



Exemples pour l'utilisation des formes différentielles à la physique de tous les jours

Raphael Ducatez

► To cite this version:

Raphael Ducatez. Exemples pour l'utilisation des formes différentielles à la physique de tous les jours. Master. France. 2026, pp.53. <hal-05704741>

HAL Id: hal-05704741

<https://hal.science/hal-05704741v1>

Submitted on 27 Jul 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Exemples pour l'utilisation des formes différentielles à la physique de tous les jours

Raphael Ducatez

27 juillet 2026

Nous proposons une introduction au formalisme des formes différentielles et de leurs applications en physique. Le cœur de ces notes est une longue liste d'exemples sur des notions habituellement abordées dans des cours de physique de niveau L1, L2 ou L3.

Table des matières

1	Introduction aux formes différentielles	3
1.1	Formes différentielles	3
1.2	Algèbre extérieur	4
1.3	Champs de vecteurs tangents	7
1.4	Intégrer sur une sous variété	9
1.5	Différentielle extérieure	11
1.6	Changement de coordonnées	15
1.7	Tiré en arrière et Dérivée de Lie	20
1.8	Les « isomorphismes » dans un espace euclidien	28
2	Exemples pratiques d'applications des formes différentielles	33
2.1	Mécanique	33
2.2	Thermodynamique	35
2.3	Électromagnétisme dans $\mathbb{R}^3$	37
2.4	Hydrodynamique	41
3	Exemples d'applications en physique plus avancé	45
3.1	Mécanique Hamiltonienne	45
3.2	Équations de Maxwell dans $\mathbb{R}^4$	46
3.3	Fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$	48
A	Annexe	50
A.1	Plus de coordonnées sphériques	50
A.2	Construction explicite pour le lemme de Poincaré	51
A.3	Transformée de Fourier	52

Préface

Cette introduction fait suite à des notes précédentes « For the use of exterior form in daily physics, an introduction without coordinate frame » [Duc23] dans lesquelles j’insistais surtout sur l’aspect géométrique de l’utilisation des formes différentielles et sur les motivations en physique. On m’a cependant fait remarquer (à juste titre) que certains points abordés étaient trop avancés pour être appelés « daily physics ». Et de fait, une formulation purement géométrique et « without coordinate frame » a finalement du sens surtout dans le contexte de la relativité générale, là où les notions de temps et d’espace se mélangent, où tous les objets ne sont plus que tenseurs covariant et/ou contravariant et où la géométrie est d’une grande aide pour garder la tête sur les épaules. Pour une physique plus terre à terre par contre, cette approche n’est peut-être pas tellement nécessaire et celle ci manque d’aspect pratique pour faire des calculs.

Ici, j’ai alors souhaité prendre au mot le titre « physique de tous les jours ». Le cœur de ces notes est une longue liste d’exemples, qui ont tous à priori déjà été abordés dans des cours de physique de niveau L1, L2 (Section 2) ou L3 (Section 3) et qui ont été réécrits avec le formalisme des formes différentielles. Pour que ces notes soient auto-cohérentes, il m’a semblé tout de même nécessaire d’ajouter une première partie d’introduction de ces notions en mathématique. Celle ci est finalement assez standard et similaire à ce qu’on pourrait trouver ailleurs dans la littérature [Fra11, BBB85, LCC⁺09, Fla63]. J’ai cependant essayé de rendre le tout plus accessible à des physiciens, sans passer trop de temps sur les définitions formelles ou sur les preuves et en ajoutant autant que possible des formules et des équations « clef en main » telles que par exemple le changement en coordonnées sphériques ou des calculs systématiques dans $\mathbb{R}^3$. Je reprend également pas mal d’éléments de [Duc23] (figures, tableaux,...), en ajoutant les calculs en coordonnées, des remarques sur la géométrie et une discussion sur des « isomorphismes ».

Motivations

Le formalisme des formes différentielle date d’Élie Cartan et est donc vieux d’au moins un siècle. Celui ci est cependant, encore aujourd’hui, vu comme un objet mathématique sophistiqué est reste assez peu utilisé en dehors de la physique théorique. Le but de ces notes est d’essayer de démocratiser (vulgariser on pourrait dire) ces notions et ces outils. Mais tout d’abord pourquoi utiliser les formes différentielles ?

La première motivation est conceptuelle. Le formalisme mathématique est paradoxalement plus proche du sens physique et donne, je trouve, un lien plus direct entre la modélisation et les calculs et ajoute une touche d’« analyse dimensionnelle ». Ensuite, les outils mathématiques des formes différentielles recouvrent ceux de l’analyse vectorielle. Les calculs ne sont pas plus compliqués que si on n’utilisait simplement $\vec{A} \times \vec{B}$, $\text{rot}(\vec{A})$ où $\det(M)$ mais les notations peuvent être à la fois courtes et pratiques. De fait, ces outils sont déjà (sans le dire) en grande partie utilisés et il s’agit pour beaucoup que d’un changement de

vocabulaire. Celui ci apporte cependant un point de vue en plus, un peu comme la mécanique Hamiltonienne vis à vis des lois de Newton. Le formalisme est surtout beaucoup plus général et devient nécessaire pour des modèles physiques plus abstrait, ou en plus grande dimension, par exemple, lorsque l'on commence à travailler dans $\mathbb{R}^4$. Enfin, pour citer quelques exemples précis, nous pourrions mentionner l'utilisation de systèmes de coordonnées non orthonormées, l'opérateur de différentielle extérieure pour l'électromagnétisme ou la dérivée de Lie pour l'hydrodynamique.

1 Introduction aux formes différentielles

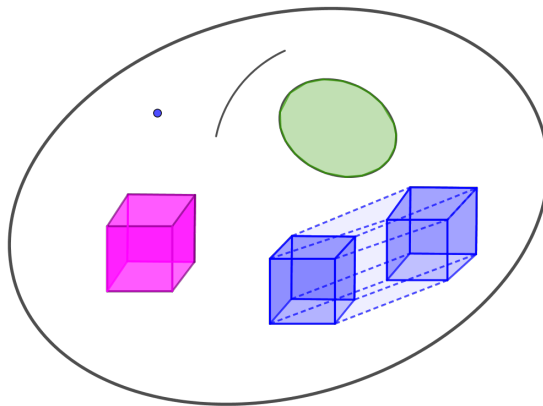


FIGURE 1 – Les sous variétés dans $\mathbb{R}^4$: point, ligne, surface, volume et temps×volume.

