour  $s \in (t_i, t_{i+1})$   $H_s$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurable. Ensuite puisque la somme de martingale

est encore une martingale il suffit de montrer que  $H_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$  est une martingale. et

$$(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ (M_t - M_{t_i}) & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \\ M_{t_{i+1}} - M_{t_i} & \text{si } t \geq t_{i+1} \end{cases}$$

Soit  $s < t$ . Montrons que  $\mathbb{E}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} | \mathcal{F}_s) = M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}$ . Si  $t < t_i$  alors on immédiatement  $H_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) = 0$  et  $H_i(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}) = 0$ . Si  $t_i \leq s < t \leq t_{i+1}$  alors

$$\mathbb{E}(H_i(M_t - M_{t_i}) | \mathcal{F}_s) = H_i(\mathbb{E}(M_t) | \mathcal{F}_s) - M_{t_i} = H_i(M_s - M_{t_i}).$$

Si  $t_{i+1} \leq s < t$ ,  $M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t} = H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}$  et les autres cas sont triviaux. On a donc bien une martingale.  $\square$

Dans la suite on supposera toujours  $M_0 = 0$ .

**Proposition 11.0.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et une filtration  $\mathcal{F}_t$ . On note  $\mathbb{H}$  l'ensemble des martingales continues uniformément borné dans  $L^2$ . Alors  $\mathbb{H}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\mathbb{E}(M_\infty N_\infty)$$

où  $M_\infty, N_\infty$  est la limite dans  $L^2$  et p.s de  $M_t$  et  $N_t$ .

On note  $\mathcal{F}_\infty = \sigma((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  On a toujours pour les martingales continues uniformément borné dans  $L^2$   $M_t = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_t)$

En particulier  $\|M\|^2 = \mathbb{E}(M_\infty^2) = \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty)$ . Où  $\langle M, M \rangle_\infty$  est la limite de  $\langle M, M \rangle_t$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

En effet  $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$  est une martingale donc pour tout  $t$ ,  $\mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t) = 0$  On peut conclure par convergence  $L^2$  de la martingale et par convergence monotone de  $\langle M, M \rangle_t$ .

De même on a

$$\mathbb{E}(M_\infty N_\infty) = \mathbb{E}(\langle M, N \rangle_\infty)$$

où  $\langle M, N \rangle_\infty$  est la limite de  $\langle M, N \rangle_t$ .

**Définition 11.0.3.** Soit  $M$  une martingale continue : on note  $L^2(M)$  l'ensemble des processus  $H_t$  adaptés tel que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M \rangle_t\right) < \infty$$

(ici c'est l'intégrale à variation fini car  $\langle M, M \rangle_t$  est à variation fini). Et on note  $\mathcal{E}(M) \subset L^2(M)$  le sous ensemble des processus constant par morceaux.

On munit  $L^2(M)$  du produit scalaire

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_t K_t d\langle M, M \rangle_t\right)$$

et donc de la norme

$$\|H\|_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M \rangle_t\right)$$

**Proposition 11.0.4.** *On a*

1.  $\mathcal{E}(M)$  est dense dans  $L^2(M)$
2. L'application  $\mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbb{H}$  définie par  $H \rightarrow (H \cdot M)$  est une isométrie.

**Théorème 11.0.5.** (Définition de l'intégrale stochastique). *Il existe une unique isométrie de  $L^2(M) \rightarrow \mathbb{H}$  qui étend  $H \rightarrow (H \cdot M)$  définie sur  $\mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbb{H}$ .*

*Preuve de la proposition 11.0.4.* Puisqu'il s'agit d'un espace de Hilbert  $\mathcal{E}(M)$  est dense dans  $L^2(M)$  est équivalent à  $\mathcal{E}(M)^\perp = \{0\}$ . Soit  $H \in \mathcal{E}(M)^\perp$ . On pose

$$X_t = \int_0^t H_s \langle M, M \rangle_s$$

Puisque

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M \rangle_t\right) < \infty$$

on a presque sûrement  $\int_0^\infty H_t^2 d\langle M, M \rangle_t < \infty$ . En particulier  $\int_0^t |H_s| \langle M, M \rangle_s < \infty$  pour tout  $t$ . On en déduit que  $X_t$  est à variation finie sur  $[0, T]$ .

$$\sum |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| = \sum \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \langle M, M \rangle_s \right| \leq \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} |H_s| \langle M, M \rangle_s = \int_0^T |H_s| \langle M, M \rangle_s < \infty.$$

Montrons que  $X_t$  est une martingale c'est à dire que  $\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = 0$ .

$$X_t - X_s = \int_s^t H_u \langle M, M \rangle_u = \int_0^\infty K_u H_u \langle M, M \rangle_u$$

ou on a pose  $K_u = 1_{(s,t)}(u)$ . Soit  $F$  une fonction  $\mathcal{F}_s$  mesurable alors  $FK \in \mathcal{E}(M)$   
Donc

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty FK_u H_u d\langle M, M \rangle_u\right) = 0 = \mathbb{E}(F(X_t - X_s))$$

Conclusion pour toute fonction  $F \mathcal{F}_s$  mesurable  $0 = \mathbb{E}(F(X_t - X_s))$  on en déduit que  $\mathbb{E}((X_t - X_s) | \mathcal{F}_s) = 0$ . Donc  $X_t$  est une martingale c'est donc une martingale continue et à variation finie. On en déduit que  $X_t = 0$ . Et alors  $H_s = 0$   $\mu$  presque sûrement où  $\mu$  est la mesure associée à la fonction à variation finie  $\langle M, M \rangle_s$ . Donc  $H = 0$  dans " $L^2(M)$ ".

Montrons maintenant  $(H \rightarrow (H \cdot M))$  définie par

$$(H \cdot M)_t = \sum_i H_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

est une isométrie de  $L^2(M)$  dans  $\mathbb{H}$ .

-c'est bien une application linéaire.

- $(H \cdot M)$  est bien une martingale.
- Elle préserve la distance :

$$\begin{aligned} \|(H \cdot M)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \mathbb{E}((H \cdot M)_{\infty}^2) = \mathbb{E}\left(\sum_i H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right)^2 \\ &= \sum_i \sum_j \mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})) \\ &= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})) \end{aligned}$$

puisque  $M_{t_{i+1}}, M_{t_i}, H_i$  et  $H_j$  sont  $\mathcal{F}_{t_j}$  mesurable

$$\mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})) = \mathbb{E}(H_j H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mathbb{E}((M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j})) = 0$$

car  $M$  est une martingale. On a donc

$$\begin{aligned} \|(H \cdot M)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) \\ &= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2 (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2)) \\ &= \sum_i \mathbb{E}(H_i^2 (\langle M, M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t_i})) \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_i^2 d\langle M, M \rangle_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{\infty} H_t^2 d\langle M, M \rangle_t\right) \\ &= \|H\|_{L^2(M)} \end{aligned}$$

En effet  $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$  est une martingale donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H_i^2 (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2)) &= \mathbb{E}(H_i^2 \mathbb{E}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 | \mathcal{F}_{t_i})) \\ &= \mathbb{E}(H_i^2 \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i})) \\ &= \mathbb{E}(H_i^2 (\langle M, M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t_i})) \end{aligned}$$

et finalement  $H \rightarrow H \cdot M$  est bien une isométrie de  $\mathcal{E}(M)$  et  $\mathbb{H}$ .  $\square$

**Proposition 11.0.6.** Soit  $M, N \in \mathbb{H}$  et soit  $H \in L^2(M)$  alors

$$\langle (H \cdot M), N \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s = H \cdot \langle M, N \rangle_s$$

Remarquer ici que l'intégrale et le «  $\cdot$  » de droite est au sens de la variation finie. Alors que le «  $\cdot$  » de gauche est une intégrale stochastique. Remarquer également que cette propriété est élémentaire pour des martingales discrètes :

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n} ((H \cdot M)_i - (H \cdot M)_{i-1})(N_i - N_{i-1}) &= \sum_{i \leq n} H_i (M_i - M_{i-1})(N_i - N_{i-1}) \\ &= H \cdot \langle M, N \rangle_n \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour  $H = H_i 1_{(t_i, t_{i+1})}$  avec  $H_i \mathcal{F}_{t_i}$  mesurable.

$$(H \cdot M)_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ H_i(M_t - M_{t_i}) & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \\ H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) & \text{si } t \geq t_{i+1} \end{cases}$$

donc

$$\langle (H \cdot M), N \rangle_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ H_i \langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_{t_i} & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \\ H_i \langle M, N \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t_i} & \text{si } t \geq t_{i+1} \end{cases}$$

soit

$$\langle (H \cdot M), N \rangle_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_i \\ \int_{t_i}^t H_i d\langle M, N \rangle_s & \text{si } t_i < t < t_{i+1} \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_i d\langle M, N \rangle_s & \text{si } t \geq t_{i+1} \end{cases} = \int_0^t H d\langle M, N \rangle_s$$

Par linéarité on a donc la proposition pour les fonctions constantes par morceaux ( $H \in \mathcal{E}(M)$ ).

Par continuité on étend la proposition à tous les  $H \in L^2(M)$ .  $\square$

**Proposition 11.0.7.** (*associativité*) Soit  $M \in \mathbb{H}$ ,  $K$  dans  $L^2(M)$  et  $H \in L^2(K \cdot M)$  alors  $HK \in L^2(M)$  et

$$(H \cdot (K \cdot M)) = (HK) \cdot M$$

## 11.1 Feuille d'exercice 13 : Intégrale stochastique

Rappel : Pour  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ ,  $A$  un processus à variation fini et  $H \in L^2(M)$  un processus adapté, on notera  $\int_0^t H_s dM_s = (H \cdot M)_t$  l'intégrale stochastique associée à  $H$  et  $M$  et  $\int_0^t H_s dA(s) = (H \cdot A)_t$  l'intégrale pour la variation finie associée à  $H$  et  $A$ .

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

**Exercice 11.1.1.** Soit  $A$  un processus à variation finie,  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ .

- Soit  $F_t := \int_0^t \cos(M_s) dA(s)$ . Alors  $(F_t)_{t \geq 0}$  est à variation finie *p.s.*
- $(F_t)_{t \geq 0}$  est une martingale.
- Pour tout  $t \geq 0$  :  $\mathbb{E}(\int_0^t \sin(M_s) dM_s) = 0$
- $\sin(M_s) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s$ .

**Exercice 11.1.2.** Soit  $M_s$  une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$  et un processus adapté  $H_s \in L^2(M)$ .

- $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$  est une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$ .
- $\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M \rangle_t)$
- Si il existe  $C \geq 0$  tel que  $H_s \leq C$  pour tout  $s \geq 0$  p.s alors il existe  $C'$  tel que  $(H \cdot M)_s \leq C'$  pour tout  $s \geq 0$  p.s.
- $\langle (H \cdot M), (H \cdot M) \rangle_t$  converge p.s. et dans  $L^1$ .

**Exercice 11.1.3.** Soit  $B_t$  un mouvement brownien. Soit  $(H_s)_{s \geq 0}$  un processus adapté uniformément borné.

- $\mathbb{E}((H \cdot B)_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2) ds$
- Supposons  $H_s = 1_{B_s \geq 0}$ . Alors pour tout  $s$  on a  $(H \cdot B)_s \geq 0$  p.s.
- $B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s$ .
- $2 \int_0^t B_s dB_s = B_t^2 - t$

**Exercice 11.1.4.** Soit  $a$  un processus à variation finie,  $M_s$  une martingale continue bornée dans  $L^2$  et  $H_s$  un processus adapté uniformément borné ( $\exists C > 0 : |H_s| < C$  p.s pour tout  $s \geq 0$ ) et continue. Soit  $0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{p_n}^{(n)} = t$  une segmentation de  $[0, t]$ . On supposera que  $\max_{i \leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour tout  $n$  on choisit une suite  $0 \leq y_1^{(n)} \leq \dots \leq y_{p_n}^{(n)} \leq t$  tel que  $y_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$  pour tout  $i \leq p_n$ .

- Quelque soit le choix des  $y_i^{(n)}$  on a pour  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}} (A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) \rightarrow \int_0^t H_s dA(s)$$

en probabilité.

- Quelque soit le choix des  $y_i^{(n)}$  on a pour  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \rightarrow \int_0^t H_s dM_s.$$

en probabilité.

- Si pour tout  $n, i$   $y_i^{(n)} = t_{i-1}^{(n)}$  alors  $K_k := \sum_{i=0}^k H_{y_i^{(n)}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$  est une martingale discrète.
- Supposons  $M$  borné. Si pour tout  $n, i$   $y_i^{(n)} = t_i^{(n)}$  alors pour  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{p_n-1} M_{y_i^{(n)}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \right) \rightarrow \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t)$$

**Exercice 11.1.5.** Soient  $M$  and  $N$  deux martingales continues bornées dans  $L^2$  et  $K, H$  des processus adaptés et bornés.

- $(K \cdot (H \cdot M))_t = (H \cdot (K \cdot M))_t$
- $\langle H \cdot M, N \rangle_t = \langle M, H \cdot N \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s$
- $\langle H \cdot (M + N), K \cdot N \rangle_t = (HK) \cdot \langle M, N \rangle_t + (HK) \cdot \langle N, N \rangle_t$
- Si  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien alors  $\langle B, B \cdot B \rangle_t = tB_t$

# Chapitre 12

## Formule d'Ito

La formule d'Ito est l'outil de base du calcul stochastique. C'est l'équivalent du principe fondamental de l'analyse pour les processus stochastiques. Elle est indispensable, utilisée tout le temps et partout. Le point essentiel est qu'il faut rajouter à l'intégrale un terme qui dépend de la variation quadratique.

### 12.1 La formule d'Ito, énoncé et exemples simples.

**Théorème 12.1.1.** (Formule d'Ito : En dimension 1) Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une semimartingale et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

**Théorème 12.1.2.** (En dimension  $d$ ) Soit  $(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})_{t \geq 0}$  une semimartingale et  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$  alors

$$\begin{aligned} & f((X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})) \\ &= f((X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(d)})) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(X_s) d\langle X^{(k)}, X^{(l)} \rangle_s. \end{aligned}$$

**Exemple 12.1.3.** Appliquons la formule d'Ito sur des cas simple :

1. Considérons  $(B_t^2)_{t \geq 0}$ . Ici  $f(x) = x^2$ ,  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$  et la variation quadratique  $\langle B, B \rangle_s = s$  (ce qui donne  $d\langle B, B \rangle_s = ds$ )

$$B_t^2 = 0 + \int_0^t 2B_t dB_t + \frac{1}{2} \int_0^t 2ds = 2 \int_0^t B_t dB_t + t$$

Remarquer que l'on retrouve bien le fait que  $B_t^2 - t$  est une martingale.

2. Considérons  $(B_t^3)_{t \geq 0}$ . Ici  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$  et toujours  $\langle B, B \rangle_s = s$ . On a donc

$$B_t^3 = 0 + 3 \int_0^t B_s^2 dB_s + 3 \int_0^t B_s ds$$

**Lemme 12.1.4.** *si*

$$X_t = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t P_s dA_s$$

alors «  $dX_t = H_s dM_s + P_s dA_s$  » et «  $d\langle X, X \rangle_s = H_s^2 d\langle M, M \rangle_s$  ».

*Démonstration.* En effet pour tout  $K$  processus adapté on a

$$\int_0^t K_s dX_s = (K \cdot X)_t = (K \cdot (H \cdot M))_t = ((KH) \cdot M)_t = \int_0^t K_s H_s dM_s$$

et même chose pour  $P_s dA_s$ . On a également

$$\langle (H \cdot M), (H \cdot M) \rangle_t = H^2 \cdot \langle M, M \rangle_t$$

□

**Exemple 12.1.5.** Considérons  $B_t^4$  et appliquons la formule d'Ito de deux manières différentes soit  $X_t = B_t$  et  $f(x) = x^4$  soit  $X_t = B_t^2$  et  $f(x) = x^2$ . Pour le deuxième cas  $X_t = 2 \int_0^t B_t dB_t + t$  donc par le Lemme précédent on a  $dX_s = 2B_s dB_s + ds$  et  $d\langle X, X \rangle_s = 4B_s^2 ds$ . Avec  $f(x) = x^2$ ,  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$  on obtient

$$(B_t^2)^2 = 0 + \int_0^t 2B_s^2 \times 2B_s dB_s + \int_0^t 2B_s^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t 2 \times 4B_s^2 ds = 4 \int_0^t B_s^3 dB_s + 6 \int_0^t B_s^2 ds$$

Dans le deuxième cas avec  $f(x) = x^4$ ,  $f'(x) = 4x^3$  et  $f''(x) = 12x^2$  on a directement

$$B_t^4 = 4 \int_0^t B_s^3 dB_s + 6 \int_0^t B_s^2 ds$$

Passons à la preuve de la formule d'Ito. Voici l'idée générale, on peut considérer l'exemple simple  $(M_t)^2$ . Par définition de l'intégrale stochastique  $(M \cdot M) = \int M_t dM_t$  est une martingale alors  $M_t^2$  est une sousmartingale. La formule naïve  $M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s$  est donc fautive ! En fait on a construit la variation quadratique  $\langle M, M \rangle$  exactement de telle sorte que l'on ait  $M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \langle M, M \rangle_t$  ou plus généralement  $M_t^2 = M_s^2 + 2 \int_s^t M_u dM_u + \langle M, M \rangle_t - \langle M, M \rangle_s$ . C'est en considérant une fonction quelconque  $f$ , si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  alors localement on peut toujours écrire  $f(x) \approx ax^2 + bx + c$ . C'est ce qui va donner en fin de compte la formule d'Ito.

*Démonstration.* Pour le cas  $d = 1$ . Pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{p_n} = t$  on a

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{p_n} f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}})$$

Puisque  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , par développement de Taylor (exact) on a pour tout  $x, y$ , il existe  $x^* \in [x, y]$  tel que :

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + \frac{1}{2}(y - x)^2 f''(x^*)$$

Donc il existe des  $Y_i^* \in [X_{t_{i-1}}, X_{t_i}]$  tel que

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i \left( (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})f'(X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 f''(Y_i) \right) \quad (12.1)$$

Lorsque on choisit des segmentations de plus en plus petite  $H_{t_{i-1}} = f'(X_{t_{i-1}})$

$$\sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})f'(X_{t_{i-1}}) \rightarrow \int_0^t f'(X_s) dX_s.$$

Il reste le deuxième terme. Il faut montrer que

$$\frac{1}{2} \sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 f''(Y_i) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s. \quad (12.2)$$

Par construction de  $\langle X, X \rangle$  pour toute fonction plateau  $1_{t \in [a, b]}$  on a la convergence en proba

$$\frac{1}{2} \sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 1_{t_{i-1} \in [a, b]} \rightarrow \frac{1}{2} \int_a^b d\langle X, X \rangle_s.$$

On pourrait alors obtenir (12.2) en utilisant

1. la densité de l'espace vectoriel des fonctions plateaux.
2.  $|f''(Y_i) - f''(X_{t_{i-1}})| \rightarrow 0$  car  $f''$  est continue.

On peut alors conclure : equation (12.1) donne

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i (\dots) \rightarrow \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

□

Il existe également une formule d'intégration par partie pour l'intégrale stochastique. Sans surprise, il faut ajouter un terme utilisant la variation quadratique, (ici un crochet de martingale).

**Proposition 12.1.6.** “Intégration par partie” Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  deux semimartingales continues

$$\int_0^t X_s dY_s = (X_t Y_t - X_0 Y_0) - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y \rangle_t$$

On peut comparer cette formule à l'intégration par partie en « analyse réelle ». Pour  $f, g \in \mathcal{C}^1$  on a

$$\int_0^y f(x)g(x)dx = [f(y)g(y) - f(0)g(0)] - \int_0^y f(x)g'(x)dx$$

On peut écrire “ $df(x) = f'(x)dx$ ” et “ $dg(x) = g'(x)dx$ ”. On remarque qu'il s'agit donc bien de la même formule mais auquel on a ajouté le crochet de martingale.

*Démonstration.* On pose  $f(x, y) = xy$  on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$ . D'après la formule d'Ito (en dimension 2) on a

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1 \times d\langle X, Y \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1 \times d\langle Y, X \rangle_s$$

soit

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Conclusion

$$\int_0^t X_s dY_s = (X_t Y_t - X_0 Y_0) - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y \rangle_t$$

□

## 12.2 Applications de la formule d'Ito

On énonce ici quelques conséquences de la formule d'Ito.

Pour  $B_t$  un mouvement brownien et  $\mu \in \mathbb{R}$  on avait vu que  $\exp(\mu B_t - \frac{\mu^2}{2}t)$  est une martingale continue. Ce qui suit en est une généralisation pour les martingales continue

**Lemme 12.2.1.** Soit  $M_t$  une martingale continue et  $\mu \in \mathbb{R}$  alors

$$\mathcal{E}(\mu M_t) := \exp(\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} \langle M, M \rangle_t)$$

est une martingale. (sous les conditions d'intégrabilité.)

*Démonstration.* Soit  $f(x, y) = \exp(\mu x - \frac{\mu^2}{2} y)$ . Alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mu f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\mu^2}{2} f(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \mu^2 f(x, y)$ . Il est inutile de calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$  car  $\langle \langle M, M \rangle, \langle M, M \rangle \rangle_t = 0$ , et  $\langle M, \langle M, M \rangle \rangle_t = 0$ . D'après la formule d'Ito avec  $X_t = M_t$  et  $Y_t = \langle M, M \rangle_t$  :

$$\begin{aligned} \exp(\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} \langle M, M \rangle_t) &= \exp(\mu M_0) + \int_0^t \mu \mathcal{E}(\mu M_s) dM_s \\ &\quad - \int_0^t \frac{\mu^2}{2} \mathcal{E}(\mu M_s) d\langle M, M \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \mu^2 \mathcal{E}(\mu M_s) d\langle M, M \rangle_s \end{aligned}$$

Conclusion

$$\exp(\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} \langle M, M \rangle_t) = \exp(\mu M_0) + \int_0^t \mu \mathcal{E}(\mu M_s) dM_s$$

C'est donc une martingale car  $M_t$  est une martingale et la définition de l'intégrale d'Ito pour les martingales. Plus généralement si  $f$  satisfait

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

alors  $f(M_t, \langle M, M \rangle_t)$  est une martingale. □

**Théorème 12.2.2.** (*Levy*) Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue avec  $M_0 = 0$ . Alors

$$M \text{ est un mouvement brownien} \Leftrightarrow \langle M, M \rangle_t = t$$

(En dimension  $d$ ) Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $M_0 = 0$ . Alors

$$M \text{ est un mouvement brownien} \Leftrightarrow \langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

*Démonstration.* Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue avec  $M_0 = 0$  tel que  $\langle M, M \rangle_t = t$ . Comme échauffement, montrons que  $M_t$  est une gaussienne de variance  $t$ . On calcule (la transformé de Laplace)

$$\mathbb{E}(e^{\mu M_t}) = \mathbb{E}(e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} t}) e^{\frac{\mu^2}{2} t} = \mathbb{E}(e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} \langle M, M \rangle_t}) e^{\frac{\mu^2}{2} t}$$

Par le Lemme précédent on a  $e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} \langle M, M \rangle_t}$  est une martingale et donc

$$\mathbb{E}(e^{\mu M_t - \frac{\mu^2}{2} \langle M, M \rangle_t}) = \mathbb{E}(e^{\mu M_0}) = 1.$$

On a alors bien que  $\mathbb{E}(e^{\mu M_t}) = e^{\frac{\mu^2}{2} t}$  qui est la même chose que pour une gaussienne de variance  $t$ .

Montrons que  $M_t$  est un mouvement brownien. Tout d'abords trivialement on a que  $M_t$  est continue. Ensuite soit  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , montrons que  $M_{t_i} - M_{t_{i-1}}$  sont des gaussiennes indépendantes. On calcule

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + \mu_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + \mu_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}}) - \frac{\mu_2^2}{2} t_n - t_{n-1}}) e^{\frac{\mu_2^2}{2} t_n - t_{n-1}} \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(-|\mathcal{F}_{t_{n-1}})) e^{\frac{\mu_2^2}{2} t_n - t_{n-1}} \\ &= \mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + \mu_{n-1} (M_{t_{n-1}} - M_{t_{n-2}})}) e^{\frac{\mu_2^2}{2} t_n - t_{n-1}} \end{aligned}$$

car  $e^{\mu_n M_t - \frac{\mu_n^2}{2} \langle M, M \rangle_t}$  est une martingale. Par direct itération on obtient :

$$\mathbb{E}(e^{\mu_1 M_{t_1} + \mu_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + \mu_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})}) = \prod e^{\frac{\mu_i^2}{2} t_i - t_{i-1}} = \prod \mathbb{E}(e^{\mu_i (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})}).$$

On obtient alors un produit et cela est vrai pour tout  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ . Donc les incréments sont indépendant. De plus ce sont bien tous des gaussiennes de variance respectivement  $t_i - t_{i-1}$ .  $\square$

*Remarque 12.2.3.* On peut comparer ce résultat au théorème centrale limite pour les martingales discrètes. L'hypothèse  $\langle M, M \rangle_t = t$  remplace ici  $\frac{1}{n} \sum \mathbb{E}((M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma^2$  et on obtient alors également une gaussienne à la limite.

**Théorème 12.2.4.** Soit  $M_t$  une martingale continue  $M_0 = 0$  et  $\langle M, M \rangle_t \rightarrow \infty$  p.s Alors il existe un mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  tel que

$$M_t = B_{\langle M, M \rangle_t}$$

**Théorème 12.2.5.** Soit  $B_t$  un mouvement brownien et  $\mathcal{F}_t$  la filtration canonique associée à  $B$ . Soit  $Z$   $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable borné dans  $L^2$ . Alors il existe un unique processus adapté  $H$  tel que

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^\infty H_s dB_s.$$

*Démonstration.* Idée :  $Z_t := \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_t)$ . On a

$$Z_t = \mathbb{E}(Z) + \int_0^t H_s dB_s$$

$\square$

## 12.3 Feuille d'exercice 14 : Formule d'Ito

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

**Exercice 12.3.1.** Soit  $X = M + A$  une semimartingale avec  $A$  un processus à variation finie et  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ . Et  $B_t$  un mouvement brownien.

- $\exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t) = 1 + \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s) dB_s$ .
- $\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(M_s) ds$ .
- $X_t^3 - X_0^3 = 3 \int_0^t X_s^2 dX_s + 3 \int_0^t X_s d\langle M, M \rangle_s$ ,
- $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$ .

**Solution 12.3.2.** En effet

1. Non, Il manque juste le facteur  $\gamma$  devant l'intégrale. Plus généralement c'est la martingale de la forme  $\exp(\gamma M_t - \frac{\gamma^2}{2} \langle M, M \rangle_t) = \exp(\gamma M_0) + \gamma \int_0^t \exp(\gamma M_s - \frac{\gamma^2}{2} \langle M, M \rangle_s) dM_s$ . On peut refaire le calcul avec la formule d'Ito :  $f(x, y) = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}y}$ ,  $\partial_x f = \gamma f$ ,  $\partial_y f = -\frac{\gamma^2}{2} f$   $\partial_{xx} f = \gamma^2$  et alors

$$\begin{aligned} \exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t) &= 1 + \gamma \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s) dB_s - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s) ds \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s) d\langle B, B \rangle_s \\ &= 1 + \gamma \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s) dB_s. \end{aligned}$$

2. Non, La formule d'Ito donne  $f(x) = \sin(x)$ ,  $\partial_x f = \cos(x)$  et  $\partial_{xx} f = -\sin(x)$ .

$$\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(M_s) d\langle M, M \rangle_s.$$

3. Oui, Avec  $f(x) = x^3$   $\partial_x f = 3x^2$  et  $\partial_{xx} f = 6x$ . Et on a que  $\langle X, X \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$ . La formule d'Ito donne bien

$$X_t^3 - X_0^3 = 3 \int_0^t X_s^2 dX_s + 3 \int_0^t X_s d\langle M, M \rangle_s$$

4. Oui, C'est l'intégration par partie avec  $X_t = B_t$  et  $Y_t = t$  où  $\langle X, Y \rangle_t = 0$  car  $Y$  est à variation finie. On aurait pu aussi simplement utiliser la formule d'Ito avec  $f(x, y) = xy$ .

**Exercice 12.3.3.** Soit  $X = M + A$  une semimartingale avec  $A$  un processus à variation finie et  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ . Et  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^2$ .

- $|M_t| = |M_0| + \int_0^t \text{sign}(M_s) dM_s$ .
- $f(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f(X_s) d\langle X, X \rangle_s$  est une martingale.
- $X_t^2 - M_t^2$  est une martingale.
- $X_t M_t = X_0 M_0 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s + \langle M, M \rangle_t$ .