1.1 Formes différentielles

Commençons par proposer la définition informelle suivante qui motive et justifie parfaitement l'utilisation des formes différentielles en physique.

Définition 1. Une k -forme différentielle est ce qui s'intègre sur une sous variété de dimension k .

À la différence du formalisme usuel, il faut ici distinguer parmi les « scalaires » les 0-formes qui correspondent aux quantités intensives des 3-formes qui correspondent aux quantités extensives. Il faut aussi distinguer parmi les « vecteurs » les 1-formes des 2-formes. Le tout est transparent avec le système d'unité.

dimension	base	quantité	unité
0-forme	1	Température	K
		Pression	Pa
		Potentiel	V
		Indice de Réfraction	1
1-forme	dx, dy, dz	Gradient de température	$K.m^{-1}$
		Gradient de pression	$Pa.m^{-1}$
		Champs électrique	$V.m^{-1}$
		Potentiel vecteur	$V.s.m^{-1}$
		Force	$J.m^{-1}$
2-forme	$dx \wedge dy,$ $dx \wedge dz,$ $dy \wedge dz$	Flot de masse	$kg.s^{-1}.m^{-2}$
		Flot de charge	$C.s^{-1}.m^{-2}$
		Flot de chaleur	$W.m^{-2}$
		Radiation	$W.m^{-2}$
		Induction magnétique	$V.s.m^{-2}$
3-forme	$dx \wedge dy \wedge dz$	Densité de masse	$kg.m^{-3}$
		Densité de charge	$C.m^{-3}$
		Densité d'énergie	$J.m^{-3}$
		Capacité thermique	$JK^{-1}.m^{-3}$

La notation dx indique que l'intégration se fait sur un petit segment dans la direction dx , la notation $dx \wedge dy$ pour un petit élément de surface $dx dy$ et la notation $dx \wedge dy \wedge dz$ sur un petit parallélogramme $dx dy dz$. Mais ces notations indiquent également que objet suivent les règles de calculs proposées par l'algèbre extérieure que l'on explicitera dans la section suivante.

1.2 Algèbre extérieure

1.2.1 k -vecteurs

Dans $\mathbb{R}^n$, on construit les éléments de la bases pour l'algèbre extérieure à partir des symboles $dx_1, \dots, dx_n$ et par combinaison avec le symbole $\wedge$. Chaque dx_i ne peut apparaître au plus qu'une fois. Il est ainsi possible construire jusqu'à 2^n termes différents

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

que on notera aussi $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ pour $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. On appelle un k -vecteur $u \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ un vecteur formé à partir d'éléments la base de longueur k . La dimension de l'espace $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ est $\binom{n}{k}$.

Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, il y a les 8 termes suivants

$$\underbrace{1}_{0\text{-vecteur}}, \underbrace{dx, dy, dz}_{1\text{-vecteur}}, \underbrace{dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx}_{2\text{-vecteur}}, \underbrace{dx \wedge dy \wedge dz}_{3\text{-vecteur}}$$

On appellera une k -forme différentielle un «champs vectoriel» à valeur dans les k -vecteurs.

Définition 2. Une k -forme différentielle est une application $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_I$$

où ω_I sont des fonctions : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Notations On écrit $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées de position, on utilisera la notation $\sum_{\text{cyc}}$ («somme cyclique») où les termes restent les mêmes mais avec une permutation cyclique des indices ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$). Ainsi on notera pour f une 0-forme

$$f = f(\mathbf{x}),$$

pour A une 1-forme

$$A = A_x(\mathbf{x})dx + A_y(\mathbf{x})dy + A_z(\mathbf{x})dz = \sum_{\text{cyc}} A_x(\mathbf{x})dx,$$

pour B une 2-forme

$$B = B_{xy}(\mathbf{x})dx \wedge dy + B_{yz}(\mathbf{x})dy \wedge dz + B_{zx}(\mathbf{x})dz \wedge dx = \sum_{\text{cyc}} B_{xy}(\mathbf{x})dx \wedge dy,$$

et pour C une 3-forme

$$C = C_{xyz}(\mathbf{x})dx \wedge dy \wedge dz$$

où $f, A_x, \dots, B_{xy}, \dots, C_{xyz}$ sont des fonctions réelles (dérivables) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour insister que l'on ne considère que les coefficients, on pourra les écrire en vecteurs

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_{yz} \\ B_{zx} \\ B_{xy} \end{pmatrix}$$

avec comme convention pour les 2-formes " $B_{yz} = \vec{B}_x$ ", la coordonnée manquante.

1.2.2 Produit Extérieur

La première règle de calcul sur les k -vecteurs est l'anti-commutativité :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (1)$$

et en particulier

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad dx_i \wedge dx_i = 0.$$

On a par exemple : $(2dx + 3dy) \wedge (dx - dy) = -2dx \wedge dy + 3dy \wedge dx = -5dx \wedge dy$
ou $(dx + dz) \wedge (2dy + dz) \wedge (dx - dy) = 3dx \wedge dy \wedge dz$.

Cette règle se généralise par associativité et multilinéarité aux formes différentielles.

Définition 3. (*Produit Extérieur*) Soient α et β une k -forme et ℓ -forme différentielle. On définit $\alpha \wedge \beta$ comme la $(k + \ell)$ -forme différentielle

$$[\alpha \wedge \beta](\mathbf{x}) = \sum_{|I|=k} \sum_{|J|=\ell} \alpha_I(\mathbf{x}) \beta_J(\mathbf{x}) dx_I \wedge dx_J$$

avec

$$dx_I \wedge dx_J = \begin{cases} (-1)^m dx_{I \cup J} & \text{si } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{si } I \cap J \neq \emptyset \end{cases} \quad (2)$$

où m est le nombre de transpositions nécessaires pour remettre les indices $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell\}$ dans un ordre croissant.

En pratique, on pourra simplement utiliser les calculs suivants.

Exemple 4. (Produit extérieur dans $\mathbb{R}^3$) Si A est une 1-forme et B une 1-forme, on obtient le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$,

$$A \wedge B = \sum_{\text{cyc}} (A_x(\mathbf{x}) B_y(\mathbf{x}) - B_y(\mathbf{x}) A_x(\mathbf{x})) dx \wedge dy.$$

Si A est une 1-forme et B une 2-forme, on obtient le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$,

$$A \wedge B = \left(\sum_{\text{cyc}} A_x(\mathbf{x}) B_{yz}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Si A, B, C sont des 1-formes, on obtient $\det(A|B|C)$ le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$,

$$A \wedge B \wedge C = \left(\sum_{\sigma \text{ permutation}} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(1)}(\mathbf{x}) B_{\sigma(2)}(\mathbf{x}) C_{\sigma(3)}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

avec $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation. On retrouve ici la formule $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \det(A|B|C)$.

De fait, la formule avec le déterminant est très générale.

Exemple 5. (Déterminant dans $\mathbb{R}^n$) Si $A_1, \dots, A_n$ sont des 1-formes sur $\mathbb{R}^n$, leur produit extérieur donne le déterminant $\det(A_1 | \dots | A_n)$,

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n = \left(\sum_{\sigma \text{ permutation}} \epsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)}(\mathbf{x}) \dots A_{n\sigma(n)}(\mathbf{x}) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Mentionnons également une conséquence directe de l'anti-commutativité.

Proposition 6. Soient α une k -forme différentielle et β une ℓ -forme différentielle

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha.$$

En particulier on a directement que si α est de degré impair $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Ce n'est par contre pas le cas si le degré est pair. Voici un contre l'exemple dans $\mathbb{R}^4$: $\alpha = dx \wedge dz + dy \wedge dt$ avec $\alpha \wedge \alpha = 2dx \wedge dz \wedge dy \wedge dt \neq 0$.

1.3 Champs de vecteurs tangents

Commençons par une définition informelle du vecteur tangent.

Définition 7. (Vecteur tangent) Un champs de vecteur tangent est ce qui décrit un flot ou un mouvement.

Notation Dans $\mathbb{R}^n$ on utilisera la base canonique $e_1, \dots, e_n$ et on notera

$$V = \sum_{i=1}^n V_i e_i$$

Notre principale exemple sera bien sûr le champs de vitesse mais il pourra aussi s'agir de champs d'accélération, de petit déplacements, de déformation...

Objet	base	quantité	unité
vecteur tangent	e_x, e_y, e_z	Vitesse d'un fluide	$m.s^{-1}$

L'appellation « tangent » vient du fait que si le mouvement est contraint à rester sur une sous variété de $\mathbb{R}^n$, le vecteur vitesse est effectivement tangent à cette sous variété. Dans ces notes nous garderons cette dénomination pour distinguer ces objets des vecteurs « usuels ».

Définition 8. (Dualité) Soient $V = \sum_{i=1}^n V_i e_i$ et $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ un vecteur tangent et un 1-vecteur dans $\mathbb{R}^n$, on définit

$$\alpha(V) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, on peut considérer α comme une application (forme) linéaire $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on notera aussi $\alpha(V) = i_V \alpha$. Cette opération s'étend aux k -formes telle que celle ci respecte l'anti-commutativité.

Définition 9. (Produit Intérieur) Pour $V = \sum_{i=1}^n V_i(\mathbf{x}) e_i$ un vecteur tangent et ω une k -forme différentielle, le produit intérieur est la $(k-1)$ forme suivante

$$i_V \omega = \sum_{i=1}^n \sum_I V_i(\mathbf{x}) \omega_I(\mathbf{x}) i_{e_i} dx_I, \quad \text{avec } i_{e_i} dx_I = \begin{cases} (-1)^m dx_{I \setminus \{i\}} & \text{si } i \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où m la position de i dans I .

Par exemple, pour f une 0-forme, on a toujours $i_V f = 0$ et sinon on utilise le tableau suivant

$i_{e_x} dx = 1$	$i_{e_x} dx \wedge dy = dy$	$i_{e_x} dx \wedge dy \wedge dz = dy \wedge dz$
$i_{e_y} dx = 0$	$i_{e_y} dx \wedge dy = -dx$	$i_{e_y} dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dz$
$i_{e_z} dx = 0$	$i_{e_z} dx \wedge dy = 0$	$i_{e_z} dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy$

Exemple 10. (Produit intérieur dans $\mathbb{R}^3$) Pour V un vecteur tangent. Si A est une 1-forme, on obtient le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{A}$

$$i_V A = \sum_{\text{cyc}} V_x(\mathbf{x}) A_x(\mathbf{x})$$

Si B est une 2-forme, on obtient le produit vecteur $\vec{B} \times \vec{V}$

$$i_V B = \sum_{\text{cyc}} (V_z(\mathbf{x}) B_{zx}(\mathbf{x}) - V_y(\mathbf{x}) B_{xy}(\mathbf{x})) dx$$

Si C est une 3-forme, on obtient simplement $C\vec{V}$

$$i_V C = C_{xyz}(\mathbf{x}) \left(\sum_{\text{cyc}} V_x(\mathbf{x}) dy \wedge dz \right).$$

Très souvent, on itérera le produit intérieur avec plusieurs vecteurs tangents autant de fois que le degré de la forme différentielle.

Définition 11. Soient ω une k -forme différentielle et $V_1, \dots, V_k$ des vecteurs tangents on définit

$$\begin{aligned} \omega(V_1, \dots, V_k) &= \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \left(\sum_{\sigma \text{ permutation sur } I} \epsilon(\sigma) V_1(\mathbf{x})_{\sigma(i_1)} \cdots V_k(\mathbf{x})_{\sigma(i_k)} \right) \\ &= i_{V_k} \cdots i_{V_1} \omega \end{aligned}$$

Nous terminons en mentionnant deux identités pour le produit intérieur.