**Solution 12.3.4.** En effet

1. Non, La formule d'Ito n'est valide que pour les fonctions  $\mathcal{C}^2$  et ne peut pas être utilisé pour  $x \rightarrow |x|$ . En particulier ici
2. Non, il rest le terme de variation fini de  $dX_s$ .
3. Non, Par exemple  $M = 0$  et  $A_t = t$ .
4. Non, La formule d'Ito avec  $f(x, y) = xy$  donne

$$\begin{aligned} X_t M_t &= X_0 M_0 + \int_0^t (M_s + A_s) dM_s + \int_0^t M_s dA_s \\ &\quad + \int_0^t M_s dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t d\langle X, M \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t d\langle M, X \rangle_s. \\ &= X_0 M_0 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s \\ &\quad + \int_0^t A_s dM_s + \langle M, M \rangle_t \end{aligned}$$

**Exercice 12.3.5.** Soit  $\mathbf{B}_t = (B_t, \tilde{B}_t)$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $0 < \epsilon < 1$ ,  $T = \inf\{t : \|\mathbf{B}_t + 1\| = \epsilon\}$  et  $\text{sign}(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $-1$  sinon

- $\int_0^t \tilde{B}_s dB_s = B_t \tilde{B}_t - \int_0^t B_s d\tilde{B}_s$ .
- $\log \|\mathbf{B}_{t \wedge T} + 1\|$  est une martingale.
- $\int_0^t (1_{T \leq t} - 1_{T > t}) dB_s$  est un mouvement brownien.
- $\int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s$  est un mouvement brownien.

**Exercice 12.3.6.** Soient  $M_s, \tilde{M}_s$  des martingale continues bornée dans  $L^2$  issue et  $H_s, \tilde{H}_s$  des processus adaptés et borné.

- $(H \cdot M)_t^2 = \int_0^t H_s^2 dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s$ .
- $\mathbb{E}((\int_0^t H_s dM_s)(\int_0^{t'} \tilde{H}_s d\tilde{M}_s)) = \mathbb{E}(\int_0^{t \wedge t'} H_s \tilde{H}_s d\langle M, \tilde{M} \rangle_s)$ .
- $f((H \cdot M)_t) = f(0) + \int_0^t H_s f'((H \cdot M)_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 f''((H \cdot M)_s) d\langle M, M \rangle_s$
- $\mathbb{E}(((H - \tilde{H}) \cdot (M - \tilde{M}))_t^2) \leq \mathbb{E}((H - \tilde{H})_t^2) \mathbb{E}((M - \tilde{M})_t^2)$ .

**Exercice 12.3.7.** Soit  $M_s$  une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$  issue de 0 à accroissement indépendant et un processus adapté  $H_s \in L^2(M)$ .

- $\langle M, M \rangle_t = \mathbb{E}(M_t^2)$  p.s.
- $\mathbb{E}(\exp(\gamma(M_t - M_s))) = \exp(\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}((M_t - M_s)^2))$ .
- $M_t - M_s$  est une gaussienne.
- Avec  $\mathbb{E}(M_t^2)$  dérivable et dont la dérivée  $F_t = \frac{d}{dt} \mathbb{E}(M_t^2) \geq \epsilon$  pour tout  $t$  pour un certain  $\epsilon > 0$ . alors  $(\frac{1}{F} \cdot M)_t$  est un mouvement brownien.

# Chapitre 13

## Equation différentielle stochastique

### 13.1 Equation différentielle stochastique

Lorsque l'on parle d'équation différentielle au sens usuelle on pense en générale à une fonction  $y$  fonction  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant

$$\frac{dy}{dt}(t) = b(t, y(t))$$

équation que l'on peut également écrire comme  $dy = b(t, y(t))dt$  ou sous forme intégrale  $y(t) = y(0) + \int_0^t b(s, y(s))ds$ .

Une équation différentielles stochastiques (EDS) est formellement la même chose sauf que l'on considère  $y$  une semimartingale et que l'on ajoute un terme de « bruit blanc », formellement la dérivé du brownien

$$dy = b(t, y(t))dt + \sigma(t, y(t))dB_t$$

où il faut comprendre cette équation avec la forme intégrale  $y(t) = y(0) + \int_0^t b(s, y(s))ds + \int_0^t \sigma(s, y(s))dB_s$  où le dernier terme est l'équation stochastique. Plus formellement une EDS c'est :

**Définition 13.1.1.** Soit  $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ . On note  $E(b, \sigma)$  l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

Une solution d'une équation différentielle stochastique consiste en

- Un espace de probabilité avec une filtration  $\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mu$
- Un mouvement brownien  $(B_t)$  adapté de dimension  $m$  ( $B_t \in \mathbb{R}^m$ )
- $y$  une semimartingale sur  $\mathbb{R}^d$  qui satisfait

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

On peut aussi imposer une condition initial  $X_0 = x$ .

Puisque la solution est un processus aléatoire il convient de rappeler qu'en probabilité il peut y avoir plusieurs sens à l'égalité : égalité en loi / égalité p.s. On aura donc aussi plusieurs sens quand on parle d'unicité de la solution :

**Définition 13.1.2.** (Unicité)

- On dira qu'il y a *unicité faible* si pour tout  $X^1$  et  $X^2$  solution de  $E(b, \sigma)$ ,  $X^1$  et  $X^2$  ont même loi.
- On dira qu'il y a *unicité trajectorielle* si pour tout  $X^1$  et  $X^2$  solution de  $E(b, \sigma)$  ayant le même espace de proba et le même mouvement brownien alors  $X_t^1 = X_t^2$  presque surement pour tout  $t$ .

Il se trouve que unicité trajectorielle  $\Rightarrow$  unicité en loi. Mais l'autre sens n'est pas vrai comme on peut le voir dans l'exemple ci dessous

**Exemple 13.1.3.** Soit  $\beta_t$  un mouvement brownien on pose

$$B_t = \int_0^t \text{signe}(\beta_s) d\beta_s$$

où  $\text{signe}(\beta_t) = 1$  si  $\beta_t \geq 0$  et  $\text{signe}(\beta_t) = -1$  si  $\beta_t < 0$ . Ici

$$\langle B, B \rangle_t = \int_0^t \text{signe}(\beta_s)^2 d\langle \beta, \beta \rangle_s = \int_0^t 1 ds = t$$

Par théorème de Levy  $B$  est un mouvement brownien. Considérons maintenant l'EDS

$$dX_t = \text{signe}(X_t) dB_t$$

Quel que soit la solution à cette équation on montre par le même argument que c'est un mouvement brownien. On a donc l'unicité faible. Cependant on peut remarquer que  $\beta_t$  et  $-\beta_t$  sont solution de cette équation stochastique. En effet  $dB_t = \text{signe}(\beta_s) d\beta_s$  et donc  $\text{signe}(\beta_s) dB_t = d\beta_s$ . De même on a  $\text{signe}(-\beta_s) dB_t = -d\beta_s$ . Il n'y a donc pas unicité trajectorielle.

### 13.2 Cas Lipschitzien

Dans cette partie on montre l'existence et l'unicité trajectorielle sous des hypothèses Lipschitziens :

- On supposera qu'il existe  $K > 0$  tel que
- $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$  pour tout  $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$
  - $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$  pour tout  $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$
  - $b(t, x) \leq K(1 + |x|)$   $\sigma(t, x) \leq K(1 + |x|)$  pour tout  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$

**Théorème 13.2.1.** *Sous hypothèse Lipschitzienne on a existence et unicité trajectorielle de  $E(b, \sigma)$ .*

Dans la suite on supposera  $d = 1$ , mais la preuve fonctionne également dans le cas  $d \geq 1$ . On se restreint à l'intervalle  $t \in [0, 1]$ . Si pour chaque intervalle  $[n, n+1]$  on montre l'existence et l'unicité trajectorielle, on pourra ensuite coller les solutions après les autres pour obtenir l'existence et l'unicité sur l'intervalle  $[0, \infty)$ .

### 13.2.0.1 Preuve de l'unicité

Soit  $X^1$  et  $X^2$  solution  $E(b, \sigma)$ . Calculons  $\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2)$ . Puisqu'ils sont solution de  $E$  on a

$$\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t b(t, X_s^1) - b(t, X_s^2) ds + \int_0^t \sigma(t, X_s^1) - \sigma(t, X_s^2) dB_s\right)^2\right)$$

en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) \leq 2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t b(t, X_s^1) - b(t, X_s^2) ds\right)^2\right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \sigma(t, X_s^1) - \sigma(t, X_s^2) dB_s\right)^2\right)$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \sigma(t, X_s^1) - \sigma(t, X_s^2) dB_s\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t (\sigma(t, X_s^1) - \sigma(t, X_s^2))^2 ds\right) \\ &\leq K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_s^1 - X_s^2|^2) ds \end{aligned}$$

Par Cauchy Swartz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t b(t, X_s^1) - b(t, X_s^2) ds\right)^2\right) &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t |b(t, X_s^1) - b(t, X_s^2)|^2 ds\right) \\ &\leq K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_s^1 - X_s^2|^2) ds \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) \leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_s^1 - X_s^2|^2) ds$$

**Lemme 13.2.2.** (Gronwall) Soit  $h$  une fonction borné dans  $[0, 1]$

$$h(t) \leq a + b \int_0^t h(s) ds$$

alors

$$h(t) \leq ae^{bt}.$$

*Démonstration.* Puisque  $h(s) \leq a + b \int_0^s h(u) du$

$$h(t) \leq a + b \int_0^t h(s) ds \leq a + tba + b^2 \int_0^t ds \int_0^s h(u) du$$

En itérant la formule  $n$  fois on obtient

$$h(t) \leq a + tba + \frac{1}{2}at^2b^2 + \dots + \frac{1}{n!}at^nb^n + \int_0^t \int_0^s \dots \int_0^{s_n} h(u) ds_1 ds_2 \dots$$

Le dernière terme converge vers 0 pour  $n \rightarrow \infty$  et finalement  $h(t) \leq ae^{bt}$ .  $\square$

Pour utiliser Gronwall, il faut que l'on ait une fonction bornée. On pose alors  $T = \inf\{X_t^1 > C, X_t^2 > C\}$  on a

$$\mathbb{E}(|X_{t \wedge T}^1 - X_{t \wedge T}^2|^2) \leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}(|X_{s \wedge T}^1 - X_{s \wedge T}^2|^2) ds$$

Par Gronwall avec  $a = 0$  on a finalement  $\mathbb{E}(|X_{t \wedge T}^1 - X_{t \wedge T}^2|^2) = 0$ .

il suffit maintenant de prenant  $C \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$  pour avoir  $\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|^2) = 0$  c'est à dire  $|X_t^1 - X_t^2|^2 = 0$  p.s. ce qui conclue la preuve de l'unicité.

### 13.2.0.2 Preuve de l'existence

L'idée est la même que pour une équation différentielle ordinaire : on utilise un point fixe de Picard. Plus précisément on construit une suite de processus aléatoires

$$\begin{aligned} - X_t^0 &= x \\ - X_t^1 &= x + \int_0^t b(s, X_s^0) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^0) dB_s \\ - X_t^n &= x + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s \text{ pour tout } n \geq 1 \end{aligned}$$

Remarquer que par récurrence immédiate pour tout  $n$ ,  $X^n$  est adapté. Si maintenant cette suite de processus  $X^n$  converge vers un certain  $X^\infty$  alors ce  $X^\infty$  sera solution de  $E(b, \sigma)$ .

Commençons par montrer qu'il n'y a pas explosion de la solution et montrons que pour tout  $t$ , il existes  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{E}(|X_t^n|^2) \leq C_n$ . On fait cela par récurrence : en developpant le carré on a

$$\mathbb{E}(|X_t^n|^2) \leq 3(x^2 + \mathbb{E}((\int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds)^2) + \mathbb{E}((\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s)^2))$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t^n|^2) &\leq 3(x^2 + K^2 \mathbb{E}(\int_0^t (1 + |X_s^{n-1}|)^2 ds) + K^2 \mathbb{E}(\int_0^t (1 + |X_s^{n-1}|)^2 ds)) \\ &\leq 3x^2 + 2K^2(1 + C_{n-1}) + 2K^2(1 + C_{n-1}) \\ &:= C_n \end{aligned}$$

Montrons maintenant pour un  $t > 0$  suffisamment petit, le processus  $(X_s^n)_{0 \leq s \leq t}$  converge pour  $n \rightarrow \infty$ . Pour cela on calcule  $\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) &\leq 2\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |\int_0^s b(u, X_u^{n-1})du - \int_0^s b(u, X_u^n)du|^2) \\ &\quad + 2\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u|^2). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |\int_0^s b(u, X_u^{n-1})du - \int_0^s b(u, X_u^n)du|^2) &\leq K^2\mathbb{E}(\int_0^s \sup_{u \leq t} |X_u^{n-1} - X_u^n|^2 du) \\ &\leq K^2 t \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2). \end{aligned}$$

On rappelle que pour tout  $M_t$  martingale et  $p > 1$  on a

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |M_s|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_s|^p)$$

Par définition de l'intégrale stochastique  $\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u$  est une martingale et donc avec  $p = 2$  on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u|^2) \\ &\leq 2^2 \mathbb{E}(|\int_0^s \sigma(u, X_u^{n-1})dB_u - \int_0^s \sigma(u, X_u^n)dB_u|^2) \\ &\leq 4\mathbb{E}(|\int_0^s K^2 |X_u^{n-1} - X_u^n|^2 du|) \\ &\leq 4K^2 t \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2) \end{aligned}$$

Conclusion on a

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \leq 5K^2 t \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2)$$

On choisit alors  $t < \frac{1}{5K^2}$ . De tel sorte que

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \leq \kappa \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^{n-1} - X_s^n|^2)$$

avec  $\kappa < 1$ . On a immédiatement

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2) \leq \kappa^n \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^0 - X_s^1|^2) \rightarrow 0$$

qui est sommable. Finalement pour tout  $m \geq n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_s^m|^2)^{1/2} &\leq \sum_{k \geq n}^{m-1} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^k - X_s^{k+1}|^2)^{1/2} \\ &\leq (1 - \kappa^{1/2})^{-1} \kappa^{n/2} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X_s^0 - X_s^1|^2)^{1/2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\sum_{k \geq n} \kappa^k = \kappa^n \sum_{k \geq 0} \kappa^k = (1 - \kappa)^{-1} \kappa^n$$

La suite  $(X_s^n)_{0 \leq s \leq t}$  forme donc une suite de Cauchy dans  $L^2$ . Il existe donc  $(X_s^\infty)_{0 \leq s \leq t}$  telle que  $X^n$  converge vers  $X^\infty$ .

Quatrième partie

Corrections des Exercices et  
Examens

# Chapitre 14

## Corrections des Exercices

### 14.1 Feuille d'exercice 1 : Rappel de probabilité.

Cette première série est assez longue et doit être vu à la fois comme une fiche de révision sur vos précédents cours de probabilités et comme une boîte à outils qui pourra être utilisée tout le long du cours. Il y a beaucoup de questions et beaucoup de notions donc prenez le temps pour les revoir et les réassimiler.

Dans chacun des exercices suivants dites pour chacune des affirmations si elle est vraie ou fautive et expliquez pourquoi.

**Exercice 14.1.1.** (Espaces mesurables) Soit  $\Omega$  un ensemble. Les tribus et fonctions ci dessous sont définies sur  $\Omega$ .

1. Soit  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux tribus telle que  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$  alors toute fonction  $\mathcal{F}_1$  mesurable est  $\mathcal{F}_2$  mesurable.
2. Soit  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux tribus et  $\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Alors pour tout  $A \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ ,  $A \in \mathcal{F}_1$  ou  $A \in \mathcal{F}_2$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire,  $\sigma(X)$  la tribu engendrée par  $X$  et  $f$  une fonction continue  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f(X)$  est une fonction  $\sigma(X)$  mesurable.
4. Soit  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de fonction  $\mathcal{F}$  mesurables et  $f$  une fonction telle que  $\forall \omega \in \Omega \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = f(\omega)$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{F}$  mesurable.

**Exercice 14.1.2.** (Espérance)

1.  $\mathbb{E}(\exp(X)) \leq \exp(\mathbb{E}(X))$ .
2.  $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  (ie : si  $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$  alors  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ ).
3.  $\mathbb{E}(\liminf X_n) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n)$
4. Si  $X > 0$ , alors  $\mathbb{P}(X > 2) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(X)$ .

**Exercice 14.1.3.** (Convergence)

1. Si  $X_n \rightarrow X$  presque sûrement alors  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ .
2. Si  $X_n \rightarrow X$  dans  $L^2$  alors  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ .

3. Si  $X_n \rightarrow X$  en loi alors  $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$  pour tout  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.
4. Si  $X_n \rightarrow X$  dans  $L^1$  alors  $X_n \rightarrow X$  en probabilité.

**Exercice 14.1.4.** (Indépendance)

1. Pour  $X, Y$  indépendants  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .
2.  $X$  et  $Y$  sont indépendants si et seulement si  $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$  pour tout  $f, g$  mesurables et bornées.
3. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants,  $X$  et  $Z$  sont indépendants et  $Y$  et  $Z$  sont indépendants. Alors  $X, Y, Z$  sont indépendants.
4. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires iid tel que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) = 0$ .

**Exercice 14.1.5.** (Lois aléatoires usuelles)

1. La somme de 3 variables de bernoulli indépendantes de paramètre  $p$  donne une loi binomiale  $B(3, p)$ .
2. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables de bernoulli iid. On définit  $T = \inf\{i : X_i = 1\}$  (ie : la première apparition d'un 1). Alors  $T$  suit une loi géométrique.
3. La somme de deux variables aléatoires gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne.
4. La somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson.

## 14.2 Feuille d'exercice 2 : Espérance conditionnelle

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

**Exercice 14.2.1.** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires quelconque alors :

- $3X^4 + 2$  est  $\sigma(X)$  mesurable **Correct**
- $\sigma(X) \subset \sigma(X^2)$  **Faux**
- $Y$  est  $\sigma(Y^3)$  mesurable **Correct**
- $\sigma(X + Y, X - Y) = \sigma(X, Y)$  **Correct**

**Solution 14.2.2.** En effet

1. Oui, pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable (pour la tribu borélienne),  $f(X)$  est  $\sigma(X)$  mesurable.
2. Non, par exemple si  $X = \pm 1$ , alors  $X^2 = 1$  et  $\sigma(X^2)$  est la tribu grossière.
3. Oui, pour tout  $t \in \mathbb{R} : [Y \leq t] = [Y^3 \leq t^3] \in \sigma(Y^3)$ . Et réciproquement pour tout  $u \in \mathbb{R} [Y^3 \leq u] = [Y \leq \text{signe}(u)|u|^{1/3}] \in \sigma(Y)$ .

4. On a immédiatement que  $X + Y$  et  $X - Y$  sont  $\sigma(X, Y)$  mesurable. Donc  $\sigma(X + Y, X - Y) \subset \sigma(X, Y)$ . De même  $X = \frac{1}{2}(X + Y + X - Y)$  et  $Y = \frac{1}{2}(X + Y - X + Y)$  sont  $\sigma(X + Y, X - Y)$  mesurable. Donc  $\sigma(X, Y) \subset \sigma(X + Y, X - Y)$ .

**Exercice 14.2.3.** On pose  $f(x) = |x| - 1$  pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\mathcal{F}$  est la tribu borélienne sur  $[-1, 1]$  avec la mesure  $\mu(dx) = \frac{1}{2}dx$  et  $\mathcal{B} = \sigma([\frac{k}{13}, \frac{k+1}{13})_{k \in [-13, 12] \cap \mathbb{Z}}$ . On note  $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$  :

- $\mathbb{E}(g) = -1/2$  **Correct**
- $g$  est négatif. **Correct**
- $\inf g \geq -1$  **Correct**
- $g$  est continue sur  $[-1, 1]$  **Faux**

**Solution 14.2.4.** En effet

1. Oui, on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| - 1 = -\frac{1}{2}$ .
2. Oui  $f \leq 0$  sur  $[-1, 1]$ , alors  $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \leq 0$
3. Oui  $f \geq -1$  sur  $[-1, 1]$  alors  $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \geq -1$
4. Non,  $g$  est une fonction étagée constante sur les intervalles  $[\frac{k}{13}, \frac{k+1}{13})$

**Exercice 14.2.5.** Soit les tribus  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ .

- Soit  $Z$  bornée et  $\mathcal{B}$  mesurable et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Si  $X_n \rightarrow Y$  p.s. alors  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})Z) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})Z)$  p.s. **Faux**
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$ . **Correct**
- Si  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et  $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  alors  $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2) \leq \mathbb{E}((X - Y)^2)$ . **Correct**
- Si  $X \geq \epsilon > 0$  et  $Y$  est  $\mathcal{B}$  mesurable. Alors  $\mathbb{E}(\frac{Y}{X}|\mathcal{B}) \geq \frac{Y}{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}$ . **Faux**

**Solution 14.2.6.** En effet

- Non, Par exemple avec  $Z = 1$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ , il faut une condition supplémentaire (monotone, convergence dominée,...) pour que la convergence p.s implique la converge de l'espérance.
- Oui  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$  est déjà  $\mathcal{B}$  mesurable puisque  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ . On a donc immédiatement  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}')$
- Oui il s'agit d'une propriété de la projection orthogonal : elle minimise la distance  $L^2$  par rapport au sous espace. On peut la redémontré ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - Y)^2) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) \\ &\quad + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)^2) \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y$  est  $\mathcal{B}$  mesurable et par défintion de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) \\ &= \mathbb{E}(X(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) - Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc  $\mathbb{E}((X - Y)^2) \geq \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2)$ .

- Non, contre exemple  $Y = -1$  et  $\mathcal{B}$  la tribu grossière. Cependant la formule est correcte si  $Y$  est positive. En effet Puisque  $Y$  est  $\mathcal{B}$  mesurable on a  $\mathbb{E}(\frac{Y}{X}|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(\frac{1}{X}|\mathcal{B})$ . Alors par Jensen puisque  $\frac{1}{x}$  est convexe

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X}|\mathcal{B}) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}.$$

**Exercice 14.2.7.** Soit  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux tribus indépendantes.

- Si  $X$  est  $\mathcal{B}_1$  mesurable alors  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$  p.s. **Correct**
- Si  $X$  est à la fois  $\mathcal{B}_1$  mesurable et  $\mathcal{B}_2$  mesurable. Alors  $X$  est constante. **Correct**
- Pour tout  $Z \sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  mesurable on a  $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_1)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{B}_2)^2)$ . **Faux**
- Si  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$  p.s. alors  $X$  est indépendant de  $\mathcal{B}_2$ . **Faux**

**Solution 14.2.8.** En effet

- Oui. Puisque  $X$  est  $\mathcal{B}_1$  mesurable pour tout  $Z \mathcal{B}_2$  mesurable,  $X$  et  $Z$  sont indépendants. On a alors bien

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)Z)$$

et donc  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X)$  p.s par unicité de l'espérance conditionnelle.

- Oui. Si  $X$  est à la fois  $\mathcal{B}_1$  mesurable et  $\mathcal{B}_2$  mesurable alors elle est indépendante avec elle même et est donc constante. Pour la preuve soit  $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(\{X \geq a\} \cap \{X \geq a\}) = \mathbb{P}(X \geq a)^2$$

donc  $\mathbb{P}(X \geq a) = 0$  ou  $1$ .

- Non. contre exemple  $Z = 1$  donnerait  $1 = 1 + 1$ .
- Non. Contre exemple sur  $\{1, 2, 3, 4\}$  avec  $\mu$  la mesure uniforme,  $X(1) = 1, X(2) = -1, X(3) = X(4) = 0$  et  $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ . Alors on peut vérifier que  $\mathbb{E}(X) = 0$  et que  $\mathbb{E}(X1_{\{1,2\}}) = \mathbb{E}(X1_{\{3,4\}}) = 0$  et donc que  $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = 0$ . Mais que que  $X$  n'est pas indépendant de  $\mathcal{B}$  puisque  $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{1, 2\}) = \frac{1}{4} \neq \mu(X = 1)\mu(\{1, 2\})$

### 14.3 Feuille d'exercice 3 : Martingales discrètes et temps d'arrêt

Pour chacun des exercices dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier.

**Exercice 14.3.1.** Soit  $X_n$  des variables iid telles que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$ , et on pose  $\mathcal{F}_n = \sigma((X_k)_{k \leq n})$  la filtration canonique associée à  $X_n$ . Dans ce qui suit martingales, surmartingales ou sousmartingales sont sous entendus pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- $A_n = \sum_{k=1}^n 3X_k$  est une martingale. **Correct**

- $B_n = \sum_{k=2}^{n+1} kX_k$  est une martingale. **Faux**
- $C_n = \sum_{k=1}^n k^2 X_k - 3n$  est une sousmartingale. **Faux**
- $D_n = (A_n)^4$  est une sousmartingale. **Correct**

**Solution 14.3.2.** En effet

1. Oui,  $(3X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des variables indépendentes de moyenne nulle.
2. Non  $B_n$  n'est pas  $\mathcal{F}_n$  mesurable
3. Non,  $\mathbb{E}(C_{n+1}|\mathcal{F}_n) = C_n - 3 < C_n$  est une surmartingale et non une sousmartingale
4. Oui, puisque  $A_n$  est une martingale et  $x \rightarrow x^4$  est une fonction convexe (Jensen).

**Exercice 14.3.3.** Soit  $\mathcal{F}_n$  une filtration et  $G_n$  un processus adapté.

- $T_1 = \min(k \in \mathbb{N} | G_k > 1)$  est un temps d'arrêt. **Correct**
- $T_2 = \min(k > T_1 | G_k < 0)$  est un temps d'arrêt. **Correct**
- $T_3 = \max(k \in \mathbb{N} | G_k = 0)$  est un temps d'arrêt. **Faux**
- $T_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } G_0 \leq 0 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$  est un temps d'arrêt. **Correct**

(temps d'arrêt évidemment sous entendu pour  $\mathcal{F}_n$ .)

**Solution 14.3.4.** En effet

1. Oui, comme dans le cours  $\{T_1 = n\} = \cap_{k < n} \{G_k \leq 1\} \cap \{G_n > 1\}$  est bien  $\mathcal{F}_n$  mesurable.
2. Oui,  $\{T_2 = n\} = \cup_{l < n} [\{T_1 = l\} \cap \cap_{l < k < n} \{G_k \geq 0\} \cap \{G_n < 0\}]$  est bien  $\mathcal{F}_n$  mesurable. En règle général, le temps de la  $k$ -ième visite d'un processus adapté est également un temps d'arrêt.
3. Non, voir cours.
4. Oui,  $T_4$  est  $\mathcal{F}_0$  mesurable. Donc en particulier pour tout  $k$ ,  $\{T_4 = k\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_k$ .

**Exercice 14.3.5.** Soit  $\mathcal{F}_n$  une filtration et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une martingale et  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sousmartingale, soit  $R_n$  et  $P_n$  des processus prédictibles positifs.

- $A_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_k$  est une martingale. **Faux**
- $B_n = \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})M_{k-1}$  est une martingale. **Correct**
- $C_n = -\sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})2R_k$  est une sousmartingale. **Faux**
- $D_n = \sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})(\sum_{i=1}^k P_i)$  est une sousmartingale. **Correct**

**Solution 14.3.6.** En effet

1. Non,  $M_k$  n'est pas prévisible.
2. Oui  $M_{k-1}$  est prévisible.
3. Non, puisque  $-2R_k \leq 0$  finalement  $C_n$  est une surmartingale et non une sousmartingale.
4. Oui,  $(\sum_{i=1}^k P_i)$  est prévisible positif.

**Exercice 14.3.7.** Soit  $\mathcal{F}_n$  une filtration,  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une martingale avec  $M_0 = 2$  p.s. et  $T$  un temps d'arrêt fini p.s.

- $\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = 2$  **Correct**
- $\mathbb{E}(M_T) = 2$  **Faux**
- Si  $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |M_n| < C$  p.s, alors  $\mathbb{E}(M_T) = 2$  **Correct**
- Si  $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < C$  alors  $\mathbb{E}(M_T) = 2$  **Faux**

**Solution 14.3.8.** En effet

1. Oui, puisque  $M_{n \wedge T}$  est une martingale, on a toujours  $\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(M_{0 \wedge T}) = \mathbb{E}(M_0) = 2$
2. Non, les hypothèses sont ici insuffisantes. Contre exemple : la marche aléatoire sur  $\mathbb{N}$ ,  $M_0 = 2$  avec le temps d'arrêt  $\min(k : M_k = 0)$ . Alors  $\mathbb{E}(M_T) = 0$ .
3. Oui, on a  $M_{n \wedge T} \rightarrow M_T$  car  $T$  est fini p.s. Donc par théorème de convergence dominé :  $2 = \mathbb{E}(M_{n \wedge T}) \rightarrow \mathbb{E}(M_T)$  et donc  $\mathbb{E}(M_T) = 2$ .
4. Non, même exemple qu'au dessus :  $\mathbb{E}(|M_{n \wedge T}|) = 2$  mais  $\mathbb{E}(M_T) = 0$ .