Proposition 12. Soient ω une forme différentielle et V_1, V_2 deux vecteurs tangents, alors

$$i_{V_1} i_{V_2} \omega = -i_{V_2} i_{V_1} \omega.$$

Démonstration. Il suffit en effet de vérifier pour $i, j \in I$ avec $i < j$ que

$$\begin{aligned} i_{e_i} i_{e_j} dx_I &= (-1)^{m_j} i_{e_i} dx_{I \setminus \{j\}} = (-1)^{m_j + m_i} dx_{I \setminus \{i, j\}} \\ i_{e_j} i_{e_i} dx_I &= (-1)^{m_i} i_{e_j} dx_{I \setminus \{i\}} = (-1)^{m_j + m_i - 1} dx_{I \setminus \{i, j\}} \end{aligned}$$

car la position de j dans $I \setminus \{i\}$ a diminuée de 1 en retirant $\{i\}$. Si i ou $j \notin I$ on obtient simplement 0. $\square$

Proposition 13. Soient α et β une k -forme et une ℓ -forme différentielles, et V un vecteur tangent alors

$$i_V(\alpha \wedge \beta) = (i_V \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_V \beta)$$

Démonstration. La formule peut être vérifiée sur les $i_{e_i} dx_I \wedge dx_J$. $\square$

Celles ci impliquent par exemple les égalités suivantes.

Exemple 14. (Identités vectorielles I) L'égalité pour des 1-formes

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \beta - (i_X \beta) \alpha$$

donne la formule $\vec{X} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{X} \cdot \vec{A}) \vec{B} - \vec{A} (\vec{X} \cdot \vec{B})$. Cette autre égalité

$$i_Y i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) (i_Y \beta) - (i_X \beta) (i_Y \alpha)$$

donne la formule $(\vec{X} \times \vec{Y}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{X} \cdot \vec{A}) (\vec{Y} \cdot \vec{B}) - (\vec{Y} \cdot \vec{A}) (\vec{X} \cdot \vec{B})$.

1.4 Intégrer sur une sous variété

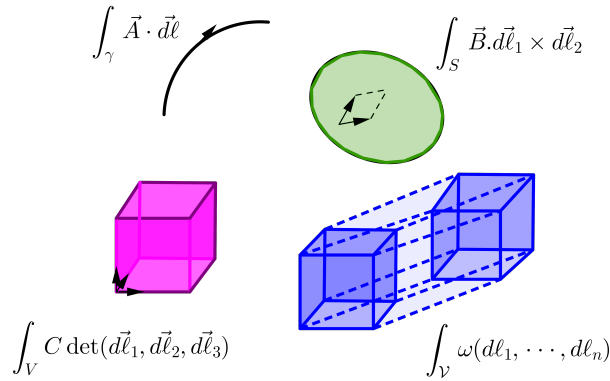


FIGURE 2 – Les intégrales usuelles dans $\mathbb{R}^3$ sur une ligne, surface ou volume et la formule générale en dimension quelconque.

On arrive enfin à la motivation principale des formes différentielle qui est de pouvoir intégrer sur une sous-variété en dimension quelconque. Celle ci justifie le formalisme des sections précédentes :

1. $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ indiquent la « direction » de la sous-variété sur laquelle intégrer.
2. Les règles d'anti-symétriques sont motivées par la formule du déterminant qui permet de calculer le volume d'un parallélogramme en dimension quelconque. Ceux ci jouent le rôle de « volumes élémentaires » pour l'intégration.

Commençons par l'intégrale dans un cas simple.

Définition 15. (Intégrer sur un «rectangle») Soit $\omega = \sum_I \omega_I(\mathbf{x}) dx_I$ une k -forme et

$$\mathcal{V}_I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i \in I, x_i \in [a_i, b_i] \text{ et } \forall i \notin I, x_i = 0\}.$$

L'intégrale de ω sur ce rectangle de dimension k est égale à

$$\int_{\mathcal{V}_I} \omega = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}.$$

Pour intégrer sur une sous variété plus générale, il est possible faire un changement de variables de telle sorte à retrouver une intégrale sur un rectangle ou faire un *tiré en arrière* (ce qui revient à peu près au même). Si la sous variété est paramétrée, on utilisera de manière répétée le produit intérieur. C'est cette dernière méthode que nous présentons maintenant.¹

Une sous variété $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ est paramétrée

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$$

avec les paramètres $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ et une fonction

$$\begin{aligned} F : \Theta \subset \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{\theta} &\rightarrow F(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

dont on notera également la famille de vecteurs tangents associés

$$V_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}).$$

Définition 16. (Intégrer sur une sous variété paramétrée) L'intégrale d'une k -forme ω sur cette variété est égale

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \omega &= \int \cdots \int_{\Theta} i_{V_k(\boldsymbol{\theta})} \cdots i_{V_1(\boldsymbol{\theta})} \omega(\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})) d\theta_1 \cdots d\theta_k \\ &= \int \cdots \int_{\Theta} \omega(\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})) (V_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, V_k(\boldsymbol{\theta})) d\theta_1 \cdots d\theta_k. \end{aligned}$$

Par exemple si $\Theta = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k : \forall i \in \{1, \dots, k\}, \theta_i \in [a_i, b_i]\}$ on a

$$\int_{\mathcal{V}} \omega = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} \omega(\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})) (V_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, V_k(\boldsymbol{\theta})) d\theta_1 \cdots d\theta_k.$$

1. Pour être rigoureux, il nous faudrait également définir l'orientation de la sous variété car celle ci ajoute un signe $\pm$ à l'intégrale. Par exemple si on intègre un flot sur une surface, il faudrait préciser si celui ci est entrant ou sortant. Celle ci est souvent implicite avec le choix de la paramétrisation.

Exemple 17. (Intégration dans $\mathbb{R}^3$) Si A est une 1 forme et que l'on note $\vec{d\ell} = \vec{V}(\theta)d\theta$ on obtient le produit scalaire « $\vec{d\ell}.\vec{A}$ »

$$\int_{\gamma} A = \int_a^b i_{V(\theta)} A(\mathbf{F}(\theta)) d\theta = \int_a^b \left(\sum_{\text{cyc}} V_x(\theta) A_x(\mathbf{F}(\theta)) \right) d\theta = \int_a^b \vec{A}.\vec{d\ell}$$

Si B est une 2-forme, on obtient l'élément d'intégration « $\vec{B}.\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ »

$$\begin{aligned} \int_S B &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} B(\mathbf{F}(\theta)) (V_1(\theta), V_2(\theta)) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[\sum_{\text{cyc}} B_{xy}(\mathbf{F}(\theta)) (V_{1,x}(\theta) V_{2,y}(\theta) - V_{1,y}(\theta) V_{2,x}(\theta)) \right] d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \vec{B}.\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

Si C est une 3-forme, on obtient le déterminant « $\det(V_1, V_2, V_3)$ »

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} C &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} C(\mathbf{F}(\theta)) (V_1(\theta), V_2(\theta), V_3(\theta)) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} C_{xyz}(\mathbf{F}(\theta)) \left(\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) V_{\sigma(1),x}(\theta) V_{\sigma(2),y}(\theta) V_{\sigma(3),z}(\theta) \right) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} C \det(V_1, V_2, V_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \end{aligned}$$

1.5 Différentielle extérieure

La notion de bord d'une sous-variété est à la fois très naturelle et très courante en physique : les points extrémaux d'une courbe, le cercle entourant un disque, la surface autour d'un solide. On peut aussi considérer les configurations initiales et finales d'un système dans $\mathbb{R}^3$ comme le bord du système évoluant dans le temps et donc comme le bord d'une sous-variété de dimension 4 dans $\mathbb{R}^4 (= \mathbb{R}^{3+1})$.

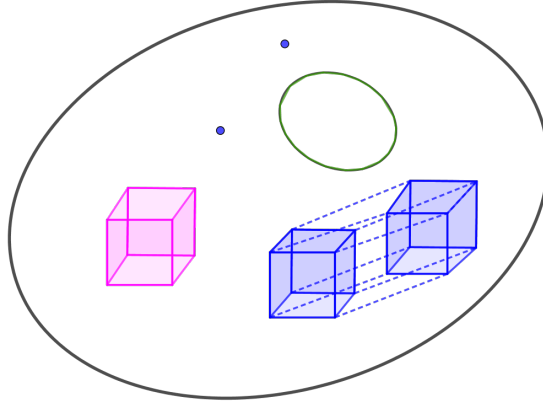


FIGURE 3 – Les bords des sous-variétés dans la Figure 1.

Cette notion de bord des sous-variétés se traduit en une opération sur les formes différentielles appelée différentielle extérieure.

Définition 18. (Différentielle extérieure / Théorème de Stokes) Pour une k -forme ω , on appelle différentielle extérieure la $(k + 1)$ -forme $d\omega$ tel que

$$\int_{\mathcal{V}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{V}} \omega$$

pour toute sous-variété $\mathcal{V}$ de dimension $k + 1$ et $\partial\mathcal{V}$ son bord.

Il s'agit ici en fait du théorème de Stokes généralisé et il faut voir celui ci comme constitue la motivation principale. Dans $\mathbb{R}^3$, la différentielle extérieure désigne le gradient, le rotationnel et la divergence en fonction si ω est une 0,1 ou 2 forme

$$0\text{-formes} \xrightarrow{\text{grad}} 1\text{-formes} \xrightarrow{\text{rot}} 2\text{-formes} \xrightarrow{\text{div}} 3\text{-formes}.$$

Le théorème de Stokes regroupe de fait le « principe fondamental de l'analyse »,

$$\int_a^b \text{grad}(f) d\ell = f(b) - f(a), \quad ,$$

le «théorème de Stokes» ou «Green-Riemann»

$$\iint_S \text{rot}(A) ds = \oint_{\partial S} A d\ell$$

et le «théorème de Gauss» ou «Green-Ostrogradski»

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(J) dv = \iint_{\partial\mathcal{V}} J ds.$$

La définition précédente de la différentielle extérieure est cependant assez abstraite et en pratique on utilisera plutôt la définition en coordonnées pour la calculer effectivement.

Définition 19. (Différentielle extérieure) Pour une 0-forme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on définit df comme la 1-forme

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) dx_i.$$

Pour une k forme $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_I$ dans $\mathbb{R}^n$, on considère chacun des coefficients $\omega_I(\mathbf{x})$ comme une 0-forme et on définit $d\omega$ comme la $(k+1)$ -forme

$$d\omega(\mathbf{x}) = \sum_I (d\omega_I(\mathbf{x})) \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_I.$$

Par convention $d\omega = 0$ si ω est une n -forme.

Nous ne donnons pas ici la démonstration pas que cette définition implique le théorème de Stokes car la preuve est un peu longue mais l'idée est de faire le calcul lorsque $\mathcal{V}$ est un rectangle puis de faire changement de variable pour le cas général.

Exemple 20. (Différentielle extérieure dans $\mathbb{R}^3$) Comme mentionner précédemment, pour f une 0-forme, df donne le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$

$$df(\mathbf{x}) = \partial_x f(\mathbf{x}) dx + \partial_y f(\mathbf{x}) dy + \partial_z f(\mathbf{x}) dz,$$

pour A une 1-forme, dA donne le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}(A)$

$$dA = \sum_{\text{cyc}} (\partial_x A_y(\mathbf{x}) - \partial_y A_x(\mathbf{x})) dx \wedge dy$$

et pour B une 2-forme, dB donne la divergence $\text{div}(B)$

$$dB = \left(\sum_{\text{cyc}} \partial_x B_{yz}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Remarque 21. Il est, à priori, interdit de considérer la divergence d'une 1-forme, le rotationnel d'une 2-forme ou le gradient d'une 3-forme.