**Exercice 14.3.9.** Soit  $X_n$  une suite de variables aléatoires iid tel que  $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$  avec  $p > 1/2$  et  $\mathcal{F}_n$  la filtration canonique pour  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- $A_n = \sum_{k=1}^n X_k$  est une martingale **Faux**
- $B_n = 10 + \sum_{k=1}^n X_k + (2p - 1)n$  est une martingale **Correct**
- Soit  $T = \inf[k \in \mathbb{N}, A_k + 10 = 0]$ . Alors  $T < \infty$  p.s. **Correct**
- $\mathbb{E}(T) = \frac{10}{2p-1}$  **Correct**

**Solution 14.3.10.** En effet

1. Non,  $\mathbb{E}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^n X_k + \mathbb{E}(X_{n+1}) = A_n - (2p - 1) < A_n$ .
2. Oui,  $\mathbb{E}(B_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 10 + \sum_{k=1}^n X_k + (2p - 1)n + \mathbb{E}(X_{n+1}) + (2p - 1) = B_n$
3. Oui, Pour  $T$ , on peut remarquer que  $0 \leq \mathbb{E}((10 + A)_{(n+1) \wedge T}) \leq \mathbb{E}((10 + A)_{n \wedge T}) - \mathbb{P}(T > n)(2p - 1)$  et donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(T > n) < \infty$ .
4. De même on a en fait  $\mathbb{E}((2p + 1)(n \wedge T)) - \mathbb{E}((10 + A)_{n \wedge T}) = 10$  car  $B$  est une martingale. De plus

$$\mathbb{E}((2p + 1)(n \wedge T)) \rightarrow (2p + 1)\mathbb{E}(T)$$

par croissance monotone et  $\mathbb{E}((10 + A)_{n \wedge T}) \rightarrow 0$ .

## 14.4 Feuille d'exercice 4 : Convergence de martingales discrètes.

Pour chacun des exercices suivant, cocher les affirmations correctes.

**Exercice 14.4.1.** Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une surmartingale

- Si pour tout  $n$ ,  $M_n \geq -10$  alors il existe  $M_\infty$  telle que  $M_n \rightarrow M_\infty$  dans  $L^1$  **Faux**

- Si pour tout  $n$   $M_n \leq 10$  alors il existe  $M_\infty$  telle que  $M_n \rightarrow M_\infty$  p.s **Faux**
- Supposons que  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uniformément bornée, alors il existe  $M_\infty$  telle que  $M_n \rightarrow M_\infty$  p.s. **Correct**
- Supposons que  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uniformément bornée, alors il existe  $M_\infty$  telle que  $M_n \rightarrow M_\infty$  dans  $L^p$  pour tout  $p \geq 1$ . **Correct**

**Solution 14.4.2.** En effet

1. Non, prenez par exemple  $M_n$  la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  et le temps d'arrêt  $T = \inf[k : M_k = -10]$ . Alors  $M_{n \wedge T}$  est une martingale donc surmartingale et elle ici converge vers  $M_\infty = -10$  p.s. mais pas  $L^1$  ( $\forall n$   $\mathbb{E}(M_{k \wedge T}) = M_0$ )
2. Non, une sousmartingale converge p.s si est borné supérieurement et une surmartingale converge si elle est bornée inférieurement. Ici ni l'un ni l'autre et on peut construire le contre exemple suivant. Soit  $X_n$  est la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  et on pose  $M_n = -|X_n|$ . Alors  $x \rightarrow -|x|$  est concave, donc  $M_n$  est une surmartingale. Et il est facile de vérifier que  $M_n$  ne converge pas (et  $M_n \leq 10$  pour tout  $n$ ).
3. Oui, borné implique borné dans  $L^1$  et donc convergence p.s. puisque  $M_n$  est une surmartingale.
4. Oui, borné implique borné dans  $L^p$  et donc convergence  $L^p$  puisque  $M_n$  est une surmartingale.

**Exercice 14.4.3.** Soit  $f$  une fonction de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\int_0^1 |f(t)| dt < \infty$ . On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( 2^n \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t) dt \right) 1_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(x)$$

alors

- $f_n \rightarrow f$  p.s sur  $[0, 1]$ . **Correct**
- $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1$ . **Correct**
- Supposons de plus que  $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$ , alors  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1$ . **Correct**
- Supposons de plus que  $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$ , alors  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2$ . **Correct**

**Solution 14.4.4.** En effet

1. Oui, avec  $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)_{0 \leq k \leq 2^n-1}$  on a bien  $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$ . De plus pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(|f_n|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)|) \leq \mathbb{E}(|f|)$ . On a donc bien une martingale borné dans  $L^1$  qui converge donc p.s.
2. Oui : voir cours d'aujourd'hui
3. Oui, de même  $\mathbb{E}(|f_n|^2) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)|^2) \leq \mathbb{E}(|f|^2)$ . Et donc  $f_n$  est une martingale uniformément borné  $L^2$ . On a donc  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2$ . Or sur un espace de proba convergence en  $L^2$  implique convergence en  $L^1$ .
4. Oui, voir ci dessus.

**Exercice 14.4.5.** Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $[0, 1]$ ,  $\mu([0, 1]) = 1$ . On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \mu\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) 1_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(x)$$

- Il existe  $f$  tel que  $f_n \rightarrow f$  p.s sur  $[0, 1]$ . **Correct**
- Il existe  $f$  tel que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1$ . **Faux**
- Si  $\mu = \delta_{1/2}$  la mesure de dirac en  $1/2$ , alors  $f_n \rightarrow 0$  p.s. sur  $[0, 1]$  **Correct**
- Si  $\mu = \delta_{1/2}$  la mesure de dirac en  $1/2$ , alors  $f_n$  est borné dans  $L^2$ . **Faux**

**Solution 14.4.6.** En effet

1. Oui, avec  $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)_{0 \leq k \leq 2^n-1}\right)$  on a bien  $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$ . De plus pour tout  $n$ ,  $f_n \geq 0$  et  $\mathbb{E}(f_n) = 1$ . On a donc bien une martingale borné dans  $L^1$  qui converge donc p.s.
2. Non, on a toujours  $\mathbb{E}(f_n) = 1$ , et on devrait alors avoir  $\mathbb{E}(f) = 1$ . La question suivante donne un contre exemple.
3. Oui, soit  $x \in [0, 1]$  avec  $x \neq \frac{1}{2}$  alors il existe  $N$  tel que  $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2^N}$ . Alors pour tout  $n \geq N$ , on a  $f_n(x) = 0$ . On a donc bien  $f_n(x) \rightarrow 0 \forall x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ .
4. Non,  $f_n(x) = 2^n$  sur  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})$  et 0 sinon, donc  $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2^n} \times 2^{2n} = 2^n$  qui diverge. Autre preuve : avec la question précédente on a pas la convergence  $L^1$ , on ne peut donc pas avoir la convergence  $L^2$ . Et donc  $f_n$  n'est pas borné dans  $L^2$ .

**Exercice 14.4.7.** Soit  $M_n$  une martingale à accroissement indépendant avec  $M_0 = 0$  et on pose  $X_n = \exp(M_n)/\mathbb{E}(\exp(M_n))$ .

- $X_n$  est une martingale **Correct**
- $X_n$  converge p.s. **Correct**
- $\mathbb{P}(\exists k : X_k \geq 2) \leq \frac{1}{2}$ . **Correct**
- $\mathbb{P}(\exists k_1 < k_2 < k_3 : X_{k_1} \geq 2, X_{k_2} \leq 1, X_{k_3} \geq 2) \leq \frac{1}{4}$ . **Correct**

**Solution 14.4.8.** En effet

1. Oui, c'est un exercice vu précédement.  $\mathbb{E}(e^{M_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{((M_{n+1}-M_n)+M_n)}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{(M_{n+1}-M_n)})\mathbb{E}(e^{M_n})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{M_{n+1}})\frac{e^{M_n}}{\mathbb{E}(e^{M_n})}$ .
2. Oui, une martingale positive converge p.s.
3. Oui, c'est l'inégalité maximal de Doob. On peut refaire la preuve soit  $T_1$  le temps d'arrêt  $T_1 = \inf[k : X_k \geq 2]$  alors  $\mathbb{P}(\exists k : X_k \geq 2) = \mathbb{E}(1_{T_1 < \infty}) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(1_{T_1 < \infty} X_{T_1}) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(X_{n \wedge T_1}) = \frac{1}{2}$
4. Oui, ici il faut introduire également  $T_2 = \inf[k > T_1 : X_k \leq 1]$  et  $T_3 = \inf[k > T_2 : X_k \geq 2]$ . Alors d'après la question précédente  $\mathbb{E}(1_{T_2 < \infty} X_{T_2}) \leq \mathbb{E}(1_{T_2 < \infty}) \leq \mathbb{P}(T_1 < \infty) \leq \frac{1}{2}$ . Et donc avec  $H_n = 1_{T_2 < n \leq T_3}$ ,  $(H \cdot X)$  est une martingale et donc pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(1_{T_2 < \infty} (X_{T_2} + (H \cdot X)_n)) \leq \frac{1}{2}$  et finalement  $\mathbb{P}(T_3 < \infty) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(1_{T_3 < \infty} X_{T_3}) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(1_{T_2 < \infty} (X_{T_2} + (H \cdot X)_n)) \leq \frac{1}{4}$ .

**Exercice 14.4.9.** Soit  $\xi_n$  des variable aléatoires iid tel que  $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma^2$ . Soit  $(a_i)_{i \geq 1}$  une suite de réel tel que  $\sum_{i=1}^n |a_i| < \infty$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xi_k$ .

- $A_n = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$  converge dans  $L^2$  **Correct**
- $A_n = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$  converge p.s. **Correct**
- $S_n$  converge p.s **Correct**
- $S_n$  converge dans  $L^1$  **Correct**

**Solution 14.4.10.** En effet

1. Oui,  $\sum |a_i| < \infty$  donc  $|a_i| \rightarrow 0$  et il existe  $I$  tel que  $|a_i|^2 \leq |a_i|$  pour tout  $i \geq I$  et donc  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ . Maintenant  $\mathbb{E}(A_n^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma^2 < \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ . De plus, il est facile de voir que  $A_n$  est une martingale qui est donc borné uniformément dans  $L^2$ . Elle converge donc dans  $L^2$ .
2. Oui, martingale borné uniformément dans  $L^2$  donc converge p.s
3. Oui, même chose  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ ,  $S_n$  est donc une martingale uniformément borné dans  $L^2$  qui converge donc p.s et dans  $L^2$
4. Oui, convergence dans  $L^2$  implique convergence  $L^1$ .

## 14.5 Feuille d'exercice 5 : Chaîne de Markov et fonction harmonique.

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.5.1.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire usuelle sur  $\mathbb{Z}^2$  :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = (x \pm 1, y) | X_n = (x, y)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = (x, y \pm 1) | X_n = (x, y)) = \frac{1}{4}$$

et 0 dans les autres cas. On note  $Q$  la matrice de transition. Soit la fonction  $h(x, y) = 1_{y \geq 1}$ . On suppose  $X_0 = (0, 0)$ .

- $\mathbb{P}(y_2 \geq 1) = \frac{1}{4}$ . **Faux**
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \sum_{(x', y'), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}^2} Q((x, y), (x', y')) Q((x', y')(\tilde{x}, \tilde{y})) = 1$ . **Correct**
- $Q1 = 1$  (la fonction sur  $\mathbb{Z}^2$  constante égale à 1). **Correct**
- $[Q^2 h](0, 0) = \frac{1}{2}$ . **Faux**

**Solution 14.5.2.** En effet

1. Non, En comptant tous les chemins de longueur 2 issus de  $(0, 0)$  dont l'arrivée satisfait  $y \geq 0$  on trouve  $\mathbb{P}(y_2 \geq 1) = 5/16$
2. Oui puisque c'est une matrice de transfert :  $\sum_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}^2} Q((x', y')(\tilde{x}, \tilde{y})) = 1$  et  $\sum_{(x', y') \in \mathbb{Z}^2} Q((x, y), (x', y')) = 1$ .
3. Oui cette égalité est toujours vrai quelque soit la chaîne de Markov. Elle découle directement de  $\sum_{(x', y') \in \mathbb{Z}^2} Q((x, y), (x', y')) = 1$ .

4. On peut calculer  $[Qh](x, y) = \frac{1}{4}1_{y=0} + \frac{3}{4}1_{y=1} + 1_{y \geq 2}$  et ensuite

$$[Q^2h](x, y) = \frac{1}{16}1_{y=-1} + \frac{5}{16}1_{y=0} + \frac{11}{16}1_{y=1} + \frac{15}{16}1_{y=2} + 1_{y \geq 3}.$$

En particulier  $[Q^2h](0, 0) = \frac{5}{16}$ . Plus simplement on peut aussi utiliser que

$$[Q^2h](0, 0) = \mathbb{E}_{X_0=(0,0)}(h(X_2)) = \frac{5}{16}$$

**Exercice 14.5.3.** Soit une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{N}$  avec  $X_0 = x$  et la matrice de transition  $Q$  définit par

$$Q(y, y+1) = p_y \quad \text{et} \quad Q(y, y-1) = q_y$$

avec  $p_y + q_y = 1$ ,  $p_y, q_y > 0$  pour tout  $y > 0$ ,  $Q(0, 0) = 1$  et  $Q(y, z) = 0$  dans tous les autres cas. On pose  $T_0 = \inf\{k : X_k = 0\}$ .

- Si  $p_y < \frac{1}{2}$  pour tout  $y > 0$ , alors  $X_n$  est une surmartingale. **Correct**
- Si  $p_y < \frac{1}{2}$  pour tout  $y > 0$ , alors  $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$ . **Correct**
- La fonction

$$f(n) = \prod_{1 \leq y \leq n} \frac{q_y}{p_y}$$

est harmonique sur  $\mathbb{N}^*$ . **Faux**

- Dans le cas  $p_y = \frac{2}{3}$  et  $q_y = \frac{1}{3}$  pour tout  $y > 0$  et  $x = 3$  alors

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = \frac{1}{8}.$$

**Correct**

**Solution 14.5.4.** En effet

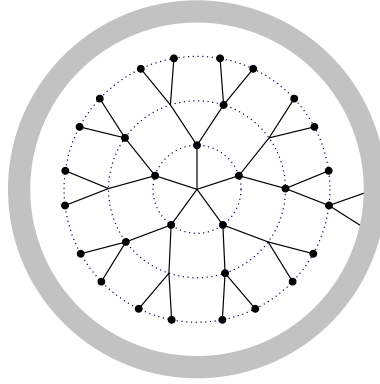
1. Oui  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = p_{X_n}(X_n + 1) + q_{X_n}(X_n - 1) = X_n + (p_{X_n} - q_{X_n}) = X_n + (2p_{X_n} - 1) \leq X_n$ .
2. Oui une surmartingale positive converge. Ici la seule limite possible est 0 car si  $X_n = y > 0$  alors  $X_{n+1} = y \pm 1$ . Donc  $X_n \rightarrow 0$  p.s et puisqu'elle est à valeur entière elle est constante égale à 0 à partir d'un certain rang. Donc  $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$ .
3. Non le développement ne fonctionne pas.
4. Oui on peut vérifier que  $h(n) = 2^{-n}$  est harmonique.

$$\frac{2}{3} \times 2^{-n-1} + \frac{1}{3} \times 2^{-n+1} = 2^{-n}$$

Alors  $2^{-X_n}$  est une martingale. Elle est positive et uniformément bornée. Elle converge donc p.s et dans  $L^1$ . Les seules limites possibles sont 0 (qui correspond à  $X_n \rightarrow \infty$ ) et 1 (pour  $X_n \rightarrow 0$ ). Le deuxième cas correspond à  $T_0 < \infty$ . On a alors

$$2^{-3} = \mathbb{E}(2^{-X_0}) = \mathbb{E}(2^{-X_{n \wedge T_0}}) = \mathbb{E}(2^{-X_{n \wedge T_0}} 1_{T_0 < \infty}) + \mathbb{E}(2^{-X_n} 1_{T_0 = \infty}).$$

Pour finir  $\mathbb{E}(2^{-X_{n \wedge T_0}} 1_{T_0 < \infty}) \rightarrow \mathbb{P}(T_0 < \infty)$  et  $\mathbb{E}(2^{-X_n} 1_{T_0 = \infty}) \rightarrow 0$ .



**Exercice 14.5.5.** Soit  $E$  un arbre régulier infini de racine  $x_0$ . Sauf à la racine tous les sommets ont le même nombre  $d$  de voisins. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire (standard) sur cet arbre. À chaque étape, elle saute d'un sommet à un sommet voisin de manière équiprobable :  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \frac{1}{d}$  si  $(x, y)$  est une arête du graphe et 0 sinon. On note  $r : E \rightarrow \mathbb{N}$  la distance dans le graphe par rapport à la racine ( $r(x)$  = nombre d'arêtes du plus court chemin de  $x$  à  $x_0$ ). On note  $T_0 = \inf\{n : X_n = x_0\}$

- $(r(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une sousmartingale.
- La fonction  $h(x) = (d - 1)^{-r(x)}$  est harmonique sur  $E \setminus \{x_0\}$ .
- Si  $X_0 = x$ ,  $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = (d - 1)^{-r(x)}$ .
- La fonction  $g(x) = \mathbb{P}(T_0 < \infty | X_0 = x)$  est une fonction harmonique sur  $E \setminus \{x_0\}$ .

**Solution 14.5.6.** En effet

1. Oui, il y a  $(d - 1)$  arête qui s'éloigne de la racine et seulement une qui s'en rapproche donc

$$\mathbb{E}(r(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \frac{d-1}{d}(r(X_n)+1) + \frac{1}{d}(r(X_n)-1) = r(X_n) + \frac{d-2}{d} \geq r(X_n)$$

2. Oui On calcule

$$\frac{d-1}{d}(d-1)^{-r(x)-1} + \frac{1}{d}(d-1)^{-r(x)-1} = (d-1)^{-r(x)}.$$

3. Oui Même raisonnement que la question 4 de l'exercice précédent..
4. Oui cela découle directement de la question 2 et 3. On peut également utiliser le théorème du cours :

$$g(x) = \mathbb{E}_x(1_{T_0 < \infty} u(X_{T_0}))$$

est une fonction harmonique. Ici on choisit  $u(x_0) = 1$ .

**Exercice 14.5.7.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov sur  $E$  un ensemble discret avec matrice de transition  $Q$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *irréductible* si pour

tout  $x, y \in E$ , il existe  $n$  tel que  $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$ . On dit que  $X_n$  est *recurrente* si  $\mathbb{P}(\exists n > 0, X_n = x | X_0 = x) = 1$  (le processus retourne à son point de départ presque sûrement). On admettra que si la chaîne de Markov est irréductible et récurrente alors elle visite tous les points de  $E$  une infinité de fois presque sûrement.

- La marche aléatoire usuelle sur  $\mathbb{Z}$  est récurrente.
- La fonction  $h(n) = n$  est harmonique sur  $\mathbb{Z}$  pour la marche aléatoire usuelle.
- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Alors toute fonction harmonique sur  $E$  et bornée inférieurement est constante.
- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Alors toute fonction harmonique sur  $E$  est constante.

**Solution 14.5.8.** En effet

1. Oui c'est un résultat très standard. Vous pouvez vous amuser à le redémontrer en utilisant la convergence de martingale et/ou le théorème de l'arrêt.
2. Oui  $n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n-1)$
3. Oui, Soit  $h$  une fonction harmonique bornée inférieurement donc quitte à ajouter une constante on peut supposer  $h$  positive. Alors  $h(X_n)$  est une martingale positive qui converge donc p.s. Puisque  $X_n$  visite une infinité de fois chacun des points de  $E$ , pour tout  $x \in E$ ,  $h(x)$  est une valeur d'adhérence. Or puisque  $h(X_n)$  converge il n'existe qu'une seule valeur d'adhérence. Conclusion  $h$  est constante.
4. Non, la marche aléatoire usuelle sur  $\mathbb{Z}$  donne un contre exemple (question 1 et 2).

## 14.6 Feuille d'exercice 6 : Martingale et mouvement brownien

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.6.1.** On considère une boîte  $B = [-3, 3] \times [-3, 3] \cap \mathbb{Z}^2$  et son bord

$$\partial B = [(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / B, \exists (x', y') \in B : |(x, y) - (x', y')| = 1]$$

On définit sur  $\partial B$  la fonction  $g$  :

$$g(x, y) = \begin{cases} 4 & (x, y) \in \{4\} \times [-3, 3] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère le problème de Dirichlet (discret) sur  $B$  dont la valeur au bord est donné par  $g$  :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in B, \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial B \end{cases}$$

où

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{|(x', y') - (x, y)|=1} u(x', y') - u(x, y).$$

Alors

- La marche aléatoire standard sur  $\mathbb{Z}^2$  issue de  $(0, 0)$  touche  $\partial B$  p.s. **CORRECT**
- $\|u\|_{L^\infty} \leq 4$ . **CORRECT**
- $u(0, 0) = 1$ . **CORRECT**
- $u(x, y) := \frac{1}{2}(x + 4)$  est une solution. **FAUX**

**Solution 14.6.2.** En effet,

1. Oui, la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$ ,  $X_n = (x_n, y_n)$  visite des points de plus en plus éloignés lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Plus formellement par le théorème centrale limite  $\frac{1}{\sqrt{n}}x_n$  converge vers une gaussienne donc pour  $n$  grand  $\mathbb{P}(|x_n| < \epsilon\sqrt{n}) \leq C\epsilon$  et donc  $\mathbb{P}(|x_n| \leq 4) \rightarrow 0$ . Autre méthode, avec  $T = \inf\{X_n \in \partial B\}$   $x_{n \wedge T}$  est une martingale bornée donc elle converge p.s. et à valeur entière donc constante à partir d'un certain rang et les seuls limite possibles sont donc les points du bord :  $T < \infty$ .
2. Oui, on a la formule

$$u(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)}(g(X_T))$$

qui est l'unique solution au problème de Dirichlet car  $T < \infty$  p.s. On a donc pour tout  $(x, y) \in B$ ,  $|u(x, y)| \leq \|g\|_\infty \leq 4$ .

3. Oui. On a ici un carré. Par la symétrie du problème on a que  $X_n$  touche en premier les cotés du haut, du bas, de la gauche ou de la droite sont équiprobable donc égale à  $\frac{1}{4}$ . Alors

$$u(0, 0) = \mathbb{E}_{(0,0)}(g(X_T)) = \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0.$$

4. Non,  $u$  ne vérifie pas les conditions au bords  $u(-3, -4) = 0$  par exemple.

**Exercice 14.6.3.** Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires telles que pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X + \beta Y}) = e^{2\alpha + \alpha^4 + \beta^2}$$

- $X$  et  $Y$  sont indépendantes. **CORRECT**
- $\mathbb{E}(X) = 2$ . **CORRECT**
- $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ . **FAUX**
- $Y$  est une gaussienne. **CORRECT**

**Solution 14.6.4.** En effet,

1. Oui, on a pour tout  $\mathbb{E}(e^{\alpha X + \beta Y}) = e^{2\alpha + \alpha^4} e^{\beta^2} = \mathbb{E}(e^{\alpha X})\mathbb{E}(e^{\beta Y})$  donc les variables sont indépendante. (Remarque : La classe des fonctions exponentielle est tout à fait suffisante pour caractérisé la loi aléatoire et vérifier l'indépendance. Si elle est plus rarement utilisée que les fonctions caractéristique c'est surtout parce que pour beaucoup de variables aléatoires l'exponentielle n'est pas intégrable. Si vous souhaitez malgré tout utiliser les fonctions caractéristique poser  $L(\alpha) = \mathbb{E}(e^{\alpha X})$  pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on peut vérifier que  $L(\alpha)$  est une fonction holomorphe et  $L(\alpha) = e^\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  conclusion  $L(\alpha) = e^{2\alpha + \alpha^4}$  sur  $\mathbb{C}$  et en particulier  $\mathbb{E}(e^{i\alpha X}) = e^{2i\alpha + \alpha^4}$ .)
2. Oui, c'est une astuce très courante "les moments sont donnés par les dérivées de la transformée de Laplace" :  $\frac{d}{d\alpha} \mathbb{E}(e^{\alpha X})|_{\alpha=0} = \mathbb{E}(\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha X}|_{\alpha=0}) = \mathbb{E}(X)$ . On a utilisé ici la convergence dominée. Donc  $\mathbb{E}(X) = \frac{d}{d\alpha} e^{2\alpha + \alpha^4}|_{\alpha=0} = 2$ .
3. Non, même chose  $\frac{d}{d\beta} \mathbb{E}(e^{\beta Y})|_{\beta=0} = \mathbb{E}(Y^2 e^{\beta Y}|_{\beta=0}) = \mathbb{E}(Y^2)$ . Donc  $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{d}{d\beta^2} e^{\beta^2}|_{\beta=0} = 2 \neq 1$ .
4. Oui, comme mentionner précédement la transformé de Laplace suffit à caractérisé une variable aléatoire et ici elle est égale à celle d'une gaussienne de variance 2.

**Exercice 14.6.5.** Soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  des variables gaussiennes iid avec  $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$  et  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

- Pour tout  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ ,  $(S_{k_1}, \dots, S_{k_m})$  est un vecteur gaussien. **CORRECT**
- $(S_{17} - S_5)$  et  $(S_{12} - S_9)$  sont indépendants. **FAUX**
- $\sum_{i=1}^m S_i$  est une variable gaussienne centré de variance  $\sigma^2 = m^3$ . **FAUX**
- $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$  converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance  $\frac{1}{3}$ . **CORRECT**

**Solution 14.6.6.** En effet,

1. Oui, car  $(S_{k_1}, \dots, S_{k_m})$  sont des combinaisons linéaire de variables gaussiennes iid.
2. Non  $\mathbb{E}(S_{17} - S_5) = \sum_{i=6}^{17} \mathbb{E}(\xi_i) = 0$ ,  $\mathbb{E}((S_{12} - S_9)) = \sum_{i=10}^{12} \mathbb{E}(\xi_i) = 0$  et  $\mathbb{E}((S_{17} - S_5)(S_{12} - S_9)) = \sum_{i=10}^{12} \mathbb{E}(\xi_i^2) + \sum_{i=10}^{12} \sum_{j=6, j \neq i}^{17} \mathbb{E}(\xi_i \xi_j) = 3 \neq 0$ .
3. Non,  $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j \geq 1} 1_{j \leq i} \xi_j = \sum_{j=1}^m (m+1-j) \xi_j$ . Puisqu'on a ici des variables centrée indépendante

$$\mathbb{E}((\sum_{j=1}^m (m+1-j) \xi_j)^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}((m+1-j)^2 \xi_j^2) = \sum_{j=1}^m j^2 = \frac{(2m+1)(m+1)m}{6}.$$

4. Oui  $\frac{1}{m^{3/2}} \sum_{i=1}^m S_i$  est donc une gaussienne centré de variance  $\frac{(2m+1)(m+1)m}{6m^3} \rightarrow \frac{1}{3}$  lorsque  $m \rightarrow \infty$ .

**Exercice 14.6.7.** Soit  $(\xi_i)_{i \geq 0}$  des variables aléatoires Bernoulli iid  $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}$  et  $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . Et on pose  $S_0 = \frac{1}{2}$  et  $S_{n+1} = S_n + \text{signe}(S_n) \xi_{n+1}$  où  $\text{signe}(S_n) = 1$  si  $S_n \geq 0$  et  $-1$  si  $S_n < 0$ .

- On a  $S_n = |\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i|$ . **FAUX**
- $S_n$  est une chaîne de Markov. **CORRECT**
- Pour tout  $n_1 < n_2$ ,  $S_{n_1}$  et  $S_{n_2} - S_{n_1}$  sont indépendantes. **CORRECT**
- En écrivant  $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$ , alors pour tout  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$   
 $(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \dots, S_{t_k}^{(n)})$  converge en loi lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers  $(U_{t_1}, U_{t_2}, \dots, U_{t_k})$   
 où  $(U_{t_{i+1}} - U_{t_i})$  sont des gaussiennes de variance  $t_{i+1} - t_i$ . **CORRECT**

**Solution 14.6.8.** En effet,

1. Non, par exemple  $\mathbb{P}(S_1 < 0) = \frac{1}{2}$ .
2. La loi de  $S_{n+1}$  ne dépend que de  $S_n$  et non des temps précédent.
3. Si je note  $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\tilde{S}_0 = \frac{1}{2}$  et  $\tilde{S}_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$  la marche aléatoire usuelle. On remarque que  $\tilde{S}_n$  a la même loi que  $S_n$ . Donc en particulier  $S_{n_1}$  et  $S_{n_2} - S_{n_1}$  sont indépendantes.
4. Même chose que précédemment,  $\tilde{S}_n$  a la même loi que  $S_n$  et par le cours  $(\tilde{S}_{t_1}^{(n)}, \tilde{S}_{t_2}^{(n)}, \dots, \tilde{S}_{t_k}^{(n)})$  convergent vers les gaussiennes décrites ici.

## 14.7 Feuille d'exercice 7, Martingale et mouvement brownien

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.7.1.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien.