On peut aussi considérer la différentielle extérieure dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 22. (Différentielle extérieure dans $\mathbb{R}^2$) Pour f une 0-forme sur $\mathbb{R}^2$, on a toujours le $\overrightarrow{\text{grad}}$ dans $\mathbb{R}^2$

$$df(\mathbf{x}) = \partial_x f(\mathbf{x}) dx + \partial_y f(\mathbf{x}) dy,$$

et pour A une 1-forme, on a une partie du rotationnel « $\overrightarrow{\text{rot}}(A) \cdot \vec{e}_z$ »

$$dA = (\partial_x A_y(\mathbf{x}) - \partial_y A_x(\mathbf{x})) dx \wedge dy$$

Mentionnons maintenant quelques propriétés de la dérivée extérieure.

Proposition 23. (*Propriété d'anti-dérivation*) Soient α, β une k -forme et ℓ -forme, on a

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

On peut retrouver diverses formules d'analyse vectorielle.

Exemple 24. (Identités vectorielles II) Dans $\mathbb{R}^3$, avec f, g des 0-formes, α, α' des 1-formes et β une 2-forme, on a les identités suivantes.

$d(fg) = d(f)g + fd(g)$	$\vec{\text{grad}}(fg) = \vec{\text{grad}}(f)g + f\vec{\text{grad}}(g)$
$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha$	$\text{rot}(f\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(f) \times \vec{A} + f\text{rot}(\vec{A})$
$d(f\beta) = df \wedge \beta + fd\beta$	$\text{div}(f\vec{B}) = \vec{\text{grad}}(f) \cdot \vec{B} + f\text{div}(\vec{B})$
$d(\alpha \wedge \alpha') = d\alpha \wedge \alpha' - \alpha \wedge d\alpha'$	$\text{div}(\vec{A} \times \vec{A}') = \text{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{A}' - \vec{A} \cdot \text{rot}(\vec{A}')$

Avec le théorème de Stokes on a également une intégration par partie sur les sous variétés.

Exemple 25. (Intégration Par Partie) Soient α, β une k -forme et ℓ -forme et $\mathcal{V}$ une sous-variété de dimension $k + \ell + 1$. On a alors

$$\int_{\mathcal{V}} d\alpha \wedge \beta = \int_{\partial\mathcal{V}} \alpha \wedge \beta + (-1)^{k+1} \int_{\mathcal{V}} \alpha \wedge d\beta$$

La propriété suivante est fondamentale, Elle est la traduction pour les formes différentielles de l'observation géométrique « Un bord n'a pas de bord. », $\partial(\partial\mathcal{V}) = \emptyset$ quelque soit $\mathcal{V}$.

Proposition 26. Si $\alpha = d\beta$ alors $d\alpha = 0$. Autrement dit

$$d \circ d = 0.$$

Démonstration. En développant la formule, on a directement

$$d(dw) = \sum_I \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 \omega_I(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_I(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = 0$$

□

Exemple 27. (Invariance de Jauge dans $\mathbb{R}^3$) On retrouve ici

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0$$

ainsi que les invariance de jauge

$$\text{rot}(\vec{A} + \vec{\text{grad}}f) = \text{rot}(\vec{A}) \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{B} + \text{rot}A) = \text{div}(\vec{B})$$

La réciproque à la proposition 26 est vrai mais seulement dans $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement dans un espace que l'on peut contracté en un point.

Proposition 28. (Lemme Poincaré) Dans $\mathbb{R}^n$, si $d\alpha = 0$ alors il existe β tel que $\alpha = d\beta$.

C'est la généralisation des affirmations usuelles

$$\operatorname{rot}(\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{\operatorname{grad}} f \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0, \Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Nous verrons dans l'Annexe des constructions explicites de ce β .

1.6 Changement de coordonnées

La quantité importante pour les formes différentielles, celle qui a un sens physique, est la valeur de l'intégrale sur une sous-variété. Il faut bien sûr que celle-ci reste la même que l'on fasse les calculs dans un système de coordonnées ou dans un autre. Il est possible de trouver le changement de coordonnées en travaillant directement à l'intérieur des intégrales. On a par exemple le changement de variables en dimension 1

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

ou la formule pour des intégrales multiples $\mathbf{x} = F(\mathbf{X})$

$$\int_V \rho(F(\mathbf{X})) \det J(\mathbf{X}) dX_1 \cdots dX_n = \int_{F(V)} \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Cependant nous présenterons ici la méthode plus systématique de calculs avec l'algèbre extérieure.

1.6.1 Changements de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$

Pour le changement de coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ à $(X_1, \dots, X_n)$ on considère les anciennes coordonnées comme des 0-formes exprimées en fonctions des nouvelles coordonnées $x_i = x_i(X_1, \dots, X_n) = x_i(\mathbf{X})$. Le terme dx_i est donnée par la dérivée extérieure

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) dX_j$$

et il apparaît la Jacobienne $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$J_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial X_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Proposition 29. (Changement de coordonnées) Une k -forme différentielle ω peut être écrite dans un repère ou dans l'autre

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{|J|=k} \Omega_J(\mathbf{X}) dX_{j_1} \wedge \cdots \wedge dX_{j_k}.$$

avec la relation

$$\Omega_J(\mathbf{X}) = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \det(J_{I,J})$$

où on utilise le déterminant de la restriction de la jacobienne $J(\mathbf{X})$ aux ensembles d'indices J et I (une sous matrice de taille $k \times k$).