- $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$ . **CORRECT**
- $(2B_1 - B_2, B_1 + B_3, B_2 - B_3)$  est un vecteur gaussien **CORRECT**
- $\int_0^1 B_s ds$  est une variable gaussienne de variance 1. **FAUX**
- $B_s - sB_1$  et  $B_1$  sont indépendants. **CORRECT**

**Solution 14.7.2.** En effet .

1. Oui, Si  $s \leq t$  on a  $\mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) = s + 0$  car  $B_s$  est de variance  $s$  et  $B_s, B_t - B_s$  sont indépendants de moyenne nulle.
2. Oui,  $(B_1, B_2, B_3)$  est un vecteur gaussien donc ses combinaisons linéaires sont aussi des vecteurs gaussiens.
3. La variance n'est pas correct.  $(B_s)$  est une fonction continue donc on peut écrire l'intégrale comme une somme de Riemann  $\int_0^1 B_s ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}}$ .  
 Pour tout  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} (B_{\frac{i+1}{n}} - B_i) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-i)(B_{\frac{i+1}{n}} - B_i)$$

c'est donc une gaussienne comme somme de gaussienne indépendante, centrée et de variance  $\sum_{i=0}^{n-2} (n-i)^2 \frac{1}{n} \sim \frac{n^2}{3}$ . Donc la  $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}})$  est une suite de gaussienne centrée dont la variance converge vers  $\frac{1}{3}$ .

4. Oui,  $\mathbb{E}(B_1(B_s - sB_1)) = \mathbb{E}(B_1B_s) - s\mathbb{E}(B_1^2) = 0$ . Donc puisqu'on a affaire un vecteur gaussien,  $B_s - sB_1$  et  $B_1$  sont indépendants.

**Exercice 14.7.3.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien.

- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ . **CORRECT**
- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,A]} B_t > AM) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)$ . **FAUX**
- $\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty) = 1$ . **CORRECT**
- $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M, \sup_{t \in [1,2]} B_t > M + B_1) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)^2$  **CORRECT**

**Solution 14.7.4.** En effet .

1. Oui, Pour tout  $\omega \in \Omega$   $B_s(\omega)$  est continue donc bornée., autrement dit  $\{\omega : \forall N \in \mathbb{N}, \sup_{t \in [0,1]} B_t(\omega) > N\} = \emptyset$ . Alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t(\omega) > M) = \mathbb{P}(\cap_{N \in \mathbb{N}} N, \sup_{t \in [0,1]} B_t(\omega) > N) = 0.$$

2. Non, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,A]} B_t > AM) &= \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_{At} > AM) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt{A}} B_{At} > \sqrt{AM}) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > \sqrt{AM}) \end{aligned}$$

3.  $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} B_t = \infty$  est  $\mathcal{F}_{0^+}$  mesurable donc sa probabilité est soit 0, soit 1. Et pour tout  $M$  et  $\epsilon > 0$  on a  $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,\epsilon]} \frac{1}{t} B_t \geq M) \geq \mathbb{P}(\frac{1}{\epsilon} B_\epsilon \geq M) \geq \mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} B_1 \geq M) \rightarrow 1$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .
4. Oui,  $(B_t - B_1)_{t \geq 1}$ , est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_1$  donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M, \sup_{t \in [1,2]} B_t > M + B_1) &= \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M) \mathbb{P}(\sup_{t \in [1,2]} (B_t - B_1) > M) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,1]} B_t > M)^2 \end{aligned}$$

**Exercice 14.7.5.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien. Soit  $T = \inf[t \geq 1, B_t = 0]$ .

- Pour tout  $\delta > 0$ , p.s. il existe  $0 < t_1, t_2 < \delta$  tel que  $B_{t_1} > 0$  et  $B_{t_2} < 0$ . **CORRECT**
- Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists t \in (0, \delta), B_t = 0) = 1$ . **CORRECT**
- Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists t \in (0, \delta), B_{T+t} = 0) = 1$ . **CORRECT**
- Pour tout  $\delta > 0$ , p.s pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $B_t = 0$ , il existe  $t < t' < t + \delta$  tel que  $B_{t'} = 0$ . **FAUX**

**Solution 14.7.6.** En effet .

1. Oui, pour tout  $\delta > 0$ , on  $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,\delta]} B_t > 0) = 1$  et par symmétrie  $\mathbb{P}(\inf_{t \in [0,\delta]} B_t < 0) = 1$ .

2. Oui, Puisque  $B_t$  est continue et que avec probabilité 1 il existe  $0 < t_1, t_2 < \delta$  avec  $B_{t_1} > 0$  et  $B_{t_2} < 0$ , alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $0 < t < \delta$  avec  $B_t = 0$ .
3. Oui par la propriété de Markov Forte  $B_{T+t} - B_T$  est un mouvement brownien. Avec  $B_T = 0$  on a donc

$$\mathbb{P}(\exists t \in (0, \delta), B_{T+t} - B_T = 0) = \mathbb{P}(\exists t \in (0, \delta), B_t = 0) = 1.$$

4. Non, contre exemple, soit  $S = \sup\{s \in (0, 1) : B_s = 0\}$  (ce n'est pas un temps d'arrêt). Puisque  $B_1 \neq 0$  avec probabilité 1,  $S < 1$  et donc par définition  $B_s \neq 0$  pour tout  $s \in (S, 1)$ . En fait si une fonction continue vérifiait cette propriété alors elle serait constante égale à 0. Si cela peut sembler en contradiction avec les propriétés précédentes il se trouve l'ensemble des points dans  $(0, 1)$  tel que  $B_s = 0$  est un ensemble non dénombrable et donc que l'on peut avoir une propriété presque sur pour chacun des zéros mais pas presque sur pour tous les zéros.

**Exercice 14.7.7.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  deux mouvements browniens indépendant. On définit le processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  par  $W_0 = 0$  et  $W_t = tB_{1/t}$ .

- $\hat{B}_t := B_{1-t} - B_1$  a la même loi qu'un mouvement brownien sur  $[0, 1]$ . **CORRECT**
- $\frac{1}{2}(B_t + \tilde{B}_t)$  est un mouvement brownien. **FAUX**
- $\mathbb{E}(W_s W_t) = s \wedge t$ , **CORRECT**
- $W_t$  converge en proba vers 0 pour  $t \rightarrow 0$ . **CORRECT**

**Solution 14.7.8.** En effet .

1. Oui, on a bien que  $\hat{B}_t$  est continue, que pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n$   $(\hat{B}_{t_1}, \dots, \hat{B}_{t_n})$  est un vecteur gaussien et pour  $s < t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{B}_s \hat{B}_t) &= \mathbb{E}(B_{1-s} B_{1-t} - B_{1-s} B_1 - B_{1-t} B_1 + B_1^2) \\ &= (1-t) - (1-s) - (1-t) + 1 \\ &= s \end{aligned}$$

C'est donc bien un mouvement brownien.

2. Non, On a  $\mathbb{E}((\frac{1}{2}(B_t + \tilde{B}_t))^2) = \frac{1}{4}(\mathbb{E}(B_t^2) + \mathbb{E}(\tilde{B}_t^2)) = \frac{t}{2}$ . Par contre  $\frac{1}{\sqrt{2}}(B_t + \tilde{B}_t)$  est bien un mouvement brownien.
3. Oui,  $\mathbb{E}(W_s W_t) = st\mathbb{E}(B_{\frac{1}{s}} B_{\frac{1}{t}}) = st \frac{1}{\max(s,t)} = \min(s, t)$ .
4. Oui,  $W_t$  est une gaussienne de variance  $t$ , donc converge en proba vers 0 lorsque  $t \rightarrow 0$ .

## 14.8 Feuille d'exercice 8, Martingale et mouvement brownien

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier si c'est le cas ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.8.1.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien. Pour tout  $u \geq 0$  on note  $T_u = \inf\{t : B_t = u\}$

- Soit  $0 < a < b$ ,  $T_a$  et  $T_b - T_a$  sont indépendants. **CORRECT**
- Pour tout  $a > 0$  et  $t > 0$ ,  $\mathbb{P}(T_a < t) = \mathbb{P}(T_1 \leq \frac{t}{a^2}) = \mathbb{P}(T_{\frac{a}{\sqrt{t}}} \leq 1)$ .  
**CORRECT**
- Pour tout  $s < t$ ,  $\mathbb{P}(T_1 \in [s, t]) = 2(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_1^\infty e^{-x^2/2s} dx)$ .  
**CORRECT**
- $\mathbb{E}(T_1) < \infty$ . **FAUX**

**Solution 14.8.2.** En effet

1. Oui, Par la propriété de Markov forte  $B_{t+T_a} - B_{T_a}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_{T_a}$ . Donc  $\tilde{T} = \inf\{t : B_{t+T_a} - B_{T_a} = b - a\}$  est indépendant de  $T_a$ . Puisque  $B_{T_a} = a$ , on a alors que  $\tilde{T} = \inf\{t : B_{t+T_a} = b\} = T_b - T_a$ .
2. Oui, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a < t) &= \mathbb{P}(\sup_{s \in [0, t]} B_s \geq a) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{u \in [0, \frac{t}{a^2}]} \frac{1}{a} B_{a^2 u} \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{u \in [0, \frac{t}{a^2}]} B_u \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq \frac{t}{a^2}) \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement d'échelle du mouvement brownien. On a également

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a < t) &= \mathbb{P}(\sup_{s \in [0, t]} B_s \geq a) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{u \in [0, 1]} \frac{1}{\sqrt{t}} B_{tu} \geq \frac{a}{\sqrt{t}}) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{u \in [0, 1]} B_u \geq \frac{a}{\sqrt{t}}) \\ &= \mathbb{P}(T_{\frac{a}{\sqrt{t}}} \leq 1) \end{aligned}$$

3. Oui on

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq t) &= \mathbb{P}(\sup_{u \in [0, t]} B_s \geq 1) \\ &= 2\mathbb{P}(B_t \geq 1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx \end{aligned}$$

De même  $\mathbb{P}(T_1 \leq s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_1^\infty e^{-x^2/2s} dx$  et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \in [s, t]) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t) - \mathbb{P}(T_1 \leq s) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_1^\infty e^{-x^2/2t} dx - \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_1^\infty e^{-x^2/2s} dx \end{aligned}$$

4. Non, Pour  $t \gg 1$  on a

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^1 e^{-x^2/2t} dx \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

Alors

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_1 \geq t) dt \approx \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}} dt = \infty$$

Autre preuve : Par symétrie on a  $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_{-1})$  et  $\mathbb{P}(T_1 < T_{-1}) = \mathbb{P}(T_{-1} < T_1) = \frac{1}{2}$ . On écrit

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_1 1_{T_1 < T_{-1}}) + \mathbb{E}(T_1 1_{T_{-1} < T_1}) = \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-1}) + \mathbb{E}((T_1 - T_{-1}) 1_{T_{-1} < T_1})$$

Par propriété de markov forte  $B_{t+T_{-1}} - B_{T_{-1}}$  est un mouvement brownien. On pose  $\tilde{T} = \inf\{t : B_{t+T_{-1}} - B_{T_{-1}} \geq 2\}$  Puisque  $B_{T_{-1}} = -1$  on a  $\tilde{T} = (T_1 - T_{-1})$  si  $T_{-1} < T_1$ . De plus  $\tilde{T}$  a la même loi que  $T_2$  et donc

$$\mathbb{E}(\tilde{T}) = \mathbb{E}((T_2 - T_1) + T_1) = 2\mathbb{E}(T_1).$$

Conclusion en utilisant que  $\mathbb{P}(T_{-1} < T_1) = \frac{1}{2}$  et que  $\tilde{T}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{T_{-1}}$  on a

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\tilde{T}) = \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-1}) + \mathbb{E}(T_1)$$

absurde si  $\mathbb{E}(T_1) < \infty$ .

**Exercice 14.8.3.** Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement brownien,  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$  et  $W_t = tB_{1/t}$ .

- Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, M]} B_t > \epsilon M) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ . **CORRECT**
- $W_t$  est un mouvement brownien. **CORRECT**
- Soit  $a > 0$ , pour tout  $t > 0$   $\mathbb{P}(\forall s > t : B_s < as) = \mathbb{P}(T_a > \frac{1}{t})$  **CORRECT**
- Pour tout  $A > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{P}(\exists s \in (0, \delta) : B_s > As^{1/2}) = 1$ . **CORRECT**

**Solution 14.8.4.** En effet

1. Oui,

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, M]} B_t > \epsilon M) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0, 1]} \frac{1}{\sqrt{M}} B_{Mt} > \epsilon \sqrt{M}) = \mathbb{P}(\sup_{t \in [0, 1]} B_t > \epsilon \sqrt{M})$$

qui tend vers 0 pour  $M \rightarrow \infty$ .

2. Oui, on a déjà vérifié que  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  est un vecteur gaussien avec  $\mathbb{E}(W_t W_s) = \min(s, t)$  pour tout  $s, t$  et que  $(W_s)_{s \in (0, \infty)}$  est continue. Il reste juste à vérifier la continuité en 0. On a

$$\sup_{t \in (0, \delta)} W_t = \max_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in (\delta 2^{-n-1}, \delta 2^{-n})} W_t \leq \max_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \sup_{t \in (\delta 2^n, \delta 2^{n+1})} B_t$$

mais on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in (\delta 2^n, \delta 2^{n+1})} 2^{-n} B_t > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [1, 2]} B_t > \frac{\epsilon 2^{n/2}}{\sqrt{\delta}}\right) \lesssim \exp\left(-\frac{\epsilon^2 2^{n-1}}{\delta}\right)$$

donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\sup_{t \in (\delta 2^n, \delta 2^{n+1})} 2^{-n} B_t > \epsilon) < \infty$  et même converge vers 0 lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Donc pour tout  $\epsilon$ ,  $\mathbb{P}(\sup_{t \in (0, \delta)} W_t > \epsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Ainsi  $W_t$  est bien continue en 0.

3. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall s > t : B_s < as) &= \mathbb{P}(\forall u < \frac{1}{t} : u B_{\frac{1}{u}} < a) \\ &= \mathbb{P}(\forall u < \frac{1}{t} : W_u < a) \\ &= \mathbb{P}(T_a > \frac{1}{t}) \end{aligned}$$

car  $W_u$  est un mouvement brownien.

4. On  $\mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} \{\exists s \in (0, \frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}} B_s > A\}) = 0$  ou 1 car c'est un ensemble  $\mathcal{F}_{0+}$  mesurable. Et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} \{\exists s \in (0, \frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}} B_s > A\}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cap_{n \leq N} \{\exists s \in (0, \frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}} B_s > A\}) \\ &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{N} B_{\frac{1}{N}} > A) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_1 > A) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} \{\exists s \in (0, \frac{1}{n}), \frac{1}{\sqrt{s}} B_s > A\}) = 1$ .

**Exercice 14.8.5.** (Pont Brownien) Soit  $(P_t)_{t \in [0, 1]}$  un pont brownien. C'est à dire qu'il a la même loi qu'un mouvement brownien  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  conditionnellement à  $B_1 = 0$ .

- $(P_t)_{t \in [0, 1]}$  a la même loi que  $(P_{1-t})_{t \in [0, 1]}$  (symmétrie). **CORRECT**
- Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ ,  $(P_{t_1}, \dots, P_{t_n})$  est un vecteur gaussien. **CORRECT**
- $P_{1/2}$  est une gaussienne de variance 1/2. **FAUX**
- Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ ,  $(P_{t_{i+1}} - P_{t_i})$  sont indépendants. **FAUX**

**Solution 14.8.6.** En effet

- Oui,  $B_{1-t} - B_1$  est un mouvement brownien. Donc conditionnellement à  $B_1 = 0$  on a bien que  $B_t$  et  $B_{1-t}$  ont la même loi et donc que  $P_t$  et  $P_{1-t}$  ont la même loi. Autre preuve avec la construction du mouvement brownien

$$P_t = \sum_n \sum_{k \leq 2^n} g_{n,k} \mathcal{N}_{k,n}$$

qui est bien symétrique sur  $[0, 1]$  (car  $g_{n,k}(t) = g_{n,2^n-k}(1-t)$ ).

- Avec la construction du mouvement brownien

$$P_t = \sum_n \sum_{k \leq 2^n} g_{n,k} \mathcal{N}_{k,n}$$

donne immédiatement que  $(P_{t_1}, \dots, P_{t_n})$  est un vecteur gaussien car  $\mathcal{N}_{k,n}$  sont des gaussiennes indépendante. Autre preuve on a la densité

$$\mathbb{P}(B_{t_1} \in [x_1, x_1+dx_1], \dots, B_{t_{n+1}} \in [x_{n+1}, x_{n+1}+dx_{n+1}]) = \prod_{i=1}^{n+1} e^{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}} dx_i$$

Donc en imposant,  $t_{n+1} = 1$  et  $B_1 = 0$  on a

$$\mathbb{P}(P_{t_1} \in [x_1, x_1+dx_1], \dots, P_{t_n} \in [x_n, x_n+dx_n]) = \left( \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}} \right) \times e^{-\frac{x_n^2}{2(1-t_n)}} dx_i$$

qui est bien une loi de vecteur gaussien (ie : de la forme  $\exp$ (“polynome à  $n$  variables de degré 2”)

- Non toujours avec la construction du mouvement brownien  $P_{1/2} = g_{0,1}(\frac{1}{2})\mathcal{N}_{0,1} = \frac{1}{2}\mathcal{N}_{0,1}$  a une variance de  $1/4$ . Autre preuve, avec la formule de la question précédente on a

$$\mathbb{P}(P_{1/2} \in [x_1, x_1 + dx_1]) = e^{-2x_1^2} dx_1$$

qui est une loi gaussienne de variance  $\frac{1}{4}$ .

- Non, par exemple  $(P_{1/2} - P_0) = P_{1/2} = -(P_1 - P_{1/2})$ .

**Exercice 14.8.7.** (Girsanov) Soit  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  un mouvement brownien,  $b \in \mathbb{R}$  et  $W_s = B_s + bs$  (mouvement brownien avec dérive). Soit  $X, Y$  deux variables gaussiennes avec  $\mathbb{E}(X) = 0$ ,  $\mathbb{E}(Y) = b$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}((Y - b)^2) = 1$

- Pour tout  $0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  sont des gaussiennes indépendantes de variances  $t_{i+1} - t_i$ . **CORRECT**
- $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{W_s}{s} = b$  p.s. **CORRECT**
- Pour tout  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}(1_{Y \in A} e^{-bY + \frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{X \in A})$  **CORRECT**
- Pour tout  $U \subset \mathcal{C}([0, 1])$  (mesurable),  $\mathbb{E}(1_{W \in U} e^{-bW_1 + \frac{b^2}{2}}) = \mathbb{E}(1_{B \in U})$  **CORRECT**

**Solution 14.8.8.** Voir cours.

## 14.9 Feuille d'exercice 9, Mouvement Brownien et problème de Dirichlet. Correction

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier ou donner un contre-exemple.

**Exercice 14.9.1.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien,  $a, b \geq 0$  et  $T_{a,b} = \inf\{t : B_t = at + b\}$

- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) = 1$ . **VRAI**
- Soit  $s < t, \mathbb{E}((B_t - B_s)e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) = 0$ . **FAUX**
- $\mathbb{E}(1_{T_{a,b} \leq t} e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_b^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} ds$ . **VRAI**
- Si  $a, b > 0$  alors  $\mathbb{P}(T_{a,b} = \infty) > 0$  **VRAI**

**Solution 14.9.2.** En effet

1. Oui, c'est l'égalité standard. Pour rappel puisque  $B_t$  est une gaussienne de variance  $t$  on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t} + \alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2t}} dx = 1.$$

2. Non, On note  $\mathbb{Q}_\alpha$  la probabilité  $\mathbb{P}$  multiplié par le poids  $e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$ . Par Girsanov  $\tilde{B}_t := B_t - \alpha t$  est un mouvement Brownien pour la probabilité  $\mathbb{Q}_\alpha$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - B_s)e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}((B_t - B_s)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s + \alpha(t - s)) \\ &= \alpha(t - s) \neq 0 \end{aligned}$$

3. Oui avec la même notation que précédemment pour  $\alpha = a$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{T_{a,b} \leq t} e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}(1_{T_{a,b} \leq t}) \\ &= \mathbb{Q}_a(\exists s \leq t : B_s = as + b) \\ &= \mathbb{Q}_a(\exists s \leq t : \tilde{B}_s = b) \\ &= \mathbb{Q}_a(\sup_{s \leq t} \tilde{B}_s \geq b) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_b^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} ds \end{aligned}$$

où on a de nouveau utilisé Girsanov et que  $\sup_{s \leq t} B_s$  a la même loi que  $|B_t|$  (principe de réflexion).

4. Oui, On a  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0) = 1$  (voir feuilles d'exercices précédentes) et donc  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} B_t - at = -\infty) = 1$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que

$\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} B_t - at \leq C) > 0$ . On a également que  $\mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\}) > 0$ . Finalement

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\forall t \geq 0, B_t = at + b) \\ & \geq \mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\} \cap \{\forall s \geq 1, B_s - as \leq 0\}) \\ & \geq \mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\} \cap \{\forall s \geq 1, B_s - B_1 - as \leq C\}) \\ & \geq \mathbb{P}(\{\forall s \leq 1, B_s \leq b\} \cap \{B_1 \leq -C\}) \mathbb{P}(\{\sup_{s \geq 0} B_s - as \leq C\}) \\ & > 0 \end{aligned}$$

On a utilisé que par la propriété de Markov simple  $B_t - B_1$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_1$ .

**Exercice 14.9.3.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien.

— Pour tout  $a \geq 0$

$$\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} \geq a) = \mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} \geq a).$$

**VRAI**

— Pour tout  $a \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} \geq a) = 0$  ou 1. **VRAI**

—  $\mathbb{P}(B_t - B_{t/2} \geq \sqrt{t \log \log t}) \geq \frac{e^{-a^2 \log \log t}}{2\sqrt{\pi \log \log t}}$  **VRAI**

—  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B_{2^n} - B_{2^{n-1}} \geq (1 - \epsilon)2^{n/2} \sqrt{\log \log 2^n}) = \infty$  **VRAI**

**Solution 14.9.4.** En effet

1. Oui, On note  $u = \frac{1}{t}$  et alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} \geq a) = \mathbb{P}(\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{uB_{\frac{1}{u}}}{\sqrt{2u \log \log \frac{1}{u}}} \geq a)$$

et on peut conclure car par inversion du temps  $W_u := uB_{\frac{1}{u}}$  est aussi un mouvement brownien donc

2. Oui, On a clairement  $\{\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{uB_{\frac{1}{u}}}{\sqrt{2u \log \log \frac{1}{u}}} \geq a\} \in \mathcal{F}_{0+}$  Donc par loi

du 0-1.  $\mathbb{P}(\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{uB_{\frac{1}{u}}}{\sqrt{2u \log \log \frac{1}{u}}} \geq a) = 0$  ou 1.

3. Oui, Pour une gaussienne de variance  $t/2$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{t}} ds &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{t} - \frac{2xs}{t} - \frac{s^2}{t}} ds \\ &\geq \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{2xs}{t}} ds \\ &\geq \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Ici avec  $x = a\sqrt{t \log \log t}$  on a

$$\mathbb{P}(B_t - B_{t/2} \geq a\sqrt{t \log \log t}) \geq \frac{e^{-a^2 \log \log t}}{2\sqrt{\pi \log \log t}}$$

4. Oui, Avec  $t = 2^n$ , on a

$$\mathbb{P}(B_{2^n} - B_{2^{n-1}} \geq a2^{n/2} \sqrt{\log n + \log \log 2}) \geq \frac{e^{-a^2(\log n + \log \log 2)}}{2\sqrt{\pi \log n + \log \log 2}} \sim n^{-a^2}$$

Donc la somme diverge si  $a < 1$ .

**Exercice 14.9.5.** Soit  $V$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $h$  une fonction harmonique sur  $V$ .

- Pour tout  $r > 0$  et  $x \in V$  tel que  $B_r(x) \subset V$ ,  $h(x) = \int_{B_r(x)} h(y) \mu(dy)$  où  $\mu$  est la mesure de probabilité uniforme sur la boule  $B_r(x)$ . **VRAI**
- Pour tout  $r > 0$  et  $x \in V$  tel que  $B_r(x) \subset V$   $h(x) \leq \max_{y \in S_r(x)} h(y)$ . **VRAI**
- La fonction  $h(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ . **VRAI**
- La fonction  $h(x, y) = \cosh(x) \cosh(y)$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ . **FAUX**

**Solution 14.9.6.** En effet

1. Oui

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} h(y) \mu(dy) &= \frac{n}{r^n} \int_{\rho=0}^r \int_{S_\rho(x)} h(y) d\sigma(y) \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{n}{r^n} \int_{\rho=0}^r h(x) \rho^{n-1} d\rho \\ &= h(x) \end{aligned}$$

car puisque  $h$  est harmonique chaque point  $x$  est égale à la moyenne sur les sphères centrées  $x$ .

2. Oui

$$h(x) = \int_{S_r(x)} h(y) d\sigma(y) \leq \max_{y \in S_r(x)} h(y)$$

- 3. Oui  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} h = 0$  et  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} h = 0$  donc  $\Delta h = 0$ . On peut aussi vérifier que l'intégrale sur une sphère de  $h$  donne bien par symétrie la valeur de  $h$  au centre de la sphère.
- 4. Non  $h(0, 0)$  est un minimum local strict. Ce il n'est donc pas harmonique. Autre solution : On peut calculer  $\Delta h = 2h \neq 0$ .

**Exercice 14.9.7.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^2$ . On définit le domaine  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ,  $T_1 = \inf\{t : \|B_t\| = 1\}$  et  $T_2 = \inf\{t : \|B_t\| = 2\}$ .

- $T = \min(T_1, T_2) < \infty$  p.s **VRAI**
- $h(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  est une fonction harmonique sur  $V$ . **VRAI**

- Pour tout  $(x, y) \in V$   $h(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)}(g(B_T))$  avec  $g(x, y) = 0$  si  $x^2 + y^2 = 1$  et  $g(x, y) = \log 4$  si  $x^2 + y^2 = 4$ . **VRAI**
- $\mathbb{P}_{(x,y)}(T_1 \geq T_2) = \log(x^2 + y^2)$  **FAUX**

**Solution 14.9.8.** En effet

1. Oui, un mouvement brownien ne reste pas borné.

$$\mathbb{P}(T = \infty) \leq \mathbb{P}(T_1 = \infty) = \mathbb{P}(\forall t : |B_t| \leq 2) = 0$$

2. Oui. On calcul

$$\frac{\partial}{\partial x} \log(x^2 + y^2) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} \log(x^2 + y^2) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(x^2 + y^2) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log(x^2 + y^2) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{donc } \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h = 0.$$

3. Oui, c'est la solution du problème de Dirichlet.
4. Non. Avec la question précédente on a que

$$\log(x^2 + y^2) = 0 \times \mathbb{P}(T = T_1) + \log 4 \times \mathbb{P}(T = T_2).$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(T_1 \leq T_2) = \frac{\log(x^2 + y^2)}{\log 4}.$$

## 14.10 Feuille d'exercice 10, Martingales continues. Correction

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non et justifier pourquoi.

**Exercice 14.10.1.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien,  $a > 0 > b$  et  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$  et  $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$ .

- $T_a \wedge T_b < \infty$  p.s. **VRAI**
- $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|b|}{a+|b|}$ . **VRAI**
- $\mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b}^2) = \mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$  **VRAI**
- $\mathbb{E}(T_a \wedge T_b) = |b|a$  **VRAI**

**Solution 14.10.2.** En effet :

1. Oui, Le mouvement brownien ne reste pas borné

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a \wedge T_b \geq t) &= \mathbb{P}(\forall s \leq t : b < B_s < a) \\ &\leq \mathbb{P}(b < B_t < a) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{b}{\sqrt{t}} < B_1 < \frac{a}{\sqrt{t}}\right) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

2. Oui, puisque  $B_t$  est une martingale, pour tout  $t$ ,  $0 = \mathbb{E}(B_0) = \mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b \wedge t})$ .  
Puisque  $T_a \wedge T_b < \infty$  p.s et  $|B_{T_a \wedge T_b \wedge t}| \leq \max a, |b|$ , par convergence dominée

$$0 = \mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b}) = a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_a < T_b))$$

et donc  $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{|b|}{a+|b|}$ .

3. Oui  $B_t^2 - t$  est une martingale donc pour tout  $t \geq 0$ ,

$$0 = \mathbb{E}(B_0^2 - 0) = \mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b \wedge t}^2) - \mathbb{E}(T_a \wedge T_b \wedge t).$$

On a de plus que  $\mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b \wedge t}^2) \rightarrow \mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b}^2)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  par convergence dominée avec  $|B_{T_a \wedge T_b \wedge t}|^2 \leq (\max a, |b|)^2$  et  $\mathbb{E}(T_a \wedge T_b \wedge t) \rightarrow \mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$  par croissance monotone. Conclusion  $\mathbb{E}(B_{T_a \wedge T_b}^2) = \mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$ .

4. À partir des questions précédentes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_a \wedge T_b) &= a^2\mathbb{P}(T_a < T_b) + b^2(1 - \mathbb{P}(T_a < T_b)) \\ &= \frac{a^2|b|}{a + |b|} + \frac{a|b|^2}{a + |b|} \\ &= a|b|. \end{aligned}$$

**Exercice 14.10.3.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue positive tel que  $M_t \rightarrow 0$  p.s,  $M_0 = a > 0$  et on note  $T_b = \inf\{t : M_t = b\}$  pour  $b \geq 0$ .