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \left(\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\frac{\partial x_{i_1}}{\partial X_{j_1}} \right) dX_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^n \left(\frac{\partial x_{i_k}}{\partial X_{j_k}} \right) dX_{j_k} \right) \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \left(\sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial x_{i_1}}{\partial X_{j_1}} \right) \cdots \left(\frac{\partial x_{i_k}}{\partial X_{j_k}} \right) \right) dX_{j_1} \wedge \cdots \wedge dX_{j_k} \\ &= \sum_{|J|=k} \left(\sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \sum_{\substack{\sigma \text{ permutation} \\ \text{sur } J}} \epsilon(\sigma) \left(\frac{\partial x_{i_1}}{\partial X_{\sigma(j_1)}} \right) \cdots \left(\frac{\partial x_{i_k}}{\partial X_{\sigma(j_k)}} \right) \right) dX_{j_1} \wedge \cdots \wedge dX_{j_k} \\ &= \sum_{|J|=k} \Omega_J(\mathbf{X}) dX_{j_1} \wedge \cdots \wedge dX_{j_k}. \end{aligned}$$

avec $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_k\}$ des ensembles d'indices ordonnées. $\square$

Remarque 30. On dit parfois que les coefficients d'une k -forme est un k -tenseur covariant antisymétrique. « Covariant », parce qu'il apparaît la jacobienne $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ (on dirait « contravariant » s'il y avait $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$), k -tenseur puisque cette matrice apparaît k fois et antisymétrique parce qu'il y a le signe $(-1)^m$.

Remarque 31. Un 2-tenseur antisymétrique B est parfois écrit sous forme de matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{xy} & -B_{zx} \\ -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ B_{xy} & -B_{yz} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le produit intérieur est alors donné par le produit de la matrice sur le vecteur $i_V B = \vec{B} \times \vec{V} = B\vec{V}$ et le changement de coordonnée (covariant) s'écrit avec la Jacobienne $B(\mathbf{X}) = J^t(\mathbf{X})B(\mathbf{x})J(\mathbf{X})$.

Exemple 32. (Cauchy-Binet) On enchaîne plusieurs changement de coordonnées $x \rightarrow X$ puis $X \rightarrow \mathcal{X}$ et on note J et $\mathcal{J}$ les matrices jacobiniennes associées. On a alors

$$\mathcal{W}_K(\mathcal{X}) = \sum_{|J|=k} \Omega_J(\mathbf{x}) \det(\mathcal{J}_{J,K}) = \sum_{|J|=k} \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \det(J_{I,J}) \det(\mathcal{J}_{J,K}).$$

Puisque $(J\mathcal{J})$ est également la jacobienne pour le changement de coordonnées $x \rightarrow \mathcal{X}$ on obtient

$$\det((J\mathcal{J})_{I,K}) = \sum_{|J|=k} \det(J_{I,J}) \det(\mathcal{J}_{J,K}).$$

Il s'agit de la formule de Cauchy-Binet et celle ci peut être utilisée pour tout triplet de matrices A , B et $C = AB$.

1.6.2 Exemples de changements de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

Comme premier exemple, nous commençons par le changement de coordonnées le plus simple possible, à savoir un changement d'unité.

Exemple 33. (Changement d'unité) Soient $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui décrivent la position en mètre (m) et $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ donnant la même position en centimètre (cm). C'est à dire $\mathbf{X} = 100\mathbf{x}$.

Si A décrit un gradient de température selon la direction $\vec{e}_x$. C'est une 1-forme et on a

$$A = A_x dx = \frac{A_x}{100} dX = A_X dX$$

avec $A_X = \frac{A_x}{100}$. Autrement dit $1 K.m^{-1} = 0,01 K.cm^{-1}$.

Si B décrit un flux d'eau circulant dans un tuyau selon la direction $\vec{e}_x$. C'est une 2-forme et on a

$$B = B_{yz} dy \wedge dz = \frac{B_{yz}}{100^2} dY \wedge dZ = B_{YZ} dY \wedge dZ$$

avec $B_{YZ} = \frac{B_{yz}}{100^2}$. Autrement dit $1 kg.s^{-1}.m^{-2} = 10^{-4} kg.s^{-1}.cm^{-2}$.

Si C décrit une densité de matière. C'est une 3-forme et on a

$$C = C_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz = \frac{C_{xyz}}{100^3} dX \wedge dY \wedge dZ = C_{XYZ} dX \wedge dY \wedge dZ$$

avec $C_{XYZ} = \frac{C_{xyz}}{100^3}$. Autrement dit $1 kg.m^{-3} = 10^{-6} kg.cm^{-3}$.

En général dans $\mathbb{R}^3$, on pourra utiliser les formules suivantes.

Exemple 34. (Changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$) Pour une 1-forme $A = A_x(\mathbf{x})dx + A_y(\mathbf{x})dy + A_z(\mathbf{x})dz$ on a

$$A = \sum_{\text{cyc}} \left(A_x(\mathbf{x}) \frac{\partial x}{\partial X}(\mathbf{X}) + A_y(\mathbf{x}) \frac{\partial y}{\partial X}(\mathbf{X}) + A_z(\mathbf{x}) \frac{\partial z}{\partial X}(\mathbf{X}) \right) dX = \sum_{\text{cyc}} A_X(\mathbf{X}) dX$$

soit avec la Jacobienne $\vec{A}_X(\mathbf{X}) = J(\mathbf{X})^t \vec{A}_x(\mathbf{x})$,

$$\begin{pmatrix} A_X(\mathbf{X}) \\ A_Y(\mathbf{X}) \\ A_Z(\mathbf{X}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x(\mathbf{x}) \\ A_y(\mathbf{x}) \\ A_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

Pour une 2-forme B on a

$$B = \sum_{\text{cyc}} B_{xy}(\mathbf{x}) dx \wedge dy = \sum_{\text{cyc}} B_{XY}(\mathbf{X}) dX \wedge dY$$

où les coefficient sont donnés (en développant et après calculs) par les déterminants suivant

$$B_{YZ} = \begin{vmatrix} B_{yz} & B_{zx} & B_{xy} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix}, \quad B_{ZX} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} \\ B_{yz} & B_{zx} & B_{xy} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix}, \quad B_{XY} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ B_{yz} & B_{zx} & B_{xy} \end{vmatrix}.$$

que l'on peut aussi exprimer avec $\text{Com}(J(\mathbf{X}))$, la comatrice de $J(\mathbf{X})$

$$\begin{pmatrix} B_{YZ}(\mathbf{X}) \\ B_{ZX}(\mathbf{X}) \\ B_{XY}(\mathbf{X}) \end{pmatrix} = \text{Com}(J(\mathbf{X}))^t \begin{pmatrix} B_{yz}(\mathbf{x}) \\ B_{zx}(\mathbf{x}) \\ B_{xy}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