- Pour tout  $b > 0$ ,  $T_b < \infty$  p.s, **FAUX**
- Pour tout  $b > 0$ ,  $\mathbb{E}(M_{T_b}) = a$ , **FAUX**
- Soit  $b > a$  alors  $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq b) = \frac{a}{b}$ , **VRAI**
- $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t) \geq b) = e^{-2\mu b}$ . **VRAI**

**Solution 14.10.4.** En effet :

1. Non, Pour  $b > a$  ce n'est pas le cas. De fait puisque  $M_t \rightarrow 0$  p.s et  $M_t$  continue, il existe  $C > 0$  tel que  $\mathbb{P}(\forall s \geq 0, M_s < C) > 0$  et donc en particulier  $T_C = \infty$  sur un ensemble de mesure non nulle.
2. Non, Pour  $b < a$ , alors par continuité  $T_b < \infty$  p.s et donc  $\mathbb{E}(M_{T_b}) = b$ .
3. Oui, On a que pour tout  $t$ ,  $\mathbb{E}(M_{t \wedge T_b}) = \mathbb{E}(M_0) = a$ . Donc

$$a = b\mathbb{P}(T_b < t) + \mathbb{E}(1_{T_b > t}M_t).$$

On a  $\mathbb{P}(T_b < t) \rightarrow \mathbb{P}(T_b < \infty) = \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq b)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Et par convergence dominée  $\mathbb{E}(1_{T_b > t}M_t) \rightarrow 0$  car  $|1_{T_b > t}M_t| < b$  et  $M_t \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

4. Oui. On considère la martingale  $M_t := e^{2\mu B_t - 2\mu^2 t}$  alors  $M_0 = 1$  et avec la question précédente

$$\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t) \geq b) = \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} e^{2\mu(B_t - \mu t)} \geq e^{2\mu b}) = e^{-2\mu b}.$$

**Exercice 14.10.5.** Comme dans le premier exercice  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien,  $a > 0 > b$  et  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$  et  $T_b = \inf\{t : B_t = b\}$ .

- Pour tous  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\gamma(B_t - \alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t} + e^{-\gamma(B_t - \alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t}$  est une martingale **VRAI**
- Si  $a = |b|$  alors  $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a \wedge T_b}) = \cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)$ . **FAUX**
- Pour  $a, b$  quelconque  $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T_a \wedge T_b}) = \frac{\cosh(\frac{a+|b|}{2}\gamma)}{\cosh(\frac{a-|b|}{2}\gamma)}$ . **FAUX**
- Pour tout  $\lambda \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(e^{\lambda T_a \wedge T_b}) < \infty$ . **FAUX**

**Solution 14.10.6.** En effet :

1. Oui,  $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$  et  $e^{-\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$  sont deux martingales donc  $e^{-\gamma\alpha}e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} + e^{\alpha\gamma}e^{-\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$  est aussi une martingale comme combinaison linéaire de deux martingales.
2. Non. Simplement le terme de gauche est plus petit On note  $T = T_a \wedge T_b$ . Par symétrie on a  $\mathbb{P}(T_a = T) = \mathbb{P}(T_b = T) = \frac{1}{2}$ . On a alors

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}(e^{\gamma B_{t \wedge T} - \frac{\gamma^2}{2}t \wedge T}) \\ &= \mathbb{E}((1_{T_a=T} + 1_{T_b=T})(e^{\gamma B_{t \wedge T}} \times e^{-\frac{\gamma^2}{2}t \wedge T}) \\ &\rightarrow \mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T} (\frac{e^{\gamma a} + e^{-\gamma a}}{2})) \end{aligned}$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Donc  $\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T}) = \frac{1}{\cosh \gamma a}$ .

3. Non, on peut utiliser la question précédente. Par contre on peut faire un calcul similaire avec la martingale de la question 1 où on pose  $\alpha = \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\gamma\alpha} + e^{\gamma\alpha}) &= \mathbb{E}(e^{\gamma(B_{t \wedge T} - \alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t \wedge T} + e^{-\gamma(B_{t \wedge T} - \alpha) - \frac{\gamma^2}{2}t \wedge T}) \\ &= \mathbb{E}((1_{T_a=T} + 1_{T_b=T})(e^{\gamma(B_{t \wedge T} - \alpha)} + e^{-\gamma(B_{t \wedge T} - \alpha)})e^{-\frac{\gamma^2}{2}t \wedge T}) \\ &\rightarrow \mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T} (e^{\gamma(a-\alpha)} + e^{\gamma(b-\alpha)})) \end{aligned}$$

et on obtient que

$$\mathbb{E}(e^{-\frac{\gamma^2}{2}T}) = \frac{\cosh(\frac{a+b}{2})}{\cosh(\frac{a-b}{2})}.$$

4. Non, Pour simplifier on va supposer  $a = -b = 1$ . et on pose  $S_{1/2} = T_{1/2} \wedge T_{1/2} = \inf\{t, |B_t| = \frac{1}{2}\}$ . et  $S'_0 = \inf\{t > S_{1/2}, B_t = 0\}$ . Alors par propriété de Markov forte  $B_{t+S_{1/2}} - B_{S_{1/2}}$  est un mouvement brownien et donc  $\mathbb{P}(S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}) = \frac{1}{2}$  par symétrie. À  $S'_0$  on est revenue au point de départ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda T_1 \wedge T_{-1}}) &\geq \mathbb{E}(1_{S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}} e^{\lambda T_1 \wedge T_{-1}}) \\ &= \mathbb{E}(1_{S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}} e^{\lambda S'_0} e^{\lambda(T_1 \wedge T_{-1} - S'_0)}) \\ &= \mathbb{E}(1_{S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}} e^{\lambda S'_0}) \mathbb{E}(e^{\lambda(T_1 \wedge T_{-1})}) \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov forte  $B_{t+S'_0} - B_{S'_0}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_{S'_0}$  et donc conditionnellement

$S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}$  on a que  $T_1 \wedge T_{-1} - S'_0$  a la même loi que  $T_1 \wedge T_{-1}$ . Puisque  $\mathbb{E}(1_{S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}} e^{\lambda S'_0}) \rightarrow \infty$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$  il est possible de choisir  $\lambda$  tel que  $\mathbb{E}(1_{S'_0 < T_1 \wedge T_{-1}} e^{\lambda S'_0}) > 1$  et on obtient une contradiction.

**Exercice 14.10.7.** Soit  $M_t^{(\gamma)}$  une famille de martingales continues indexée par  $\gamma \in \mathbb{R}$  et “analytique” en  $\gamma$  c’est à dire qu’elle peut s’écrire  $M_t^{(\gamma)} = \sum_{i \geq 0} \gamma^i N_t^i$  où  $N_t^i$  sont des processus continus, bornés dans  $L^1$  sur tout intervalle de temps  $[0, t]$ .

- $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = 1 + \gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}(B_t^2 - t) + O_{\gamma \rightarrow 0}(\gamma^2)$ . **VRAI**
- $B_t^3 - 3tB_t$  est une martingale continue. **VRAI**
- Pour tout  $i$ ,  $N_t^i$  est une martingale continue. **VRAI**
- Pour tout  $k$ ,  $\frac{d^k}{d\gamma^k}[e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}]|_{\gamma=0}$  est une martingale continue. **VRAI**

**Solution 14.10.8.** En effet :

1. Oui, on fait le développement limité

$$e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = 1 + \gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{2}(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t)^2 + O_{\gamma \rightarrow 0}(\gamma^2).$$

2. Oui, on peut vérifier à la main

$$B_t^3 = (B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2 B_s + 3(B_t - B_s) B_s^2 + B_s^3$$

Donc

$$\mathbb{E}(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = 0 + 3(t - s)B_s + 0 + B_s^3$$

où on a utilisé que  $(B_t - B_s)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ ,  $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s$  et  $\mathbb{E}((B_t - B_s)^k) = 0$  pour  $k$  impair. On obtient bien que

$$\mathbb{E}(B_t^3 | \mathcal{F}_s) - 3t\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s^3 - 3sB_s.$$

3. Oui On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^i N_s^i &= M_s \\ &= \mathbb{E}(M_t^{(\gamma)} | \mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{\gamma \geq 0} \mathbb{E}(\gamma^i N_t^i | \mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^i \mathbb{E}(N_t^i | \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

et en identifiant les termes du développement limité lorsqu’on fait tendre  $\gamma \rightarrow 0$  on a  $N_s^i = \mathbb{E}(N_t^i | \mathcal{F}_s)$ . On peut justifier cet argument par récurrence. Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $\mathbb{E}(N_t^k | \mathcal{F}_s) \neq N_s^k$  alors

$$\mathbb{E}(N_t^k | \mathcal{F}_s) - N_s^k = \sum_{i > k} \gamma^{i-k} (N_s^i - \mathbb{E}(N_t^i | \mathcal{F}_s)) \rightarrow 0$$

lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ .

4. Oui. On peut écrire  $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} = \sum_{i \geq 0} \gamma^i N_i$  où  $\frac{d^k}{d\gamma^k} [e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}]|_{\gamma=0} = k! N_k$  et on peut conclure avec la question précédente. Vous pouvez vérifier que le cas  $k = 3$  redonne la question 2. Conclusion ici pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a construit un polynôme  $P_k(B_t, t)$  de degré  $k$  en  $B_t$  qui soit une martingale.

### 14.11 Feuille d'exercice 11, Variation finie et p-variation.

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.11.1.** Soit  $a$  une fonction à variation finie sur  $[0, 1]$  et  $g$  une fonction  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $b$  une fonction bornée alors

- $g \circ a$  est à variation fini. **VRAI**
- $h(t) := \int_0^t g(s) da(s)$  est à variation fini (sur  $[0, 1]$ ). **VRAI**
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 g(s) da(s)$  **VRAI**
- $\exists C > 0, |\sum_{k=1}^n b(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) - \sum_{k=1}^n b(\frac{k-1}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n}))| \leq C$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . **VRAI**

**Solution 14.11.2.** En effet,

1. Oui, Puisque  $a$  est à variation finie, l'image de  $a$  sur  $[0, 1]$  est contenue dans un compact. Puisque  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ , alors  $g$  est Lipschitz sur  $\text{Im}(a)$ . Soit  $\kappa$  ce coefficient de Lipschitz et  $C$  une borne pour la variation de  $a$ . On a

$$\sum_{i \leq n} |g(a(t_i)) - g(a(t_{i-1}))| \leq \sum_{i \leq n} \kappa |a(t_i) - a(t_{i-1})| \leq \kappa C$$

pour tout division en sous intervalles  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ .

2. Oui on note  $\mu = \mu_+ - \mu_-$  la mesure associé l'intégrale de  $a$  où  $\mu_+, \mu_-$  sont des mesure positives fini et  $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ . Pour tout  $s < t$  on a

$$|h(t) - h(s)| \leq \int_s^t |g(s)| d|\mu|(s)$$

et donc

$$\sum_{i \leq n} |h(t_i) - h(t_{i-1})| \leq \sum_{i \leq n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(s)| d|\mu|(s) \leq \|g\|_{L^\infty([0,1])} \int_0^1 d|\mu|(s).$$

On peut aussi directement dire que si  $|\mu|$  est une mesure fini et  $g$  borné alors  $|g||\mu|$  est une mesure finie.

3. Oui C'est une proposition du cours avec  $g$  est continue et  $a$  à variation fini. (Pour refaire la preuve avec  $g^{(n)} = \sum g(\frac{k}{n}) 1_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}$  la fonction constante par morceau qui approxime  $g$ . Alors

$$\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})(a(\frac{k}{n}) - a(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 g^{(n)}(s) da(s).$$

Et on peut conclure par convergence dominé puisque  $g^{(n)}(s) \rightarrow g(s)$  pour tout  $s \in [0, 1]$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  par continuité.)

4. Oui

$$\left| \sum_{k=1}^n b\left(\frac{k}{n}\right) \left( a\left(\frac{k}{n}\right) - a\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) - \sum_{k=1}^n b\left(\frac{k-1}{n}\right) \left( a\left(\frac{k}{n}\right) - a\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \right| \leq 2 \|b\|_{\infty} C$$

ou  $C$  est une borne pour la variation de  $a$ .

**Exercice 14.11.3.** Soit  $a$  et  $b$  des fonctions sur  $[0, 1]$  respectivement  $\frac{1}{p}$  Holder et  $\frac{1}{q}$  Holder.

- $a$  est à  $p$ -variation. **VRAI**
- Si  $p < q$  alors  $a$  est de  $q$ -variation nulle. **VRAI**
- Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  alors  $\sum_{k=1}^n \left( a\left(\frac{k}{n}\right) - a\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \left( b\left(\frac{k}{n}\right) - b\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \rightarrow 0$ . **VRAI**
- Soit  $(t_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}, k \leq n}$  tel que  $\frac{k-1}{n} \leq t_k^{(n)} \leq \frac{k}{n}$ . Alors si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  **FAUX**

$$\sum_{k=1}^n \left( a\left(\frac{k}{n}\right) - a\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) b(t_k^{(n)})$$

admet une limite pour  $n \rightarrow \infty$  indépendamment du choix de  $(t_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}, k \leq n}$ .

**Solution 14.11.4.** En effet,

1. Oui, Soit  $\alpha$  tel que pour tout  $s < t \in [0, 1]$   $\frac{|a(t) - a(s)|}{(t-s)^{\frac{1}{p}}} \leq \alpha$ . Alors

$$\sum_{i \leq n} |a(t_i) - a(t_{i-1})|^p \leq \sum_{i \leq n} \alpha^p |t_i - t_{i-1}|^{\frac{1}{p} p} \leq \alpha^p$$

quelque soit  $0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  donc  $a$  est à  $p$ -variation.

2. Oui,

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n} |a(t_i) - a(t_{i-1})|^q &\leq \sum_{i \leq n} \alpha^q |t_i - t_{i-1}|^{\frac{1}{p} q} |t_i - t_{i-1}|^{(q-p)} \\ &\leq \alpha^q \sup_{i \leq n} |t_i - t_{i-1}|^{q-p} \times 1 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  avec  $\sup_{i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ .

3. Oui, Ceci est toujours vrai pour  $a$  et  $b$  à  $p$ -variation et  $q$ -variation respectivement avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ . Ici on peut aussi vérifier directement en notant  $\beta$  tel que  $\forall s < t \in [0, 1]$ ,  $\frac{|b(t) - b(s)|}{(t-s)^{\frac{1}{q}}} \leq \beta$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( a\left(\frac{k}{n}\right) - a\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \left( b\left(\frac{k}{n}\right) - b\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\alpha}{n^{\frac{1}{p}}} \times \frac{\beta}{n^{\frac{1}{q}}} \\ &= \frac{\alpha\beta}{n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1}} \times 1 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

4. Non dans le cas d'égalité  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ce n'est pas vrai en général. Construire un contre exemple est un peu difficile L'exemple le plus simple aurait été de prendre le mouvement avec  $p = q = 2$  et vérifier que  $\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})B_{\frac{k}{n}}$  et  $\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})B_{\frac{k-1}{n}}$  n'ont pas la même limite. Malheureusement  $B$  n'est pas  $\frac{1}{2}$ -Holder et il faut donc travailler un peu plus.

**Exercice 14.11.5.** Soit  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables iid avec  $\mathbb{E}(Y_i) = 0$  et  $\mathbb{E}(Y_i^2) = 1$ . On pose  $S_n^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n Y_i$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

- $\exists M, \mathbb{P}(\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}| < M) \geq 1 - \epsilon$  pour tout  $N$  suffisamment grand. **FAUX**
- $\exists M, \mathbb{P}(\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}|^2 < M) \geq 1 - \epsilon$  pour tout  $N$  suffisamment grand. **VRAI**
- $K_n := (S_n^{(N)})^2 - \mathbb{E}((S_n^{(N)})^2)$  est une martingale. **VRAI**
- Pour  $N \rightarrow \infty$ , Pour tout  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$   $((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2 - \mathbb{E}((S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})^2))_{i \leq n}$  converge en loi vers  $(B_{t_i}^2 - t_i)_{i \leq n}$ . **VRAI**

**Solution 14.11.6.** En effet,

1. Non, On a

$$\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}| = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N |Y_k| \sim \sqrt{N} \mathbb{E}(|Y_1|) \rightarrow \infty$$

p.s par la loi forte des grands nombres. Donc pour tout  $M > 0 \mathbb{P}(\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}| < M) \rightarrow 0$ .

2. Oui, Ici encore avec la loi forte des grands nombres

$$\sum_{k=1}^N |S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |Y_k|^2 \rightarrow \mathbb{E}(|Y_1|^2)$$

p.s. Donc il suffit de choisir  $M > 1$ .

3. Oui, C'est un cas déjà rencontré dans un autre TD :  $S_n^{(N)}$  est à accroissement indépendant et de moyenne nulle. On peut le revérifier à la main  $\mathbb{E}((S_n^{(N)})^2) = \frac{n}{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((S_n^{(N)})^2 | \mathcal{F}_{n-1}) &= (S_{n-1}^{(N)})^2 + 2(S_{n-1}^{(N)}) \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{\sqrt{N}} | \mathcal{F}_{n-1}\right) + \frac{1}{N} \mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (S_{n-1}^{(N)})^2 + \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Et on a donc bien  $\mathbb{E}(K_n | \mathcal{F}_{n-1}) = K_{n-1}$ .

4. Oui On a bien que  $\mathbb{E}((S_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)})^2) = \frac{\lfloor Nt \rfloor}{N}$  converge vers  $t$  (uniformement sur  $\mathbb{R}$  et de manière déterministe). On sait que  $(S_{\lfloor Nt_i \rfloor}^{(N)})_{i \leq n}$  converge

vers  $(B_{t_i})_{i \leq n}$  en loi. Donc  $((S_{[Nt_i]}^{(N)})^2)_{i \leq n}$  converge vers  $(B_{t_i}^2)_{i \leq n}$  en loi. (Rappel de la preuve de cette propriété : Pour toute fonction continue bornée  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f((S_{[Nt_i]}^{(N)})_{i \leq n})) \rightarrow \mathbb{E}(f((B_{t_i})_{i \leq n}))$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $g$  une fonction continue bornée  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $f(x) = g(x^2)$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g((S_{[Nt_i]}^{(N)})_{i \leq n}^2)) &= \mathbb{E}(f((S_{[Nt_i]}^{(N)})_{i \leq n})) \\ &\rightarrow \mathbb{E}(f((B_{t_i})_{i \leq n})) \\ &= \mathbb{E}(g((B_{t_i})_{i \leq n})) \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .)

**Exercice 14.11.7.** Soit  $B_t$  et  $\tilde{B}_t$  deux mouvements brownien indépendant et  $A_t$  un processus à variation fini.

- $B_t^2$  est à variation fini. **FAUX**
- Pour  $p > 2$ ,  $\sum_{k=1}^n |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|^p \rightarrow 0$  en proba. **VRAI**
- $\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) \rightarrow 0$  en proba. **VRAI**
- $K_t := \int_0^t B_s dA_s$  est un processus à variation fini. **VRAI**

**Solution 14.11.8.** En effet,

1. Non, Si  $B_t^2$  était à variation fini alors  $B_t^2 - t$  aussi et puisque que c'est une martingale continue on aurait que  $B_t^2 - t$  est constant. Absurde.
2. Oui,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|^p\right) &= n\mathbb{E}(|B_{\frac{1}{n}}|^p) \\ &= n^{1-p/2}\mathbb{E}(|B_1|^p) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})$  a la même loi que  $B_{\frac{1}{n}}$  qui a la même loi que  $\frac{1}{\sqrt{n}}B_1$ . On a la convergence dans  $L^1$  et donc la convergence en probabilité.

3. Oui, Puisque  $B$  et  $\tilde{B}$  sont indépendants

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t \tilde{B}_t | \mathcal{F}_s) &= B_s \tilde{B}_s + \mathbb{E}((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) \tilde{B}_s \\ &\quad + \mathbb{E}((\tilde{B}_t - \tilde{B}_s) | \mathcal{F}_s) B_s + \mathbb{E}((B_t - B_s)(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s) | \mathcal{F}_s) \\ &= B_s \tilde{B}_s + \mathbb{E}((B_t - B_s)(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)) \\ &= B_s \tilde{B}_s \end{aligned}$$

et donc que  $B_t \tilde{B}_t$  est une martingale. On a alors que  $\langle B, \tilde{B} \rangle_t = 0$  et donc que

$$\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \rightarrow 0$$

en probabilité. Autre preuve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}})\right)^2\right) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\left((B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}})\right)^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left((B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})^2\right) \mathbb{E}\left((\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}})^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc converge vers 0 dans  $L^2$  donc en probabilité.

4. Oui,  $B_t$  est continue donc borné sur  $[0, 1]$  et donc  $\int_0^1 B_s dA_s$  est à variation finie sur  $[0, 1]$ .

## 14.12 Feuille d'exercice 12, Variation quadratique martingale continue. Correction

Pour chacun des exercices suivants, dites si les affirmations sont correctes ou non. Justifier alors ou donner un contre exemple.

Par défaut on supposera que les martingales satisfont  $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Exercice 14.12.1.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  deux mouvements brownien indépendant et  $(M_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  deux martingales continue issues de 0.

- Si  $\langle M, M \rangle = \langle N, N \rangle$  p.s alors  $M = N$  p.s. **FAUX**
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n B_{\frac{k}{n}} (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) - \sum_{k=1}^n B_{\frac{k-1}{n}} (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) \right| = 1$ . **VRAI**
- $\langle B, \tilde{B} \rangle_t = 0$ . **VRAI**
- $\langle 2B - \tilde{B}, 2B - \tilde{B} \rangle_t = 3t$ . **FAUX**

**Solution 14.12.2.** En effet,

1. Non, On peut choisir  $M = B$  et  $N = \tilde{B}$  alors  $\langle M, M \rangle_t = \langle N, N \rangle_t = t$  p.s pour tout  $t$ .
2. Oui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n (B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}})(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}) \right| = \langle B, B \rangle_1 = 1$$

en probabilité.

3. Oui, on peut vérifier que  $B_t \tilde{B}_t$  est déjà une martingale.

4. Non, On a

$$\begin{aligned} \langle 2B - \tilde{B}, 2B - \tilde{B} \rangle_t &= 4\langle B, B \rangle_t - 4\langle B, \tilde{B} \rangle + \langle \tilde{B}, \tilde{B} \rangle_t \\ &= 5t. \end{aligned}$$

**Exercice 14.12.3.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue,  $X_t$  un processus continu et  $S_\epsilon = \inf\{t \geq 0, \langle M, M \rangle_t \geq \epsilon\}$ .

- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$  alors  $X_1 = X_0$  p.s **FAUX**
- $\mathbb{E}((M_{t \wedge S_\epsilon} - M_0)^2) \leq \epsilon$  **VRAI**
- $\{\langle M, M \rangle_t = 0\} \subset \{M_t = M_0\}$  p.s. **VRAI**
- $\{M_t = M_0\} \subset \{\langle M, M \rangle_t = 0\}$  p.s. **FAUX**

**Solution 14.12.4.** En effet,

1. Non, ici on a simplement que la variation quadratique de  $X$  est nulle. C'est par exemple le cas pour  $X$  à variation finie.
2. Oui  $(M_t - M_0)^2 - \langle M, M \rangle_t$  est une martingale. Donc avec  $S_\epsilon$  un temps d'arrêt on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((M_{t \wedge S_\epsilon} - M_0)^2) &= \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_{t \wedge S_\epsilon}) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

par définition de  $S_\epsilon$ .

3. Oui, (rappel notation l'ensemble ici est  $\{\omega \in \Omega, \langle M, M \rangle_t(\omega) = 0\} \subset \Omega$ ). On réécrit  $\{\langle M, M \rangle_t = 0\} = \cap_{\epsilon > 0} \{\langle M, M \rangle_t \leq \epsilon\} = \cap_{\epsilon > 0} \{S_\epsilon \geq t\}$ . Fixons  $\eta, \epsilon > 0$ . Alors par la question précédent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{t \leq S_\epsilon\} \cap \{|M_t - M_0| > \eta\}) &\leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E}(1_{t \leq S_\epsilon} (M_t - M_0)^2) \\ &\leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E}((M_{t \wedge S_\epsilon} - M_0)^2) \\ &\leq \frac{\epsilon}{\eta^2}. \end{aligned}$$

On a alors que  $\mathbb{P}(\cap_{\epsilon > 0} \{t \leq S_\epsilon\} \cap \{|M_t - M_0| > \eta\}) = 0$  quelque soit  $\eta > 0$  et on peut conclure  $\mathbb{P}(\{\langle M, M \rangle_t = 0\} \cap \{|M_t - M_0| > 0\}) = 0$ .

4. Non, Par exemple soit  $B$  un mouvement brownien et  $T = \inf\{t \geq 1, B_t = 0\}$ . Alors  $M_t := B_{t \wedge T}$  est une martingale continue. On a que  $\mathbb{P}(M_2 = 0) = \mathbb{P}(T \leq 2) > 0$ . Donc  $\mathbb{P}(\{M_2 = M_0\}) > 0$ . Par contre  $\langle M, M \rangle_2 = \langle B, B \rangle_{2 \wedge T} = 2 \wedge T \geq 1$ . Donc  $\mathbb{P}(\{\langle M, M \rangle_2 = 0\}) = 0$ . En particulier on ne peut pas avoir  $\{M_2 = M_0\} \subset \{\langle M, M \rangle_2 = 0\}$ .

**Exercice 14.12.5.** Soient  $(X_t)_{t \geq 0}, (Y_t)_{t \geq 0}$  des semimartingales continues issue de 0.

- $\mathbb{E}(X_1 Y_1) = \mathbb{E}(\langle X, Y \rangle_1)$ . **FAUX**
- Si pour tout  $s \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} |Y_{\frac{k}{n}} - Y_{\frac{k-1}{n}}|^2) = 0$  alors  $Y$  est à variation finie. **VRAI**

- Si il existe  $A$  un processus à variation finie tel que  $X = Y + A$  alors  $\langle X, Y \rangle = \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle$ . **VRAI**
- Si  $X, Y$  sont des martingales avec  $\langle X, Y \rangle_t = 0$  alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. **FAUX**

**Solution 14.12.6.** En effet,

1. Non, Ceci n'est vrai que pour des martingales (ie si  $X$  et  $Y$  n'ont pas de composante à variation finie). Par exemple si  $X = A$  et  $Y = \tilde{A}$  deux processus à variation finie. Alors  $\langle X, Y \rangle = 0$  mais à priori  $\mathbb{E}(X_t Y_t) \neq 0$ .
2. Oui, On écrit  $Y = M + A$  avec  $M$  une martingale continue et  $A$  à variation fini. On a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} |Y_{\frac{k}{n}} - Y_{\frac{k-1}{n}}|^2 \right) = \langle Y, Y \rangle_s = \langle M, M \rangle_s = 0$$

pour tout  $s$ . Donc  $M = 0$  p.s (voir exercice précédent ou utiliser que  $\mathbb{E}(M_s^2) = 0$ ). Donc  $Y = A$  est à variation finie.

3. Oui, On a ici que  $X = M + \tilde{A}$  et  $Y = M + \tilde{A} + A$  avec  $M$  une martingale continue et  $A, \tilde{A}$  à variation finie. Alors

$$\langle M, M \rangle = \langle X, Y \rangle = \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle.$$

4. Non, On peut construire le contre-exemple suivant. Soit  $B, \tilde{B}$  deux mouvements browniens indépendants et  $X$  une bernoulli :  $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $\mathcal{F}_t = \sigma((B_s)_{s \leq t}, (\tilde{B}_s)_{s \leq t}, X)$ , en particulier  $X$  est  $\mathcal{F}_0$  mesurable. On pose  $M_t = X B_t$  et  $\tilde{M}_t = X \tilde{B}_t$  alors on vérifie que  $M$  et  $\tilde{M}$  sont des martingale et que  $\langle M, \tilde{M} \rangle = 0$  p.s. Par contre pour tout  $t > 0$  on a

$$\{M_t = 0\} = \{X = 0\} = \{\tilde{M}_t = 0\}$$

p.s. Les martingale  $M$  et  $\tilde{M}$  ne sont donc pas indépendantes.

**Exercice 14.12.7.** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale continue avec  $M_0 = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$  et  $S_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t = n\}$ .

- $\{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n = \infty\}$ . **VRAI**
- $\{T_n = \infty\} \subset \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$  p.s. **VRAI**
- Pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(M_{t \wedge S_n}^2) < \infty$ . **VRAI**
- $\{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} = \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$  p.s **VRAI**

**Solution 14.12.8.** En effet,

1. Oui, Puisque  $M$  est continue,

$$\begin{aligned} \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} &\subset \{\exists n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, |M_t| \leq n\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n = \infty\} \end{aligned}$$

Inversement soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $M_{t \wedge T_n}$  est une martingale uniformément bornée. Donc elle converge p.s. Donc

$$\begin{aligned} \{T_n = \infty\} \cap \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} &= \{T_n = \infty\} \cap \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge T_n} \text{ existe et est finie}\} \\ &= \{T_n = \infty\} \end{aligned}$$

c'est à dire  $\{T_n = \infty\} \subset \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$  et donc  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n = \infty\} \subset \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$ .

2. Oui On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{T_n = \infty} \langle M, M \rangle_\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_{T_n = \infty} \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n}) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_{t \wedge T_n}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_{t \wedge T_n}^2) \\ &\leq n^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

et donc  $\mathbb{P}(\{T_n = \infty\} \cap \{\langle M, M \rangle_\infty = \infty\}) = 0$ .

3. Oui, on a directement que

$$\mathbb{E}(M_{t \wedge S_n}^2) = \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_{t \wedge S_n}) \leq n < \infty.$$

4. Oui, Avec la partie 1 et 2 on a que  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} \subset \{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\}$ . Montrons l'autre inclusion. On a

$$\{\langle M, M \rangle_\infty < \infty\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\langle M, M \rangle_\infty < n\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n = \infty\}.$$

On a que  $M_{t \wedge S_n}$  est une martingale uniformément bornée dans  $L^2$  donc elle converge p.s. (et dans  $L^2$ ). Alors comme dans 1,

$$\begin{aligned} \{S_n = \infty\} \cap \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\} &= \{S_n = \infty\} \cap \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge S_n} \text{ existe et est finie}\} \\ &= \{S_n = \infty\} \end{aligned}$$

c'est à dire  $\{S_n = \infty\} \subset \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$  et donc  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n = \infty\} \subset \{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ existe et est finie}\}$ .

### 14.13 Feuille d'exercice 13 : Integrale stochastique. Correction

Rappel : Pour  $M$  une martingale continue borné dans  $L^2$ ,  $A$  un processus à variation fini et  $H \in L^2(M)$  un processus adapté, on notera  $\int_0^t H_s dM_s = (H \cdot M)_t$  l'intégrale stochastique associé à  $H$  et  $M$  et  $\int_0^t H_s dA(s) = (H \cdot A)_t$  l'intégrale pour la variation fini associé à  $H$  et  $A$ .

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.13.1.** Soit  $A$  un processus à variation finie,  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ .

- Soit  $F_t := \int_0^t \cos(M_s) dA(s)$ . Alors  $(F_t)_{t \geq 0}$  est à variation finie p.s. **VRAI**
- $(F_t)_{t \geq 0}$  est une martingale. **FAUX**
- Pour tout  $t \geq 0 : \mathbb{E}(\int_0^t \sin(M_s) dM_s) = 0$  **VRAI**
- $\sin(M_s) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s$ . **FAUX**

**Solution 14.13.2.** En effet

1. Oui,  $|\cos(M_s)| \leq 1$  donc  $F_t$  est à variation finie p.s. (On a même ici que la variation de  $F_t$  est bornée par celle de  $A_t$ . En notant  $\nu = \cos(M)d\mu$  on a bien que  $|\nu| = |\cos(M)||\mu| \leq |\mu|$  est une mesure finie.)
2. Non. Il s'agit ici d'une intégrale à variation finie.
3. Oui, Par définition de l'intégral stochastique  $N_t := \int_0^t \sin(M_s) dM_s$  est une martingale. Donc  $\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(N_0) = 0$ .
4. Non, On verra avec plus tard avec la formule d'Ito quelle est la formule correcte. Ici on peut se persuader que le terme de gauche n'est pas une martingale. Par exemple si  $M_0 = -\frac{\pi}{2}$  et  $M_s$  non constante égale à  $-\frac{\pi}{2}$  alors on aurait  $\mathbb{E}(\sin M_s) > -1 = \mathbb{E}(\sin M_0)$ . Absurde. Autre exemple avec  $M_s$  un mouvement brownien alors on peut voir que  $\sin(B_t)$  est borné mais qu'elle ne converge pas p.s

**Exercice 14.13.3.** Soit  $M_s$  une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$  et un processus adapté  $H_s \in L^2(M)$ .

- $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$  est une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$ . **VRAI**
- $\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M \rangle_t)$  **VRAI**
- Si il existe  $C \geq 0$  tel que  $H_s \leq C$  pour tout  $s \geq 0$  p.s alors il existe  $C'$  tel que  $(H \cdot M)_s \leq C'$  pour tout  $s \geq 0$  p.s. **FAUX**
- $\langle (H \cdot M), (H \cdot M) \rangle_t$  converge p.s. et dans  $L^1$ . **VRAI**

**Solution 14.13.4.** En effet

1. Oui, C'est directement la définition de l'intégrale stochastique.
2. Oui, En ne considérant que les martingales sur l'intervale  $[0, t]$  et non sur  $[0, \infty)$  c'est essentiellement l'isométrie entre  $\mathbb{H}$  avec la norme  $\|M\|_{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{E}(M_t^2)$  et l'espace  $L^2(M)$  avec la norme  $\mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M \rangle_t)$ .

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \|(H \cdot M)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|H\|_{L^2(M)} = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M \rangle_t).$$

On aurait pu aussi utiliser la propriété  $\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t = H^2 \cdot \langle M, M \rangle_t$  et donc

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}(\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t) = \mathbb{E}(\int_0^t |H_s|^2 d\langle M, M \rangle_t).$$

3. Non, Par exemple avec  $M$  un mouvement brownien et  $H_s = 1_{[0,1]}(s)$  alors  $(H \cdot M)_s = B_{s \wedge 1}$  est une gaussienne de variance  $s \wedge 1$  et n'est donc pas bornée.
4. Oui, Par définition  $\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t$  est monotone croissante positive. De plus on a pour tout  $t$

$$\mathbb{E}(\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s\right) = \|H\|_{L^2(M)} < \infty$$

**Exercice 14.13.5.** Soit  $B_t$  un mouvement brownien. Soit  $(H_s)_{s \geq 0}$  un processus adapté uniformément borné.

- $\mathbb{E}((H \cdot B)_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2) ds$  **VRAI**
- Supposons  $H_s = 1_{B_s \geq 0}$ . Alors pour tout  $s$  on a  $(H \cdot B)_s \geq 0$  p.s. **FAUX**
- $B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s$ . **FAUX**
- $2 \int_0^t B_s dB_s = B_t^2 - t$  **VRAI**

**Solution 14.13.6.** En effet

1. Oui. On a toujours

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((H \cdot B)_t^2) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t H^2 d\langle B, B \rangle_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t |H_s|^2 ds\right) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(|H_s|^2) ds \end{aligned}$$

où on utilise Fubini à la dernière ligne (car  $H^2$  est positive).

2. Non, Par définition  $(H \cdot B)$  est une martingale et donc  $\mathbb{E}((H \cdot B)_s) = \mathbb{E}((H \cdot B)_0) = 0$ . Supposons qu'elle soit positive, alors  $(H \cdot B)_s = 0$  p.s. Absurde. (avec probabilité non nulle,  $B \geq 0$  sur  $[1, 2]$  donc  $(H \cdot B) \neq 0$  avec une probabilité non nulle.
3. Non, Par définition de l'intégrale stochastique,  $\int_0^t B_s dB_s$  est une martingale et donc  $\mathbb{E}(2 \int_0^t B_s dB_s) = 0$  alors que  $\mathbb{E}(B_t^2) = t$ .
4. Oui. Lors de la construction de la variation quadratique on avait décomposé sous cette forme

$$M_t^2 = \sum_{i \leq n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + 2 \sum_{i \leq n} M_{t_{i-1}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$$

et on avait montré que  $\sum_{i \leq n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \rightarrow \langle M, M \rangle_t$  en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$  avec  $\max_{i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ . On a également que

$$\sum_{i \leq n} M_{t_{i-1}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \rightarrow \int_0^t M_s dM_s.$$

Dans le cas particulier ici  $\langle B, B \rangle_t = t$  et donc

$$B_t^2 = t + 2 \int_0^t B_s dB_s$$

**Exercice 14.13.7.** Soit  $a$  un processus à variation finie,  $M_s$  une martingale continue bornée dans  $L^2$  et  $H_s$  un processus adapté uniformément borné ( $\exists C > 0 : |H_s| < C$  p.s pour tout  $s \geq 0$ ) et continue. Soit  $0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{p_n}^{(n)} = t$  une segmentation de  $[0, t]$ . On supposera que  $\max_{i \leq p_n} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour tout  $n$  on choisit une suite  $0 \leq y_1^{(n)} \leq \dots \leq y_{p_n}^{(n)} \leq t$  tel que  $y_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)})$  pour tout  $i \leq p_n$ .

— Quelque soit le choix des  $y_i^{(n)}$  on a pour  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) \rightarrow \int_0^t H_s dA(s)$$

en probabilité. **VRAI**

— Quelque soit le choix des  $y_i^{(n)}$  on a pour  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \rightarrow \int_0^t H_s dM_s.$$

en probabilité. **FAUX**

— Si pour tout  $n, i$   $y_i^{(n)} = t_{i-1}^{(n)}$  alors  $K_k := \sum_{i=0}^k H_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$  est une martingale discrète. **VRAI**

— Supposons  $M$  borné. Si pour tout  $n, i$   $y_i^{(n)} = t_i^{(n)}$  alors pour  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{p_n-1} M_{y_i^{(n)}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \right) \rightarrow \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t)$$

**VRAI**

**Solution 14.13.8.** En effet

- Oui. C'est toujours le cas pour les intégrales à variation finies. (Rappel de la preuve

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{y_i^{(n)}}(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) - \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{\bar{y}_i^{(n)}}(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}) \right| &\leq \sup_{i \leq n} |H_{y_i^{(n)}} - H_{\bar{y}_i^{(n)}}| \sum |A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

par uniforme continuité de  $H$ .

- Non, Ici c'est essentielle que  $y_i = t_{i-1}$ . C'est l'équivalent que le processus soit prévisible lorsqu'on construit une martingale dans le cas discret. Par exemple avec  $H = M = B$  un mouvement brownien

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} B_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \sum_{i=0}^{p_n-1} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \rightarrow \langle B, B \rangle_t = t.$$

3. Oui Lemme Fondamental au début du cours. (Juste garder toujours cet exemple en tête pour la définition de l'intégrale stochastique).
4. Oui, Puisque  $\sum_{i=0}^k M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$  est une martingale.  $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^k M_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})) = 0$  et alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{p_n-1} M_{t_i} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{p_n-1} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \mathbb{E}((M_t - M_0)^2) \\ &= \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t) \end{aligned}$$

**Exercice 14.13.9.** Soient  $M$  and  $N$  deux martingales continues bornées dans  $L^2$  et  $K, H$  des processus adaptés et bornés.

- $(K \cdot (H \cdot M))_t = (H \cdot (K \cdot M))_t$  **VRAI**
- $\langle H \cdot M, N \rangle_t = \langle M, H \cdot N \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s$  **VRAI**
- $\langle H \cdot (M + N), K \cdot N \rangle_t = (HK) \cdot \langle M, N \rangle_t + (HK) \cdot \langle N, N \rangle_t$  **VRAI**
- Si  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien alors  $\langle B, B \cdot B \rangle_t = tB_t$  **FAUX**

**Solution 14.13.10.** En effet

1. Oui. On a

$$(K \cdot (H \cdot M))_t = ((KH) \cdot M)_t = (H \cdot (K \cdot M))_t.$$

2. Oui cela se note également

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = H \cdot \langle M, N \rangle_t = \langle M, H \cdot N \rangle_t$$

3. Oui, c'est simplement que  $H \cdot (M + N) = H \cdot M + H \cdot N$  puis par bilinéarité du crochet de martingale.
4. Non Ici on a

$$\langle B, B \cdot B \rangle_t = B \cdot \langle B, B \rangle_t = \int_0^t B_s ds$$

## 14.14 Feuille d'exercice 14 : Formule d'Ito

Pour chacun des exercices suivant, dites si les affirmations correctes ou non. Expliquer ou donner un contre exemple.

**Exercice 14.14.1.** Soit  $X = M + A$  une semimartingale avec  $A$  un processus à variation finie et  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ . Et  $B_t$  un mouvement brownien.

- $\exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t) = 1 + \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s) dB_s$ . **FAUX**
- $\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(M_s) ds$ . **FAUX**
- $X_t^3 - X_0^3 = 3 \int_0^t X_s^2 dX_s + 3 \int_0^t X_s d\langle M, M \rangle_s$ , **VRAI**
- $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$ . **VRAI**

**Solution 14.14.2.** En effet

- Non, Il manque juste le facteur  $\gamma$  devant l'intégrale. Plus généralement c'est la martingale de la forme  $\exp(\gamma M_t - \frac{\gamma^2}{2} \langle M, M \rangle_t) = \exp(\gamma M_0) + \gamma \int_0^t \exp(\gamma M_s - \frac{\gamma^2}{2} \langle M, M \rangle_s) dM_s$ . On peut refaire le calcul avec la formule d'Ito :  $f(x, y) = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2}{2} y}$ ,  $\partial_x f = \gamma f$ ,  $\partial_y f = -\frac{\gamma^2}{2} f$ ,  $\partial_{xx} f = \gamma^2 f$  et alors

$$\begin{aligned} \exp(\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} t) &= 1 + \gamma \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2} s) dB_s - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2} s) ds \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2} s) d\langle B, B \rangle_s. \\ &= 1 + \gamma \int_0^t \exp(\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2} s) dB_s. \end{aligned}$$

- Non, La formule d'Ito donne  $f(x) = \sin(x)$ ,  $\partial_x f = \cos(x)$  et  $\partial_{xx} f = -\sin(x)$ .

$$\sin(M_t) = \int_0^t \cos(M_s) dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(M_s) d\langle M, M \rangle_s.$$

- Oui, Avec  $f(x) = x^3$ ,  $\partial_x f = 3x^2$  et  $\partial_{xx} f = 6x$ . Et on a que  $\langle X, X \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$ . La formule d'Ito donne bien

$$X_t^3 - X_0^3 = 3 \int_0^t X_s^2 dX_s + 3 \int_0^t X_s d\langle M, M \rangle_s$$

- Oui, C'est l'intégration par partie avec  $X_t = B_t$  et  $Y_t = t$  où  $\langle X, Y \rangle_t = 0$  car  $Y$  est à variation finie. On aurait pu aussi simplement utiliser la formule d'Ito avec  $f(x, y) = xy$ .

**Exercice 14.14.3.** Soit  $X = M + A$  une semimartingale avec  $A$  un processus à variation finie et  $M$  une martingale continue bornée dans  $L^2$ . Et  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^2$ .

- $|M_t| = |M_0| + \int_0^t \text{sign}(M_s) dM_s$ . **FAUX**
- $f(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$  est une martingale. **FAUX**
- $X_t^2 - M_t^2$  est une martingale. **FAUX**
- $X_t M_t = X_0 M_0 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s + \langle M, M \rangle_t$ . **FAUX**

**Solution 14.14.4.** En effet

- Non, La formule d'Ito n'est valide que pour les fonctions  $\mathcal{C}^2$  et ne peut pas être utilisé pour  $x \rightarrow |x|$ . En particulier ici le terme de droite est une martingale mais pas le terme de gauche.
- Non, il reste le terme de variation fini de  $dX_s$ .

$$f(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dA_s$$

3. Non, Par exemple  $M = 0$  et  $A_t = t$ .
4. Non, La formule d'Ito avec  $f(x, y) = xy$  donne

$$\begin{aligned} X_t M_t &= X_0 M_0 + \int_0^t (M_s + A_s) dM_s + \int_0^t M_s dA_s \\ &\quad + \int_0^t M_s dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t d\langle X, M \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t d\langle M, X \rangle_s. \\ &= X_0 M_0 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s \\ &\quad + \int_0^t A_s dM_s + \langle M, M \rangle_t \end{aligned}$$

**Exercice 14.14.5.** Soit  $\mathbf{B}_t = (B_t, \tilde{B}_t)$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $0 < \epsilon < 1$ ,  $T = \inf\{t : \|\mathbf{B}_t + (1, 0)\| = \epsilon\}$  et  $\text{sign}(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $-1$  sinon

- $\int_0^t \tilde{B}_s dB_s = B_t \tilde{B}_t - \int_0^t B_s d\tilde{B}_s$ . **VRAI**
- $\log \|\mathbf{B}_{t \wedge T} + (1, 0)\|$  est une martingale. **VRAI**
- $\int_0^t (1_{T \leq t} - 1_{T > t}) dB_s$  est un mouvement brownien. **VRAI**
- $\int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s$  est un mouvement brownien. **VRAI**

**Solution 14.14.6.** En effet

1. Oui, c'est encore la formule d'intégration par partie avec  $\langle B, \tilde{B} \rangle_t = 0$  car les mouvements browniens sont indépendants.
2. Oui. On peut vérifier que  $h(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .  $\partial_x h = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ ,  $\partial_{xx} h = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $\partial_y h = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ ,  $\partial_{yy} h = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$  et donc  $\Delta h = 0$ . On en déduit que  $\log \|\mathbf{B}_{t \wedge T} + (1, 0)\| = \frac{1}{2} h(\mathbf{B}_{t \wedge T} + (1, 0))$  est une martingale.
3. Oui. On peut remarquer que

$$W = (1_{T \leq t} - 1_{T > t}) \cdot B = \begin{cases} B_t & \text{si } T \geq t \\ 2B_T - B_t & \text{si } T \leq t \end{cases}$$

Par principe de réflexion  $W$  est un mouvement brownien. Autre preuve. On a  $\langle W, W \rangle_t = ((1_{T \leq t} - 1_{T > t})^2 \cdot \langle B, B \rangle)_t = (1 \cdot \langle B, B \rangle)_t = t$ . Par le critère de Lévy,  $W$  est un mouvement brownien.

4. Oui, De même on a  $\langle \text{sign}(B) \cdot B, \text{sign}(B) \cdot B \rangle = (\text{sign}(B))^2 \cdot \langle B, B \rangle = 1 \cdot \langle B, B \rangle = \langle B, B \rangle$ . Et on conclue avec le critère de Lévy.

**Exercice 14.14.7.** Soient  $M_s, \tilde{M}_s$  des martingale continues bornée dans  $L^2$  issue et  $H_s, \tilde{H}_s$  des processus adaptés et borné.

- $(H \cdot M)_t^2 = \int_0^t H_s^2 dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s$ . **FAUX**
- $\mathbb{E}((\int_0^t H_s dM_s)(\int_0^{t'} \tilde{H}_s d\tilde{M}_s)) = \mathbb{E}(\int_0^{t \wedge t'} H_s \tilde{H}_s d\langle M, \tilde{M} \rangle_s)$ . **VRAI**
- $f((H \cdot M)_t) = f(0) + \int_0^t H_s f'((H \cdot M)_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 f''((H \cdot M)_s) d\langle M, M \rangle_s$   
**VRAI**

—  $\mathbb{E}(((H - \tilde{H}) \cdot (M - \tilde{M}))_t^2) \leq \mathbb{E}((H - \tilde{H})_t^2)\mathbb{E}((M - \tilde{M})_t^2)$ . **FAUX**

**Solution 14.14.8.** En effet

1. Non, En notant  $X_t = \int_0^t H_s dM_s$  on peut écrire  $dX_s = H_s dM_s$  et  $d\langle X, X \rangle_s = H_s^2 d\langle M, M \rangle_s$ . La formule d'Ito donne alors

$$\begin{aligned} X_t^2 &= 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t \\ &= 2 \int_0^t \left( \int_0^s H_u dM_u \right) H_s dM_s + \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \end{aligned}$$

2. Oui. On note  $N_t = \int_0^t H_s dM_s$  et  $\tilde{N}_t = \int_0^t \tilde{H}_s d\tilde{M}_s$  et remarquer que  $N$  et  $\tilde{N}$  sont deux martingales issues de 0. Supposons  $t \leq t'$ . Par définition de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(N_t \tilde{N}_{t'}) = \mathbb{E}(N_t \mathbb{E}(\tilde{N}_{t'} | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(N_t \tilde{N}_t).$$

De plus

$$\mathbb{E}(N_t \tilde{N}_t) = \mathbb{E}(\langle N, \tilde{N} \rangle_t) = \mathbb{E}(\langle H \cdot M, \tilde{H} \cdot \tilde{M} \rangle_t) = \mathbb{E}((H \tilde{H}) \cdot \langle M, \tilde{M} \rangle_t)$$

3. Oui, comme pour le 1 pour  $X = H \cdot M$ , on note  $dX_s = H_s dM_s$  et  $d\langle X, X \rangle_s = H_s^2 d\langle M, M \rangle_s$ . C'est alors la formule d'Ito.  
 4. Non, Par exemple on peut choisir  $H_t = \tilde{H}_t$  alors le terme de droite donne 0. Alors que le terme de gauche est à priori strictement positif. (Par exemple  $H_t = 1$  et  $\tilde{H}_t = 1_{t \geq 1}$ ,  $M = B$  un mouvement brownien et  $\tilde{M} = 0$ .)

**Exercice 14.14.9.** Soit  $M_s$  une martingale continue uniformément bornée dans  $L^2$  issue de 0 à accroissement indépendant et un processus adapté  $H_s \in L^2(M)$ .

- $\langle M, M \rangle_t = \mathbb{E}(M_t^2)$  p.s. **VRAI**
- $\mathbb{E}(\exp(\gamma(M_t - M_s))) = \exp(\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}((M_t - M_s)^2))$ . **VRAI**
- $M_t - M_s$  est une gaussienne. **VRAI**
- Avec  $\mathbb{E}(M_t^2)$  dérivable et dont la dérivée  $F_t = \frac{d}{dt} \mathbb{E}(M_t^2) \geq \epsilon$  pour tout  $t$  pour un certain  $\epsilon > 0$ . alors  $(\frac{1}{F} \cdot M)_t$  est un mouvement brownien. **FAUX**

**Solution 14.14.10.** En effet

1. Oui, ceci n'est vrai bien sûr qu'avec la condition "à accroissement indépendant". (voir feuilles précédente) On sait que  $M_t^2 - \mathbb{E}(M_t^2)$  est une martingale. Par définition de la variation quadratique (unicité) on a  $\langle M, M \rangle_t = \mathbb{E}(M_t^2)$ .

2. Oui, On utilise la martingale exponentielle  $\exp(\gamma M_t - \frac{\gamma^2}{2} \langle M, M \rangle_t)$ . Ici cela donne

$$\mathbb{E}(e^{\gamma M_t} | \mathcal{F}_s) e^{-\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}(M_t^2)} = e^{\gamma M_s} e^{-\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}(M_s^2)}$$

donc

$$\mathbb{E}(e^{\gamma(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{\frac{\gamma^2}{2} (\mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2))}$$

et on peut conclure avec  $\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2) = \mathbb{E}((M_t - M_s)^2)$  et  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\gamma(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(e^{\gamma(M_t - M_s)})$ .

3. Oui, On a bien que la transformée de Laplace est de la forme  $\exp(\frac{\sigma^2 \gamma^2}{2})$ .
4. Non. Par contre, on peut vérifier que  $(\frac{1}{\sqrt{F}} \cdot M)_t$  est un mouvement brownien.  $\langle \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot M, \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot M \rangle_t = \frac{1}{F} \cdot \langle M, \cdot M \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{F_s} d\langle M, M \rangle_s = \int_0^t \frac{1}{F_s} F_s ds = t$ . Et conclure avec le critère de Lévy.

# Chapitre 15

## Corrections des Examens

### 15.1 Devoir maison 1 : Martingales Discrètes, Correction.

### 15.2 Enoncé

**Problème 15.2.1.** Quatres personnes Alice, Bob, Claire et David jouent au jeu d'argent suivant. Un réel  $\eta \in (0, 1)$  est fixé pour toute la partie. Alice (resp Bob, Claire et David) commence la partie avec  $A_0 \geq 0$  argent (resp  $B_0, C_0$  et  $D_0$ ) et on note  $(A_n, B_n, C_n, D_n)$  leur argent respectif au temps  $n$ . À chaque temps deux joueurs sont tiré aléatoirement de manière équitable. Ces deux joueurs misent une même somme égale à  $\eta \times$  « l'argent dont dispose le plus pauvre des deux ». Puis ils parient à pile ou face avec une pièce équilibré et le gagnant remporte la mise. Le jeux se répète alors de la même manière.

Exemple : à  $n = 1$  Bob et David sont tirés et  $B_0 \leq D_0$ . Ils misent donc chacun  $\eta B_0$ . Bob gagne. Alors  $B_1 = B_0 + \eta B_0$ ,  $D_1 = D_0 - \eta B_0$ . Rien ne change pour les autres joueurs  $A_1 = A_0$  et  $C_1 = C_0$ .

1. Montrer que chaque joueur joue une infinité de fois.
2. Montrer que  $A_n$  est une martingale.
3. Montrer  $A_n$  (resp  $(B_n, C_n, D_n)$ ) converge p.s. Quelles sont les limites possibles ?
4. Justifier que la convergence est dans  $L^1$ . Quel est la probabilité que  $A_n \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$  ?
5. Dans la suite on supposera qu'il n'y a plus que 2 joueurs Alice, Bob et qu'au début de la partie Bob dispose d'une quantité illimité d'argent  $A_0 = 1$  et  $B_0 = \infty$ . Justifier que  $\log A_n$  est une surmartingale.
6. Proposer le comportement asymptotique de  $\frac{1}{n} \log A_n$ . En déduire une autre preuve que  $A_n \rightarrow 0$  p.s
7. Avec  $\eta = \frac{1}{2}$ , pour quel  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\log A_n + \alpha n$  est il une martingale ?

8. Soit  $T = \inf\{A_n \leq 10^{-10}\}$ . Montrer que  $\frac{10 \log 10}{\alpha} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{10 \log 10 + \log 2}{\alpha}$ .  
Est ce cohérent avec le comportement asymptotique de la question 6 ?

**Problème 15.2.2.** Soit  $\Lambda = [-L, L] \times [-L, L] \cap \mathbb{Z}^2$  avec  $L \in \mathbb{N}$ . On considère  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la marche aléatoire usuelle sur  $\Lambda$ , c'est à dire la chaine de Markov telle que pour tout  $(x, y), (x', y') \in \Lambda$

$$\mathbb{P}(X_n = (x', y') | X_{n-1} = (x, y)) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } |x - x'| + |y' - y| = 1 \\ 0 & \text{si } |x - x'| + |y' - y| > 1 \\ \frac{1}{4} \text{ (resp } \frac{1}{2}) & \text{si } (x, y) = (x', y') \text{ et que } (x, y) \\ & \text{est sur le bord (resp le coin) de } \Lambda \end{cases}$$

Soit  $T_{-L} = \inf\{n : X_n \in \{-L\} \times [-L, L]\}$ ,  $T_L = \inf\{n : X_n \in \{L\} \times [-L, L]\}$ ,  $S_{-L} = \inf\{n : X_n \in [-L, L] \times \{-L\}\}$ ,  $S_L = \inf\{n : X_n \in [-L, L] \times \{L\}\}$ . On notera  $\mathcal{F}_n$  la tribu canoniquement associée à  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Montrer que  $T_{-L}, T_L$  et  $T_{-L} \wedge T_L = \min\{T_{-L}, T_L\}$  sont des temps d'arrêt.
2. On note  $\Lambda^\circ = [-L+1, L-1] \times [-L+1, L-1] \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Lambda$ . Montrer que pour tout  $a, b, c \in \mathbb{R}$  la fonction  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x, y) := ax + by + c$  est harmonique sur  $\Lambda^\circ$ .
3. Supposons  $X_0 = (x_0, y_0)$ . Calculer  $\mathbb{P}(T_{-L} < T_L)$  et  $\mathbb{P}(S_{-L} < S_L)$ .
4. On note  $\partial\Lambda = \Lambda \setminus \Lambda^\circ$ . Soit  $u : \partial\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche  $h : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $h$  est harmonique sur  $\Lambda^\circ$  et  $h|_{\partial\Lambda} = u$ . Proposer une formule permettant de construire  $h$ . Cette solution est-elle unique ?
5. Dans cette question on suppose

$$u(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{si } x = -L \\ 0 & \text{si } x = L \\ -5 & \text{si } y = -L \text{ et } x \notin \{-L, L\} \\ 3 & \text{si } y = L \text{ et } x \notin \{-L, L\} \end{cases}$$

Soit  $h$  comme dans la question précédente. Calculer  $h(0, 0)$ .

6. On pose  $Y_n = \|X_n\|^2$  et on note  $T = T_{-L} \wedge T_L \wedge S_{-L} \wedge S_L$ . Montrer que  $Y_{n \wedge T} - n \wedge T$  est une martingale.
7. Pour  $X_0 = (0, 0)$ , montrer que  $L^2 \leq \mathbb{E}(T) \leq 2L^2$ .

### 15.2.1 Correction

**Solution 15.2.3.** \_

1. Notons  $\xi_n^A = 1$  si Alice joue au tour  $n$  et 0 sinon.  $(\xi_n^A)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des variables indépendante iid et  $\mathbb{E}(\xi_1^A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . Par la loi forte des grands nombres  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n^A \rightarrow \frac{1}{2}$  p.s. et donc  $\sum_{n=1}^N \xi_n^A \rightarrow \infty$  p.s c'est à dire que Alice joue une infinité de fois avec probabilité 1. Même conclusion pour Bob, Claire et David.

2. Pour tout  $n$ ,  $0 \leq A_n \leq A_0 + B_0 + C_0 + D_0$  donc  $\mathbb{E}(|A_n|) < \infty$  et  $A_n$  est  $\mathcal{F}_n$  mesurable pour la tribu canoniquement associée au processus. À chaque temps  $n$ , on note  $\zeta_n^A = 1$  si Alice joue et gagne,  $-1$  si elle joue et perd et  $0$  si elle ne joue pas et  $m_n$  la mise au temps  $n$ . Puisque à chaque temps  $n$  le dé est équilibré et indépendant de  $\mathcal{F}_{n-1}, m_n$ .  $\mathbb{E}(\zeta_n^A | \sigma(\mathcal{F}_{n-1}, m_n)) = 0$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= A_{n-1} + \mathbb{E}(\zeta_n^A m_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= A_{n-1} + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\zeta_n^A | \sigma(\mathcal{F}_{n-1}, m_n)) m_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= A_{n-1} \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $A_{n-1}$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$  mesurable, que  $m_n$  est  $\sigma(\mathcal{F}_{n-1}, m_n)$  et la propriété de concaténation de l'espérance conditionnel. Donc  $A_n$  est bien une martingale.

3. Puisque  $A_n$  est une martingale positive, elle converge p.s. Même chose pour  $B_n, C_n$  et  $D_n$ . Montrons que  $0$  et  $S = A_0 + B_0 + C_0 + D_0$  sont les seules limites possibles. Soit  $a \in (0, S)$  et supposons que  $A_n \rightarrow a$ . Puisque  $B_n + C_n + D_n \rightarrow S - a$  l'une de ces trois martingales ne converge pas non plus vers  $0$ . Par symétrie supposons également que  $B_n \rightarrow b$ ,  $b \in (0, S)$ . Alors  $A_n$  et  $B_n$  sont des suites de Cauchy donc il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|A_n - A_{n+1}| < \frac{1}{2}\eta \min(a, b)$ . Or avec probabilité  $1$ ,  $A_n$  et  $B_n$  jouent ensemble une infinité de fois et à chaque temps  $i$  tel que c'est le cas  $A_{i+1} = A_i \pm \eta \min(A_i, B_i)$  il existe donc une suite infinie de temps  $i$  tel que  $|A_{i+1} - A_i| \rightarrow \eta \min(a, b)$ . Absurde.
4. La martingale étant uniformément bornée par  $S$  elle converge dans  $L^1$ . Puisque  $A_n$  est une martingale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_0) = \mathbb{E}(A_n) &= \mathbb{E}(1_{A_n \rightarrow 0} A_n) + \mathbb{E}(1_{A_n \rightarrow S} A_n) \\ &\rightarrow 0 \times \mathbb{P}(A_n \rightarrow 0) + S \times \mathbb{P}(A_n \rightarrow S) \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  par la convergence  $L^1$ . Ainsi  $\mathbb{P}(A_n \rightarrow S) = \frac{A}{S}$  et  $\mathbb{P}(A_n \rightarrow 0) = 1 - \frac{A}{S}$ .

5.  $A_n$  est une martingale et  $x \rightarrow \log(x)$  est une fonction concave donc  $\log(A_n)$  est une surmartingale (Jensen).
6. On a ici  $A_n = (1 + \eta \zeta_n^A) A_{n-1}$  donc  $\log A_n = \log A_0 + \sum_{i=1}^n \log(1 + \eta \zeta_i^A)$ . On a ici une somme de variable indépendantes iid. Donc par la loi forte des grands nombre

$$\frac{1}{n} \log A_n \rightarrow \mathbb{E}(\log(1 + \eta \zeta_1^A)) = \frac{1}{2} \log(1 - \eta^2)$$

p.s. Puisque  $\log(1 - \eta^2) < 0$ ,  $\log A_n \rightarrow -\infty$  c'est à dire  $A_n \rightarrow 0$  p.s.

7. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\log A_n + \alpha n | \mathcal{F}_n) &= \log A_{n-1} + \alpha(n-1) + \mathbb{E}(\log(1 + \eta \zeta_1^A) | \mathcal{F}_n) + \alpha \\ &= \log A_{n-1} + \alpha(n-1) + \left(\frac{1}{2} \log(1 - \eta^2)\right) + \alpha \end{aligned}$$

$\log A_n + \alpha n$  est il une martingale ssi  $\alpha = -\frac{1}{2} \log(1 - \eta^2) = -\frac{1}{2} \log(\frac{3}{4})$ .

8. Par la définition de  $T$ ,  $A_{T-1} \geq 10^{-10}$ ,  $A_T \leq 10^{-10}$  et donc  $A_T \geq (1 - \eta)A_{T-1} \geq \frac{1}{2}10^{-10}$ . Puisque  $A_n \rightarrow 0$  p.s on a que  $T < \infty$  p.s. . Pour tout  $n$ ,  $A_n \leq (1 + \eta)^n A_0$  et donc

$$|\log A_{n \wedge T} + \alpha n \wedge T| \leq (\log 2 + |\alpha|)n \wedge T.$$

Par le théorème de l'arrêt pour tout  $n$ ,

$$0 = \mathbb{E}(\log A_0) = \mathbb{E}(\log A_{n \wedge T} + \alpha n \wedge T)$$

donc

$$\mathbb{E}(n \wedge T) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\log A_{n \wedge T}) \leq -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\log(\frac{1}{2}10^{-10})) = \frac{10 \log 10 + \log 2}{\alpha}.$$

Puis  $n \wedge T$  est croissante et converge vers  $T$ ,  $\mathbb{E}(n \wedge T) \rightarrow \mathbb{E}(T)$ . Conclusion  $\mathbb{E}(T) \leq \frac{10 \log 10 + \log 2}{\alpha} < \infty$ . Pour tout  $n$ ,  $|\log A_{n \wedge T} + \alpha n \wedge T| \leq (\log 2 + |\alpha|)T$  donc pas convergence dominée

$$0 = \mathbb{E}(\log A_{n \wedge T} + \alpha n \wedge T) \rightarrow \mathbb{E}(\log A_T) + \alpha \mathbb{E}(T)$$

et donc

$$\frac{10 \log 10}{\alpha} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{10 \log 10 + \log 2}{\alpha}.$$

Dans la question 6, on trouvait que  $\log A_n \sim -\alpha n$  pour  $n$  grand. On pouvait alors s'attendre à  $\alpha T \approx -\log(A_T) = 10 \log 10$ .

**Solution 15.2.4.** \_

1. On a

$$\{T_{-L} = n\} = \cap_{i < n} \{X_i \notin \{-L\} \times [-L, L]\} \cap \{X_n \in \{-L\} \times [-L, L]\}$$

puisque  $X_n$  est trivialement adapté, chacun de ces ensemble est  $\mathcal{F}_n$  mesurable donc  $\{T_{-L} = n\} \in \mathcal{F}_n$ . Même chose pour  $T_L$  et on utilise ensuite que le minimum de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt.

2. On calcule pour tout  $(x, y) \in \Lambda^\circ$

$$\begin{aligned} Qf(x, y) &= \frac{1}{4} (f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1)) \\ &= \frac{1}{4} (a(x + 1) + by + c + a(x - 1) + by + c \\ &\quad + ax + b(y + 1) + c + ax + b(y - 1) + c) \\ &= ax + by + c \end{aligned}$$

donc  $f(x, y)$  bien harmonique sur  $\Lambda^\circ$ .

3. On choisit  $f(x, y) = x$  qui est harmonique par la question précédente ( $a = 1, b = c = 0$ ) sur  $\Lambda^\circ$ . Par le même calcul on montre quelle est harmonique sur  $[-L+1, L-1] \times [-L, L]$  donc  $x_{n \wedge T_{-L} \wedge T_L} = f(X_{n \wedge T_{-L} \wedge T_L})$  est une martingale. Elle uniformément bornée dans  $[-L, L]$ , donc elle converge p.s et dans  $L^1$ . Elle est à valeur entière donc elle est constante à partir d'un certain rang c'est à dire  $T_{-L} \wedge T_L < \infty$  p.s (donc  $L, -L$  sont les seuls limites possible). On a alors

$$x_0 = \mathbb{E}(x_0) = \mathbb{E}(x_{n \wedge T_{-L} \wedge T_L}) \rightarrow \mathbb{E}(x_{T_{-L} \wedge T_L})$$

donc

$$x_0 = \mathbb{E}(x_{T_{-L} \wedge T_L}) = -L \times \mathbb{P}(T_{-L} < T_L) + L \times \mathbb{P}(T_{-L} > T_L) = -2L \mathbb{P}(T_{-L} < T_L) + L$$

et finalement  $\mathbb{P}(T_{-L} < T_L) = \frac{L-x}{2L}$ . De même avec la fonction  $f(x, y) = y$  on obtient  $\mathbb{P}(S_{-L} < S_L) = \frac{L-y}{2L}$ .

4. Pour le problème de Dirichlet on a la solution suivante

$$h(x) = \mathbb{E}_x(u(X_T))$$

avec  $T = T_{-L} \wedge T_L \wedge S_{-L} \wedge S_L$ . Puisque  $T < \infty$  et le domaine borné, c'est l'unique solution.

5. Par symmétrie de cette chaine de markov. En partant du centre du carré, chaque côté a la même probabilité d'être atteint en premier et on ne peut pas toucher un coin sans atteindre un côté avant. Donc

$$\mathbb{P}(T = T_{-L}) = \mathbb{P}(T = T_L) = \mathbb{P}(T = S_L) = \mathbb{P}(T = S_{-L}) = \frac{1}{4}.$$

En utilisant la formule de la question précédente

$$\begin{aligned} h(0, 0) &= \mathbb{P}(T = T_{-L})u(X_{T_{-L}}) + \mathbb{P}(T = T_L)u(X_{T_L}) + \mathbb{P}(T = S_{-L})u(X_{S_{-L}}) + \mathbb{P}(T = S_L)u(X_{S_L}) \\ &= \frac{1}{4}(6 + 0 - 5 + 3) = 1 \end{aligned}$$

6. Ce processus est trivialement adapté et  $|Y_{n \wedge T} - n \wedge T| \leq L^2 + n < \infty$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n \wedge T} - n \wedge T | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(1_{T \leq (n-1)}(Y_T - T) | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(1_{T \geq n}(Y_n - n) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= 1_{T \leq (n-1)}(Y_T - T) + 1_{T \geq n} \mathbb{E}((x_n^2 + y_n^2 - n) | (x_{n-1}, y_{n-1})) \\ &= 1_{T \leq (n-1)}(Y_T - T) + 1_{T \geq n} \left( \frac{1}{4}((x_{n-1} + 1)^2 + y_{n-1}^2 + (x_{n-1} - 1)^2 + y_{n-1}^2 \right. \\ &\quad \left. + (y_{n-1} + 1)^2 + x_{n-1}^2 + (y_{n-1} - 1)^2 + x_{n-1}^2) - n \right) \\ &= 1_{T \leq (n-1)}(Y_T - T) + 1_{T \geq n}((x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + 1) - n) \\ &= 1_{T \leq (n-1)}(Y_T - T) + 1_{T \geq n}(Y_{n-1} - n - 1) \\ &= Y_{(n-1) \wedge T} - (n-1) \wedge T \end{aligned}$$

qui donc est une martingale.

7.  $(x_{n \wedge T})$  et  $(y_{n \wedge T})$  sont des martingales uniformément bornées donc elle convergent dans  $L^2$ . On a alors que  $Y_{n \wedge T} = x_{n \wedge T}^2 + y_{n \wedge T}^2$  converge dans  $L^1$ . Par convergence monotone on a également que  $n \wedge T$  converge dans  $L^1$  vers  $T$ . Conclusion

$$0 = \mathbb{E}(Y_0 - 0) = \mathbb{E}(Y_{n \wedge T} - n \wedge T) \rightarrow \mathbb{E}(Y_T) - \mathbb{E}(T).$$

soit  $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y_T)$ . On peut conclure en regardant les distances minimale et maximal entre  $(0, 0)$  et un point du carré :  $L^2 \leq Y_T \leq 2L^2$ .

## 15.3 Devoir maison 2 : Mouvement Brownien et calcul stochastique

### 15.3.1 Enoncé

**Problème 15.3.1.** Soit  $(B_t)_t$  un mouvement brownien issue de 0,  $\eta > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbf{y} = ((t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_k, y_k))$  avec  $0 < t_1 < \dots < t_k = t_F$  et  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  (par convention  $t_0 = y_0 = 0$ ). On appellera « parcours » la fonction  $f_{\mathbf{y}}$  linéaire par morceau sur les intervalles  $[t_{i-1}, t_i]$  avec  $f_{\mathbf{y}}(t_i) = y_i$ , formellement

$$f_{\mathbf{y}}(t) = \frac{(t - t_{i-1})y_i + (t_i - t)y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Et on appellera « circuit » la bande de taille  $\eta$  autour du parcours  $\mathcal{C}_{\mathbf{y}, \eta} = \{(t, y) \in [0, t_F] \times \mathbb{R} : |y - f_{\mathbf{y}}(t)| \leq \eta\}$ . Dans cet exercice on cherchera ici à estimer la probabilité que le mouvement brownien parcourt le circuit sans en sortir lorsque  $\eta$  est petit.

1. On s'intéresse ici au cas  $k = 1$ ,  $y_1 = 0$ .
  - (a) Parmi les parcours  $\mathcal{C}_{(0, t_F), \eta}$  et  $\mathcal{C}_{(0, 2t_F), 2\eta}$  lequel est le plus facile ? C'est à dire, a-t-on  $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq 2t_F : |B_t| < 2\eta)$  ou l'inverse ?
  - (b) Montrer que  $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}}$ .
  - (c) On note  $T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \eta\}$ , montrer que  $\mathbb{E}(T) = \eta^2$ .
  - (d) En déduire que  $\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq \frac{\eta^2}{t_F}$ .
  - (e) Montrer que  $\cos(\gamma B_t)e^{\frac{\gamma^2 t}{2}}$  est une martingale pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ .
  - (f) En déduire que pour tout  $\sigma < \frac{\pi}{2\eta}$  il existe  $C > 0$  tel que

$$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq C e^{-\frac{\sigma^2}{2} t_F}$$

quelque soit  $t_F$ .

- (g) Montrer que pour tout  $|x| \leq \eta$

$$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t + x| < \eta) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta)$$

(On pourra introduire le temps d'arrêt  $S = \inf\{t : |B_t| = |x|\}$ ).

2. On considère maintenant le cas général.

- (a) Toujours dans le cas  $k = 1$  (mais  $y_1$  quelconque), notons  $J_{t_1, y_1} = \{\forall t \leq t_1 : |B_t - \frac{y_1}{t_1}t| < \eta\}$ . Montrer que

$$e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_1}} \mathbb{P}(J_{t_1, y_1}) \leq \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq t_1 : |B_t - \frac{y_1}{t_1}t| < \eta\}} e^{\frac{y_1}{t_1}B_{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}}) \leq e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1, y_1})$$

et en déduire que

$$e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1, y_1}) \leq \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \leq e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_F}} \mathbb{P}(J_{t_1, y_1}).$$

- (b) Pour  $k = 2$ , et  $\mathbf{y} = ((1, y_1), (2, y_2))$ , montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall t \leq 2 : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta) \\ \leq \mathbb{P}(J_{t_1, y_1}) \times \max_{|s| \leq \eta} \mathbb{P}(\forall t \leq 1 : |B_t - s - (y_2 - y_1)t| < \eta) \end{aligned}$$

- (c) Pour  $k$  quelconque, On suppose que pour tout  $i$ ,  $t_i = i$ , c'est à dire  $\mathbf{y} = ((1, y_1), (2, y_2), \dots, (k, y_k))$ . Montrer que

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P}(\forall t \leq k : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta) \\ \leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (y_i - y_{i-1})^2 + k \log \mathbb{P}(\forall t \leq 1 : |B_t| < \eta) + o(1) \end{aligned}$$

lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

- (d) On note  $\tilde{\mathbf{y}} = ((1, 1), (2, 2))$  et  $\mathbf{y}' = ((1, 2), (2, 2))$ . En supposant qu'à une constante près qui ne dépend ni des  $y_i$  ni de  $\eta$  l'inégalité du dessus soit une égalité, parmi ces deux circuit  $\tilde{\mathbf{y}}$  et  $\mathbf{y}'$  lequel est le plus « facile » lorsque  $\eta \rightarrow 0$  ?

**Problème 15.3.2.** Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des variables réelles iid symétriques (donc  $\mathbb{E}(X_1) = 0$ ) et  $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$ . Soit  $M_n$ , un processus dans  $\mathbb{C}$  (que l'on identifiera avec  $\mathbb{R}^2$ ) définit de la manière suivante :

$$M_0 \neq 0 \quad M_n = M_{n-1} + i \frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} X_n.$$

Soient  $\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$ . On notera  $H_s$  un processus continue adapté de matrices  $H_s \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

1. Étude du modèle discret :
  - (a) Vérifier que  $M_n$  est une martingale dans  $\mathbb{C}$ .
  - (b) Si  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$  (Bernoulli), montrer que  $|M_n|^2$  est déterministe et déterminer sa valeur.
2. Étude du modèle continue dans le cas générale : On notera

$$(H \cdot \mathbf{B})_t = \int_0^t H_s d\mathbf{B}_s$$

l'intégrale stochastique dans  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Montrer que  $\langle (H \cdot \mathbf{B}), (H \cdot \mathbf{B}) \rangle_t = \int_0^t H_s^T H_s ds$
  - (b) En déduire que si  $H_s$  est à valeur dans  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble des matrices orthogonales sur  $\mathbb{R}^2$  alors  $(H \cdot \mathbf{B})$  est un mouvement brownien.
3. Ici on suppose que  $H_t$  est la projection orthogonal de rang 1 dont le noyau est  $N_t := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (H \cdot \mathbf{B})_t \right) \in \mathbb{R}^2$  (et l'image le vecteur  $\{N_t\}^\perp$ ). C'est à dire pour tout  $t$  on a

$$H_t^2 = H_t \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad H_t N_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On admettra que  $H_t$  est bien défini et continue.

- (a) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $M_n$  comme dans le cas discret avec  $X_1$  est une gaussienne et  $M_0 = \sqrt{n} + i0 = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 0 \end{pmatrix}$  (où on a identifié  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ). Montrer que pour tout  $t$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} M_{\lfloor nt \rfloor}$  converge en loi vers  $N_t$ . (on pourra approximer  $H_t$  par une fonction constante par morceau.)
- (b) Exprimer  $R_t := \|N_t\|^2$  à l'aide de la formule d'Ito.
- (c) Avec  $T_{\frac{1}{2}} = \inf\{t : R_t = \frac{1}{2}\}$  et  $T_{10} = \inf\{t : R_t = 10\}$  Donner  $\mathbb{P}(T_{10} < T_{\frac{1}{2}})$ .

### 15.3.2 Correction

#### Solution 15.3.3.

1. Dans le cas  $k = 1, y_1 = 0$ .

- (a) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall t \leq 2t_F : |B_t| < 2\eta) &= \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_{2t}| < 2\eta) \\ &= \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : \sqrt{2}|B_t| < 2\eta) \\ &\geq \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement d'échelle du mouvement brownien à la deuxième égalité.

- (b) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) &\leq \mathbb{P}(|B_{t_F}| < \eta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_F}} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\frac{x^2}{2t_F}} dx \\ &\leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}} \end{aligned}$$

car  $e^{-\frac{x^2}{2t_F}} \leq 1$ .

- (c) On utilise que  $B_t^2 - t$  est une martingale. Donc par le Théorème de l'arrêt pour tout  $t$ ,

$$0 = \mathbb{E}(B_0^2 - 0) = \mathbb{E}(B_{t \wedge T}^2 - t \wedge T).$$

Avec la question précédent  $\mathbb{P}(T > t_F) \leq \frac{2\eta}{\sqrt{2\pi t_F}} \rightarrow 0$  lorsque  $t_F \rightarrow \infty$ . Donc  $T < \infty$  p.s.. Avec  $B_{t \wedge T}^2 \leq \eta^2$ , par convergence dominé  $\mathbb{E}(B_{t \wedge T}^2) \rightarrow \mathbb{E}(B_T^2) = \eta^2$  et par croissance monotone  $\mathbb{E}(t \wedge T) \rightarrow \mathbb{E}(T)$ . Conclusion  $\mathbb{E}(T) = \eta^2$ .

- (d) Avec Markov

$$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) = \mathbb{P}(T > t_F) \leq \frac{\mathbb{E}(T)}{t_F} = \frac{\eta^2}{t_F}.$$

- (e) Première méthode on écrit  $\cos(\gamma B_t) e^{\frac{\gamma^2 t}{2}} = \frac{1}{2}(e^{i\gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}t} + e^{-i\gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}t})$  et on montre que chacun de ces termes est une martingale. On a ici le même calcul que pour  $e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$ . Soit  $s < t$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{i\gamma B_t + \frac{\gamma^2}{2}t} | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{i\gamma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s) e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}t} \\ &= \mathbb{E}(e^{i\gamma(B_t - B_s)}) e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}t} \\ &= e^{-\frac{\gamma^2}{2}(t-s)} e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}t} \\ &= e^{i\gamma B_s + \frac{\gamma^2}{2}s} \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $(B_t - B_s)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  et est une gaussienne de variance  $t - s$ . Deuxième méthode, on utilise la formule d'Ito avec  $f(x, y) = \cos(\gamma x) e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$ .  $\partial_x f = -\gamma \sin(\gamma x) e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$ ,  $\partial_{xx} f = -\gamma^2 \cos(\gamma x) e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$ ,  $\partial_y f = \frac{\gamma^2}{2} \cos(\gamma x) e^{\frac{\gamma^2}{2}y}$ . Alors

$$\begin{aligned} f(B_t, t) &= 1 - \gamma \int_0^t \sin(\gamma B_s) e^{\frac{\gamma^2}{2}s} dB_s + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \cos(\gamma B_s) e^{\frac{\gamma^2}{2}s} ds \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \cos(\gamma B_s) e^{\frac{\gamma^2}{2}s} d\langle B, B \rangle_s \\ &= 1 - \gamma \int_0^t \sin(\gamma B_s) e^{\frac{\gamma^2}{2}s} dB_s \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $\langle B, t \rangle = \langle t, t \rangle = 0$  car  $t$  est à variation fini. Conclusion  $f(B_t, t)$  est une martingale par définition de l'intégrale stochastique. Remarquer qu'on aurait aussi pu conclure directement en remarquant que  $\partial_y f = -\frac{1}{2} \partial_{xx} f$  et donc  $f(B_t, \langle B, B \rangle_t)$  est une martingale.

(f) Soit  $\gamma < \frac{\pi}{2\eta}$ . Avec la question précédente et le théorème de l'arrêt

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}(\cos(\gamma B_0)e^0) = \mathbb{E}(\cos(\gamma B_{t \wedge T})e^{\frac{\gamma^2}{2}t \wedge T}) \\ &= \mathbb{E}(1_{T \leq t} \cos(\gamma\eta)e^{\frac{\gamma^2}{2}T}) + \mathbb{E}(1_{T > t} \cos(\gamma B_t)e^{\frac{\gamma^2}{2}t}) \\ &\geq \mathbb{E}(1_{T > t} \cos(\gamma\eta)e^{\frac{\gamma^2}{2}t}) \\ &= \mathbb{P}(T > t) \cos(\gamma\eta)e^{\frac{\gamma^2}{2}t} \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $\gamma B_{t \wedge T} \in (-\gamma\eta, \gamma\eta) \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  donc  $0 < \cos(\gamma\eta) \leq \cos(\gamma B_{t \wedge T})$ . On a alors bien

$$\mathbb{P}(\forall t \leq t_F : |B_t| < \eta) = \mathbb{P}(T > t_F) \leq \frac{1}{\cos(\gamma\eta)} e^{-\frac{\gamma^2}{2}t_F}.$$

(g) On note  $S = \inf\{t : |B_t| = |x|\}$ . Alors clairement  $S < T$  car  $|x| \leq \eta$ . On note  $B_t^{(S)} = B_{t+S} - B_S$  et on a

$$\begin{aligned} \{\sup_{s \leq t} |B_s| \geq \eta\} &= \{B_S = x \text{ et } \sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} + x| \geq \eta\} \\ &\cup \{B_S = -x \text{ et } \sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} - x| \geq \eta\}. \end{aligned}$$

Par la propriété de Markov Forte  $B_t^{(S)}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_S$ . Par symétrie  $\mathbb{P}(B_S = x) = \mathbb{P}(B_S = -x) = \frac{1}{2}$  et ces deux ensembles sont disjoints. Alors

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{\sup_{s \leq t} |B_s| \geq \eta\}) \\ &= \mathbb{P}(\{B_S = x \text{ et } \sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} + x| \geq \eta\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{B_S = -x \text{ et } \sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} - x| \geq \eta\}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} + x| \geq \eta) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} - x| \geq \eta) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} + x| \geq \eta) \end{aligned}$$

Puisque  $B^{(S)}$  est un mouvement brownien et  $S > 0$  on a toujours  $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t-S} |B_s^{(S)} + x| \geq \eta) \geq \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s + x| \geq \eta)$  et donc

$$\mathbb{P}(\{\sup_{s \leq t} |B_s| \geq \eta\}) \geq \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s + x| \geq \eta)$$

2. On considère maintenant le cas général.

(a) Sur  $J_{t_1, y_1}$  on a

$$\begin{aligned} y_1 - \eta \leq B_{t_1} &\Rightarrow \frac{y_1^2}{t_1} - \frac{\eta y_1}{t_1} \leq \frac{y_1 B_{t_1}}{t_1} \\ &\Rightarrow \frac{y_1^2}{2t_1} - \frac{\eta y_1}{t_1} \leq \frac{y_1 B_{t_1}}{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1} \\ &\Rightarrow \exp\left(\frac{y_1^2}{2t_1} - \frac{\eta y_1}{t_1}\right) \leq \exp\left(\frac{y_1 B_{t_1}}{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}\right) \end{aligned}$$

et on a également  $\exp\left(\frac{y_1 B_{t_1}}{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}\right) \leq \exp\left(\frac{y_1^2}{2t_1} - \frac{\eta y_1}{t_1}\right)$  à partir de  $B_{t_1} \leq y_1 - \eta$ . Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_1}} \mathbb{P}(J_{t_1, y_1}) &= \mathbb{E}(1_{J_{t_1, y_1}} e^{\frac{y_1^2 - 2\eta|y_1|}{2t_1}}) \\ &\leq \mathbb{E}(1_{J_{t_1, y_1}} e^{\frac{y_1}{t_1} B_{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}}) \\ &\leq \mathbb{E}(1_{J_{t_1, y_1}} e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_1}}) = e^{\frac{y_1^2 + 2\eta|y_1|}{2t_1}} \mathbb{P}(J_{t_1, y_1}). \end{aligned}$$

On note  $W_t = B_t - t\frac{y_1}{t_1}$  et  $\mathbb{Q}$  la mesure  $\mathbb{P}$  multipliée par le poids  $e^{\frac{y_1}{t_1} B_t - \frac{y_1^2}{2t_1}}$ . Par Girsanov  $W_t$  est un mouvement brownien pour la mesure  $\mathbb{Q}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq t_1: |W_t| < \eta\}} e^{\frac{y_1}{t_1} B_{t_1} - \frac{y_1^2}{2t_1}}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(1_{\{\forall t \leq t_1: |W_t| < \eta\}}) \\ &= \mathbb{Q}(\forall t \leq t_1, |W_t| < \eta) \\ &= \mathbb{P}(\forall t \leq t_1, |B_t| < \eta). \end{aligned}$$

(b) Pour  $k = 2$ , et  $\mathbf{y} = ((1, y_1), (2, y_2))$  on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 2: |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta\}}) \\ &= \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |B_t - y_1 t| < \eta\}} 1_{\{\forall t \leq 1: |B_{t+1} - (y_2 - y_1)t - y_1| < \eta\}}) \\ &= \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |B_t - y_1 t| < \eta\}} \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |B_{t+1} - (y_2 - y_1)t - y_1| < \eta\}} | \mathcal{F}_1)) \\ &= \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |B_t - y_1 t| < \eta\}} \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |(B_{t+1} - B_1) - (y_2 - y_1)t - (y_1 - B_1)| < \eta\}} | \mathcal{F}_1)) \end{aligned}$$

Par la propriété de Markov  $\tilde{B}_t := (B_{t+1} - B_1)$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_1$ . Donc si on définit la fonction  $h(x) = \mathbb{P}_{\tilde{B}}(\forall t \leq 1: |\tilde{B}_t - (y_2 - y_1)t - (y_1 - x)| < \eta)$  on a

$$\mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |(B_{t+1} - B_1) - (y_2 - y_1)t - (y_1 - B_1)| < \eta\}} | \mathcal{F}_1) = h(B_1).$$

Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 2: |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta\}}) &= \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |B_t - y_1 t| < \eta\}} h(B_1)) \\ &\leq \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1: |B_t - y_1 t| < \eta\}}) \sup_{x \in (y_1 - \eta, y_1 + \eta)} h(x). \end{aligned}$$

(c) Comme à la question a) on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (y_1 - \eta, y_1 + \eta)} h(x) &\leq e^{\frac{-(y_2 - y_1)^2 + 4\eta(y_2 - y_1)}{2}} \sup_{|s| \leq \eta} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t + s| < \eta) \\ &= e^{\frac{-(y_2 - y_1)^2 + 4\eta(y_2 - y_1)}{2}} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t| < \eta). \end{aligned}$$

On note  $h^{(k)} = \mathbb{P}_{\tilde{B}}(\forall t \leq 1 : |\tilde{B}_t - (y_k - y_{k-1})t - (y_{k-1} - x)| < \eta)$  et on raisonne maintenant par récurrence

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq k : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta\}}) \\ &= \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq k-1 : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta\}}) \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq 1 : |(B_{t+k-1} - B_{k-1}) - (y_k - y_{k-1})t - (y_{k-1} - B_{k-1})| < \eta\}} | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\leq \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq k-1 : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta\}}) \sup_{x \in (y_1 - \eta, y_1 + \eta)} h^{(k)}(x) \\ &\leq \mathbb{E}(1_{\{\forall t \leq k-1 : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta\}}) e^{\frac{-(y_2 - y_1)^2 + 4\eta(y_2 - y_1)}{2}} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t| < \eta) \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} &\log \mathbb{P}(\forall t \leq k : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta) \\ &\leq \log \mathbb{P}(\forall t \leq (k-1) : |B_t - f_{\mathbf{y}}(t)| < \eta) - \frac{1}{2}(y_k - y_{k-1})^2 \\ &\quad + \log \mathbb{P}(\forall t \leq 1 : |B_t| < \eta) + O(\eta) \end{aligned}$$

lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

(d) On a d'un côté

$$(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_0)^2 + (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

et

$$(y'_1 - y'_0)^2 + (y_2 - y'_1)^2 = 2^2 + 0^2 = 4$$

Dans la formule précédente les autres termes ne dépendent pas des  $y_i$  et donc on aurait

$$\log \mathbb{P}(\forall t \leq 2 : |B_t - f_{\tilde{\mathbf{y}}}(t)| < \eta) \geq \log \mathbb{P}(\forall t \leq k : |B_t - f_{\mathbf{y}'}(t)| < \eta).$$

c'est à dire  $\tilde{\mathbf{y}}$  « plus facile » que  $\mathbf{y}'$ .

### Solution 15.3.4. .

1. Étude du modèle discret :

(a) On a  $|M_{n+1}| \leq |M_n| + \left| \frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} X_n \right| = |M_n| + |X_n|$  et donc

$$\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|M_0|) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|X_i|) < \infty.$$

On a également

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= M_{n-1} + i \frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= M_{n-1} + i \frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} \mathbb{E}(X_n) \\ &= M_{n-1}\end{aligned}$$

et  $M_n$  est donc bien une martingale dans  $\mathbb{C}$ .

(b) On calcul

$$\begin{aligned}|M_n|^2 &= M_n \overline{M_n} \\ &= \left( M_{n-1} + i \frac{M_{n-1}}{|M_{n-1}|} X_n \right) \left( \overline{M_{n-1}} - i \frac{\overline{M_{n-1}}}{|M_{n-1}|} X_n \right) \\ &= M_{n-1} \overline{M_{n-1}} \left( 1 + \frac{X_n^2}{|M_{n-1}|^2} \right) \\ &= |M_{n-1}|^2 + 1\end{aligned}$$

Donc par récurrence immédiate  $|M_n|^2 = |M_0|^2 + n$ .

2. Étude du modèle continue dans le cas générale avec

$$(H \cdot \mathbf{B})_t = \int_0^t H_s d\mathbf{B}_s.$$

(a) On note

$$H_s = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} B_s^{(1)} \\ B_s^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec  $B_s^{(1)}, B_s^{(2)}$  deux mouvement brownien indépendant. On a alors

$$H \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \cdot B^{(1)} + b \cdot B^{(2)} \\ c \cdot B^{(1)} + d \cdot B^{(2)} \end{pmatrix}$$

où  $(a \cdot B^{(1)})_t = \int_0^t a_s dB_s^{(1)}$  est l'intégrale stochastique usuelle sur  $\mathbb{R}$  et même chose pour les autres termes.

$$\begin{aligned}\langle (H \cdot \mathbf{B})^1, (H \cdot \mathbf{B})^1 \rangle &= \langle a \cdot B^{(1)} + b \cdot B^{(2)}, a \cdot B^{(1)} + b \cdot B^{(2)} \rangle \\ &= a^2 \cdot \langle B^{(1)}, B^{(1)} \rangle + (ba \cdot \langle B^{(2)}, B^{(1)} \rangle \\ &\quad + ab \langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle + b^2 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(2)} \rangle \\ &= a^2 \cdot t + b^2 \cdot t\end{aligned}$$

On a utilisé que  $\langle B_s^{(1)}, B_s^{(1)} \rangle_t = \langle B_s^{(2)}, B_s^{(2)} \rangle_t = t$  et  $\langle B_s^{(1)}, B_s^{(2)} \rangle_t = 0$  car les deux mouvements browniens sont indépendants. Donc

$$\langle (H \cdot \mathbf{B})^1, (H \cdot \mathbf{B})^1 \rangle_t = \int_0^t a_s^2 + b_s^2 ds.$$

Le calcul pour chacun des autres termes se fait de la même manière et on obtient

$$\begin{aligned} \langle (H \cdot \mathbf{B})^1, (H \cdot \mathbf{B})^2 \rangle_t &= \int_0^t a_s c_s + b_s d_s ds \\ \langle (H \cdot \mathbf{B})^2, (H \cdot \mathbf{B})^1 \rangle_t &= \int_0^t a_s c_s + b_s d_s ds \\ \langle (H \cdot \mathbf{B})^2, (H \cdot \mathbf{B})^2 \rangle_t &= \int_0^t c_s^2 + d_s^2 ds \end{aligned}$$

En écrivant

$$H_s H_s^T = \begin{pmatrix} a_s^2 + b_s^2 & a_s c_s + b_s d_s \\ a_s c_s + b_s d_s & c_s^2 + d_s^2 \end{pmatrix}$$

on a bien  $\langle (H \cdot \mathbf{B}), (H \cdot \mathbf{B}) \rangle_t = \int_0^t H_s H_s^T ds$ .

- (b) Si  $H_s$  est à valeur dans  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$  alors pour tout  $s$ ,  $H_s H_s^T = I_d$  et donc  $\langle (H \cdot \mathbf{B}), (H \cdot \mathbf{B}) \rangle_t = \int_0^t I_d ds = tI_d$ . Par le Théorème de Lévy on a que  $(H \cdot \mathbf{B})$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$ .

3.

- (a) Avec  $H_t$  un projecteur de rang 1, il peut s'écrire de la forme  $H_t = u_t u_t^T$  où  $u_t = \begin{pmatrix} u_t^{(1)} \\ u_t^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \|u_t\|^2 = |u_t^{(1)}|^2 + |u_t^{(2)}|^2 = 1$  pour tout  $t$ .

Alors

$$\begin{aligned} (H \cdot \mathbf{B}) &= (u_t u_t^T \cdot \mathbf{B}) \\ &= u_t \cdot (u_t^T \cdot \mathbf{B}) \\ &= u_t \cdot (u^{(1)} \cdot B_s^{(1)} + u^{(2)} \cdot B_s^{(2)}). \end{aligned}$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} &\langle (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)}), (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)}) \rangle \\ &= (u^{(1)})^2 \cdot \langle B^{(1)}, B^{(1)} \rangle + (u^{(2)})^2 \cdot \langle B^{(2)}, B^{(2)} \rangle \\ &= (u^{(1)})^2 \cdot t + (u^{(2)})^2 \cdot t \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \langle (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)}), (u^{(1)} \cdot B^{(1)} + u^{(2)} \cdot B^{(1)}) \rangle_t &= \int_0^t ((u^{(1)})^2 + (u^{(2)})^2) ds \\ &= t \end{aligned}$$

Par le théorème de Lévy  $(u^{(1)} \cdot B_s^{(1)} + u^{(2)} \cdot B_s^{(2)})$  est un mouvement brownien (dans  $\mathbb{R}$ ) que l'on note  $\tilde{B}$ . On a alors

$$N_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t u_s d\tilde{B}_s.$$

On a identifié  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ . Ici  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + i0 \in \mathbb{C}$  et puisque  $u_t \perp N_t$  et  $\|u_t\| = 1$ , on a  $u_t = \pm i \frac{N_t}{|N_t|}$ . On approxime  $u$  par une fonction constante par morceau  $u_s^{(n)} = \sum_{k=1}^n 1_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(s) u_{\frac{k-1}{n}}$ . Alors

$$\begin{aligned} N_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \int_0^t u_s^{(n)} d\tilde{B}_s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} u_{\frac{k-1}{n}} (\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + i \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{N_{\frac{k-1}{n}}}{|N_{\frac{k-1}{n}}|} (\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sqrt{n} + i \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{N_{\frac{k-1}{n}}}{|N_{\frac{k-1}{n}}|} \sqrt{n} (\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}}) \right). \end{aligned}$$

Ici  $\sqrt{n}(\tilde{B}_{\frac{k}{n}} - \tilde{B}_{\frac{k-1}{n}})$  sont des gaussiennes iid et on reconnaît alors la définition de  $M_n$ .

- (b) On a  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .  $\partial_x f = 2x$ ,  $\partial_{xx} f = 2$ ,  $\partial_y f = 2y$  and  $\partial_{yy} f = 2$  et on peut écrire  $dN_s = \begin{pmatrix} u_s^{(1)} d\tilde{B}_s \\ u_s^{(2)} d\tilde{B}_s \end{pmatrix}$ . Alors

$$\|N_t\|^2 = 1 + 2 \int_0^t N_s^{(1)} u_s^{(1)} d\tilde{B}_s + 2 \int_0^t u_s^{(2)} N_s^{(2)} d\tilde{B}_s + \int_0^t (u_s^{(1)})^2 + (u_s^{(2)})^2 ds.$$

Or  $\|u_s\|^2 = 1$  et  $u_s \perp N_s$  pour tout  $s$  donc  $(u_s^{(1)})^2 + (u_s^{(2)})^2 = 1$  et  $N_s^{(1)} u_s^{(1)} + N_s^{(2)} u_s^{(2)} = 0$ . Conclusion

$$\|N_t\|^2 = 1 + t$$

- (c) Puisque  $\|N_t\|$  est déterministe strictement croissant on a  $T_{\frac{1}{2}} = \infty$  p.s et  $T_{10} = 9$  p.s. En particulier  $\mathbb{P}(T_{10} < T_{\frac{1}{2}}) = 1$ .

## 15.4 Examen Martingale et Mouvement Brownien.

### 15.4.1 Problèmes

Durée de l'examen : 3h.

**Problème 15.4.1.** .

1. [Partie Discrète] Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des variables indépendantes identiquement distribuées avec  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . On note

$$\text{sign}_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Pour  $x \in \mathbb{Z}$ , on note  $T_x = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = x\}$ .

- (a) Montrer que

$$|S_n| = \sum_{i=1}^n \text{sign}_0(S_{i-1})X_i + \sum_{i=1}^n 1_{\{S_{i-1}=0\}}.$$

- (b) Montrer que  $|S_n|$  est une sous-martingale.  
 (c) Soit  $a < 0 < b$ , montrer que  $T := T_a \wedge T_b < \infty$  p.s et calculer  $\mathbb{P}(T = T_a)$ .  
 (d) Calculer  $\mathbb{E}(|S_T|)$ .  
 (e) On note  $O_n =$  le nombre de fois que  $S_i = 0$  pour  $i \leq n$ . Donner  $\mathbb{E}(O_T)$ .
2. [Partie Continue] Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. Soit  $\eta > 0$ , on pose

$$h_\eta(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq \eta \\ \frac{x^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} & \text{si } x \in (-\eta, \eta) \\ -x & \text{si } x \leq -\eta. \end{cases}$$

- (a)  $h_\eta$  est-il  $\mathcal{C}^1$  ?  $\mathcal{C}^2$  ?  
 (b) Exprimer  $h(B_t)$  avec la formule d'Ito (On admettra que cette dernière est également valide pour  $h_\eta$ .)  
 (c) Montrer que  $h_\eta(B_t)$  est une sous-martingale continue.  
 (d) On note  $L_t =$  le temps que le mouvement brownien a passé dans l'intervalle  $(-\eta, \eta)$  jusqu'au temps  $t$ . C'est à dire la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $\{s \leq t, |B_s| \leq \eta\}$ . Soit  $T' = \inf\{t, |B_t| = 1\}$ . Calculer  $\mathbb{E}(L_{T'})$ .  
 (e) Montrer que  $\{s \leq t, B_s = 0\}$  est un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle p.s.  
 (f) Soit  $u \geq 0$  et  $X_u = \inf\{t > u, B_t = 0\}$  et  $\epsilon > 0$ . Montrer que  $\mathbb{P}(\exists s \in (X_u, X_u + \epsilon), B_s = 0) = 1$ .  
 (g) Montrer que  $\{s \leq t, B_s = 0\}$  n'a pas de point isolé. C'est à dire  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \{s \leq t, B_s = 0\}, (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \{s \leq t, B_s = 0\} \neq \{x\}$  p.s.

**Problème 15.4.2.** .

1. [Martingale dans  $\mathbb{R}$ ] Soit  $M_t$  une martingale continue avec  $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  pour tout  $t \geq 0$  et on note  $\langle M, M \rangle$  sa variation quadratique.

(a) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n (M_{\frac{k}{n}} - M_{\frac{k-1}{n}})^2 \rightarrow 0$$

en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

- (b) On suppose que  $\mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty) < \infty$ . Montrer que  $M_t$  converge p.s.  
 (c) On note  $W_t$  un mouvement brownien issu de  $x > 0$  (c'est à dire  $W_t = x + B_t$  où  $B$  est un mouvement brownien issu de 0). Soit  $T = \inf\{t \geq 0, W_t = 0\}$ . Montrer que  $W_{t \wedge T}$  converge p.s mais pas dans  $L^1$ .  
 (d) En déduire que  $\mathbb{E}(T) = \infty$ .

2. [Mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^m$ ]

- (a) Soit  $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^m$  issu de  $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Et  $0 < \epsilon < \|x\|$ ,  $T = \inf\{\|\mathbf{B}_t\| = \epsilon\}$ . Exprimer  $\|\mathbf{B}_{t \wedge T}\|$  et  $\|\mathbf{B}_{t \wedge T}\|^2$  à l'aide de la formule d'Ito.  
 (b) Montrer qu'il existe  $\tilde{B}$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}$  et  $A$  un processus croissant tel que  $\|\mathbf{B}_{t \wedge T}\| = \tilde{B}_{t \wedge T} + A_{t \wedge T}$ .  
 (c) Montrer que l'équation différentielle stochastique  $dX_s = 2\sqrt{|X_s|}dB_s + mds$ ,  $X_0 = x$  admet une solution. (Typo, il manquait le 2.)  
 (d) Si  $m \geq 3$ , donner  $k > 0$  tel que  $h(x) = \frac{1}{\|x\|^k}$  soit une fonction harmonique sur  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ .  
 (e) En déduire que pour  $m \geq 3$ ,  $\mathbb{P}(T = \infty) \rightarrow 1$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .  
 (f) En déduire qu'il y a unicité trajectorielle pour EDS  $dX_s = 2\sqrt{|X_s|}dB_s + mds$ ,  $X_0 = x$

### 15.4.2 Correction

**Solution 15.4.3.** .

1. [Partie Discrète]

(a) On a

$$|S_{n+1}| = |S_n + X_{n+1}| = \begin{cases} S_n + X_{n+1} & \text{si } S_n > 0 \\ 1 & \text{si } S_n = 0 \\ -S_n - X_{n+1} & \text{si } S_n < 0 \end{cases}$$

Donc

$$|S_{n+1}| = |S_n| + \text{sign}_0(S_n)X_{n+1} + 1_{\{S_n=0\}}$$

et on conclue par récurrence immédiate.

- (b) (méthode 1)  $(X_i)_{i \geq 0}$  sont des variables iid de moyenne nulles donc  $S_n$  est une martingale.  $x \rightarrow |x|$  est convexe donc par Jensen  $|S_n|$  est une sous-martingale. (méthode 2)  $\text{sign}_0(S_{i-1})$  est  $\mathcal{F}_{i-1}$  mesurable donc prévisible. Donc  $\sum_{i=1}^n \text{sign}_0(S_{i-1})X_i$  est une martingale et  $\sum_{i=1}^n 1_{\{S_{i-1}=0\}}$  est croissant. Donc  $|S_n|$  est une sous-martingale comme somme d'une martingale et d'un processus croissant.
- (c) (méthode 1)  $S_{T \wedge n}$  est une martingale bornée donc converge p.s. Elle est à valeur entière elle est donc constante à partir d'un certain rang. Les seules limites possibles sont alors  $a$  ou  $b$  c'est à dire  $T < \infty$  p.s. (méthode 2) Par le théorème centrale limite  $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \rightarrow$  Gaussienne de variance 1. Donc  $\mathbb{P}(\forall k \leq n, S_k \notin \{a, b\}) \leq \mathbb{P}(S_n \in (a, b)) = \mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \in (\frac{a}{\sqrt{n}}, \frac{b}{\sqrt{n}})) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$ . On a avec le théorème de convergence dominé

$$0 = \mathbb{E}(S_{n \wedge T}) \rightarrow \mathbb{E}(S_T) = a\mathbb{P}(T = T_a) + b\mathbb{P}(T = T_b) = (a-b)\mathbb{P}(T = T_a) + b$$

donc

$$\mathbb{P}(T = T_a) = \frac{b}{b-a}.$$

- (d) Avec la question précédente

$$\mathbb{E}(|S_T|) = \frac{b}{b-a}|a| + b\frac{-a}{b-a} = \frac{2|ab|}{b+|a|}.$$

- (e) Par limite croissante  $\mathbb{E}(O_T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(O_{T \wedge n})$  et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(O_{T \wedge n}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T \wedge n} 1_{\{S_{i-1}=0\}}\right) = \mathbb{E}(|S_{T \wedge n}|) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T \wedge n} \text{sign}_0(S_{i-1})X_i\right) \\ &\rightarrow \frac{2|ab|}{b+|a|} \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  car le deuxième terme est une martingale.

2. [Partie Continue] Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. Soit  $\eta > 0$ , on pose

$$h_\eta(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq \eta \\ \frac{x^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} & \text{si } x \in (-\eta, \eta) \\ -x & \text{si } x \leq -\eta. \end{cases}$$

- (a) On commence par vérifier que  $h_\eta$  est bien continue  $h_\eta(\eta_+) = \eta = \frac{\eta^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} = h_\eta(\eta_-)$  et même chose pour  $-\eta$ . On calcule ensuite

$$h'_\eta(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\eta, \infty) \\ \frac{x}{\eta} & x \in (-\eta, \eta) \\ -1 & x \in (-\infty, -\eta) \end{cases}$$

de même  $h'_\eta(\eta_+) = 1 = \frac{\eta}{\eta} = h'_\eta(\eta_-)$  et même chose pour  $-\eta$ . Donc  $h_\eta$  est bien  $\mathcal{C}^1$ . Ensuite

$$h''_\eta(x) = \begin{cases} 0 & x \in (\eta, \infty) \\ \frac{1}{\eta} & x \in (-\eta, \eta) \\ 0 & x \in (-\infty, -\eta) \end{cases}$$

La fonction est donc  $\mathcal{C}^2$  par morceau mais pas  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

(b) Avec la formule d'Ito

$$h_\eta(B_t) = \frac{\eta}{2} + \int_0^t h'_\eta(B_s)dB_s + \frac{1}{2\eta} \int_0^t 1_{B_s \in (-\eta, \eta)} ds$$

- (c) (methode 1)  $h'_\eta$  est croissante donc  $h_\eta$  est convexe donc par Jensen  $h_\eta(B_t)$  est une sous-martingale continue. (methode 2) avec la formule d'Ito  $h_\eta(B_t)$  est la somme d'une martingale (par définition de l'intégrale stochastique) et d'une fonction croissante. C'est donc bien une sous-martingale.
- (d) Dans le cas  $\eta > 1$  alors  $L_{T'} = T'$ . Et avec la martingale  $B_t^2 - t$  on peut calculer

$$0 = \mathbb{E}(B_{T \wedge t}^2) - \mathbb{E}(T \wedge t) \rightarrow 1 - \mathbb{E}(T)$$

Donc  $\mathbb{E}(L_{T'}) = 1$ . Dans le cas  $\eta < 1$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h_\eta(B_{t \wedge T})) &= \mathbb{E} \left( \frac{\eta}{2} + \int_0^{t \wedge T} h'_\eta(B_s)dB_s + \frac{1}{2\eta} \int_0^{t \wedge T} 1_{B_s \in (-\eta, \eta)} ds \right) \\ &= \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge T} 1_{B_s \in (-\eta, \eta)} ds \right) \\ &= \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \mathbb{E}(L_{t \wedge T}) \end{aligned}$$

Par convergence dominé  $\mathbb{E}(h_\eta(B_{t \wedge T})) \rightarrow \mathbb{E}(h_\eta(B_T)) = 1$  et par croissance monotone  $\mathbb{E}(L_{t \wedge T}) \rightarrow \mathbb{E}(L_T)$ . Conclusion

$$\mathbb{E}(L_T) = 2\eta - \eta^2$$

- (e) L'ensemble  $\{s \leq t, B_s = 0\}$  est fermé car  $B_t$  est une fonction continue. Ensuite pour tout  $\eta > 0$   $\{s \leq t, B_s = 0\} \subset \{s \leq t, |B_s| < \eta\}$ . On note plus généralement  $L_t(\eta)$  qui dépend donc de  $\eta$  et comme précédemment, on a

$$\frac{1}{2\eta} \mathbb{E}(L_t(\eta)) \leq \mathbb{E}(h_\eta(B_t)) \leq \eta + \mathbb{E}(|B_t|).$$

Conclusion

$$\mathbb{E}(|\{s \leq t, B_s = 0\}|) \leq \mathbb{E}(L_t(\eta)) \leq 2\eta^2 + \eta\mathbb{E}(|B_t|) \rightarrow 0$$

lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . Donc  $\mathbb{E}(|\{s \leq t, B_s = 0\}|) = 0$  c'est à dire  $|\{s \leq t, B_s = 0\}| = 0$  p.s

- (f)  $X_u$  est un temps d'arrêt. Par principe de Markov fort on a  $B_s^{(X_u)} = B_{X_u+s} - B_{X_u}$  est un mouvement brownien. Donc  $\mathbb{P}(\exists s \in (0, \epsilon), B_s^{(X_u)} = 0) = 1$ . C'est à dire  $\mathbb{P}(\exists s \in (0, \epsilon), B_{X_u+s} = 0) = 1$  car  $B_{X_u} = 0$  par définition.
- (g) Pour simplifier les notations on va supposer  $t = 1$ . On découpe l'intervalle  $[0, 1]$  en morceau  $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$  et on considère la famille de temps d'arrêt  $(X_{\frac{k}{2^n}})$ . Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k,n,m} \{\exists s \in (X_{\frac{k-1}{2^n}}, X_{\frac{k-1}{2^n}} + \frac{1}{m}), B_s = 0\}\right) = 1$$

En particulier pour tout intervalle  $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$  si il existe  $s \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$ ,  $B_s = 0$  alors  $X_{\frac{k-1}{2^n}} < \frac{k}{2^n}$  et avec  $\frac{1}{m} < \frac{k}{2^n} - X_{\frac{k-1}{2^n}}$  on a qu'il existe un autre point dans  $(X_{\frac{k-1}{2^n}}, X_{\frac{k-1}{2^n}} + \frac{1}{m}) \subset [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$  tel que  $B_s = 0$ . Conclusion dans tous  $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$  alors  $\#\{B_s = 0\} = 0$  ou  $\#\{B_s = 0\} \geq 2$ . Il n'y a donc pas de points isolés.

**Problème 15.4.4.**

1. [Martingale dans  $\mathbb{R}$ ] Soit  $M_t$  une martingale continue avec  $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  pour tout  $t \geq 0$  et on note  $\langle M, M \rangle$  sa variation quadratique.

(a) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n |M_{\frac{k}{n}} - M_{\frac{k-1}{n}}|^3\right) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_i |M_{\frac{i}{n}} - M_{\frac{i-1}{n}}| \sum_{k=1}^n |M_{\frac{k}{n}} - M_{\frac{k-1}{n}}|^2\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sup_i |M_{\frac{i}{n}} - M_{\frac{i-1}{n}}| |M_1 - M_0|^2\right) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  puisque  $\sup_i |M_{\frac{i}{n}} - M_{\frac{i-1}{n}}| \rightarrow 0$  par uniforme continuité..

(b) On a

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t) \leq \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty) < \infty$$

Donc  $M_t$  est uniformément borné dans  $L^2$  donc converge p.s.

- (c)  $W_{t \wedge T}$  est une martingale positive donc converge p.s. Supposons par l'absurde qu'elle converge dans  $L^1$  alors

$$x = \mathbb{E}(W_0) = \mathbb{E}(W_{t \wedge T}) \rightarrow \mathbb{E}(W_T) = 0$$

absurde.

- (d) On a que  $\langle W, W \rangle_{t \wedge T} = t \wedge T$ . Par l'absure si  $\mathbb{E}(T) < \infty$  alors  $\mathbb{E}(W_t^2) \leq x^2 + \mathbb{E}(T) < \infty$ . Donc  $W_t$  uniformément borné dans  $L^2$  et converge donc dans  $L^2$  et donc dans  $L^1$ . Contradiction.

2. [Mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^m$ ]

- (a) On a avec la formule d'Ito

$$\|\mathbf{B}_{t \wedge T}\|^2 = \|x\|^2 + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} B_s^{(i)} dB_s^{(i)} + m(t \wedge T)$$

et ensuite avec  $f(y) = \sqrt{y}$ ,  $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$  et  $f''(y) = -\frac{1}{4y^{3/2}}$ . On calcule la variations quadratiques

$$\begin{aligned} \langle 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} B_s^{(i)} dB_s^{(i)}, 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} B_s^{(i)} dB_s^{(i)} \rangle &= 4 \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} |B_s^{(i)}|^2 d\langle B_s^{(i)}, B_s^{(i)} \rangle \\ &= 4 \int_0^{t \wedge T} \|\mathbf{B}_s\|^2 ds \end{aligned}$$

On a alors

$$\|\mathbf{B}_{t \wedge T}\| = \sqrt{\|\mathbf{B}_{t \wedge T}\|^2} = \|x\| + \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} \frac{B_s^{(i)}}{\|\mathbf{B}_s\|} dB_s^{(i)} + \frac{m}{2} \int_0^{t \wedge T} \frac{1}{\|\mathbf{B}_s\|} ds - \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T} \frac{\|\mathbf{B}_s\|^2}{\|\mathbf{B}_s\|^3} ds.$$

- (b) On calcule la variation quadratique

$$\langle \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} \frac{B_s^{(i)}}{\|\mathbf{B}_s\|} dB_s^{(i)}, \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} \frac{B_s^{(i)}}{\|\mathbf{B}_s\|} dB_s^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} \frac{|B_s^{(i)}|^2}{\|\mathbf{B}_s\|^2} ds = t \wedge T$$

Donc avec le critère de Lévy on a que  $\sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} \frac{B_s^{(i)}}{\|\mathbf{B}_s\|} dB_s^{(i)}$  est un mouvement brownien. Le terme de droite croissant comme intégrale d'une fonction positive.

- (c) Avec la question précédente on a  $d\|\mathbf{B}_s\|^2 = 2\|\mathbf{B}_s\| \sum_{i=1}^m \frac{B_s^{(i)}}{\|\mathbf{B}_s\|} dB_s^{(i)} + mds$ . On pose  $X_s = \|\mathbf{B}_s\|^2$  qui est alors solution de

$$dX_s = 2\sqrt{|X_s|}B_s + mds.$$

- (d) Avec  $k = 2l$  on calcule  $h(x) = \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^l}$ ,  $\partial_{x_i} h = \frac{2lx_i}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{l+1}}$ ,  $\partial_{x_i x_i} h = \frac{2l((x_1^2 + \dots + x_m^2) - 2(l+1)x_i^2)}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{l+2}}$ . Alors

$$\Delta h = \sum_{i=1}^m \partial_{x_i x_i} h = 2k \frac{(m - 2(l + 1))}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{l+1}}$$

qui est donc harmonique pour  $l = \frac{m}{2} - 1$  c'est à dire  $k = m - 2$ .

- (e) Soit  $k$  comme dans la question précédente on a que  $h(\mathbf{B}_{t \wedge T})$  est une martingale car  $h$  est harmonique. Alors

$$x = \mathbb{E}(h(\mathbf{B}_{t \wedge T})) \geq \mathbb{E}(h(\mathbf{B}_{t \wedge T})1_{T \leq t}) = \frac{1}{\epsilon^{m-2}} \mathbb{P}(T \leq t)$$

car  $h$  est positive. Donc  $\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq t) \leq \epsilon^{m-2}x$ . En particulier cela converge vers 0 pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .

- (f) Sur  $\{x \in \mathbb{R}, |x| > \epsilon\}$  la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est lipshitzienne. Il y a donc unicité trajectoirel jusqu'à  $T$ . C'est à dire soit  $X$  et  $\tilde{X}$  deux solutions avec le même mouvement brownien alors

$$X_{t \wedge T} = \tilde{X}_{t \wedge T}.$$

presque surement puisque  $X$  à la même loi que le mouvement brownien en dimension  $m$ , Or lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  on a  $\mathbb{P}(T = \infty)$  qui converge vers 1 et donc  $X_t = \tilde{X}_t$ . p.s pour tout  $t \geq 0$ .