Pour une 3-forme C on a

$$C = C_{xyz}(\mathbf{x}) dx \wedge dy \wedge dz = C_{XYZ}(\mathbf{X}) dX \wedge dY \wedge dZ$$

soit avec la Jacobienne $C_{XYZ}(\mathbf{X}) = \det(J(\mathbf{X})) C_{xyz}(\mathbf{x})$,

$$C_{XYZ}(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} C_{xyz}(\mathbf{x})$$

Remarque 35. Le changement de variables pour des 2-formes devient beaucoup plus simple quand les deux systèmes de coordonnées (x, y, z) et (X, Y, Z) forment des repères orthonormés. Dans ce cas $J(\mathbf{X})$ est une matrice orthogonale et alors $J(\mathbf{X})^{-1} = J(\mathbf{X})^t$, $\det J(\mathbf{X}) = 1$ et

$$\text{Com}(J(\mathbf{X})) = (\det J(\mathbf{X})) (J(\mathbf{X})^{-1})^t = J(\mathbf{X}).$$

Dans ce cas, il n'y a plus vraiment de différence entre 1 formes ou 2-formes, sauf peut-être pour discuter des notions de «vecteurs» ou «pseudo-vecteurs».

Proposition 36. *Pour une transformation orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ les 1-formes, les 2-formes et les vecteurs tangents se transforment de la même manière*

$$\llbracket \vec{U}(\mathbf{X}) = J(\mathbf{X})^t \vec{U}(\mathbf{x}) \rrbracket.$$

De même pour les 0-formes et les 3-formes il n'y a pas de facteur supplémentaire car $\det J = 1$.

1.6.3 Coordonnées cylindriques et sphériques

Puisque ceux ci sont très présents en physique, nous détaillons les changement des variables pour les coordonnées cylindriques et sphériques.

Exemple 37. (Coordonnées cylindriques) Avec $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ on a la Jacobienne

$$J(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour une 1-forme A , on a alors

$$A = (A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) dr + (A_y \cos \theta - A_x \sin \theta) r d\theta + A_z dz,$$

pour une 2-forme B ,

$$B = (B_{yz} \cos \theta + B_{zx} \sin \theta) r dr \wedge d\theta \\ + (B_{yz} \cos \theta - B_{yx} \sin \theta) dz \wedge dr + B_{xy} r dr \wedge d\theta$$

et pour une 3-forme C ,

$$C = C_{xyz} r dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

Exemple 38. (Coordonnées sphérique) Avec $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, on a la Jacobienne

$$J(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Pour une 1-forme A , on a alors

$$A = (A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta) dr \\ + (A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta) r d\theta + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) r \sin \theta d\phi,$$

pour une 2-forme B ,

$$B = (B_{yz} \sin \theta \cos \phi + B_{zx} \sin \theta \sin \phi + B_{xy} \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ + (B_{yz} \cos \theta \cos \phi + B_{yx} \cos \theta \sin \phi - B_{zx} \sin \theta) r \sin \theta d\phi \wedge dr \\ + (-B_{yz} \sin \phi + B_{zx} \cos \phi) r dr \wedge d\theta$$

et pour une 3-forme C ,

$$C = C_{xyz} r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi.$$

1.7 Tiré en arrière et Dérivée de Lie

Une notion assez naturelle à considérer sur une sous-variété (surtout en physique) est un déplacement, un transport de celle-ci. On pourrait imaginer par exemple, une particule d'eau, un bout de ficelle, une feuille ou une bouteille transportés dans un cours d'eau. Cette notion se traduit pour les formes différentielles en l'opérateur tiré en arrière et pour un déplacement infinitésimal en la dérivée de Lie.

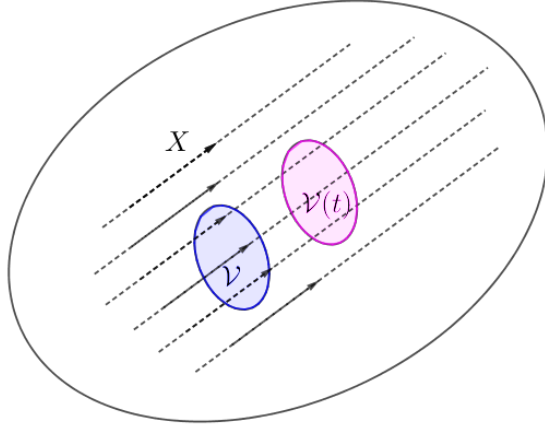


FIGURE 4 – La sous variété transporté $\mathcal{V}(t)$.

1.7.1 Tiré en arrière

Commençons par une définition informelle mais qui est également la motivation et la propriété fondamentale.

Définition 39. (Tiré en arrière) Soit ω une k -forme et $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ alors $\phi^*\omega$ est la k -forme qui vérifie

$$\int_{\mathcal{V}} \phi^*\omega = \int_{\phi(\mathcal{V})} \omega \quad (3)$$

pour tout sous variété $\mathcal{V}$ de dimension k .

Pour un calcul explicite on utilisera plutôt la définition suivante.

Définition 40. Pour une k -forme ω et $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la k -forme $\phi^*\omega$ est donnée par

$$\phi^* \left(\sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum_{|I|=k} \omega_I(\phi(\mathbf{x})) (\phi^* dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\phi^* dx_{i_k})$$

avec pour $\phi(\mathbf{x}) = (\phi(\mathbf{x})_1, \dots, \phi(\mathbf{x})_n)$

$$\phi^* dx_i = d(\phi(\mathbf{x})_i) = \sum_j \frac{\partial \phi(\mathbf{x})_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Le calcul de $\phi^* \omega(\mathbf{x})$ peut ainsi être obtenu en deux étapes :

1. Considérer la valeur de ω en $\phi(\mathbf{x})$ plutôt qu'en $\mathbf{x}$ (c'est à dire $\omega(\phi(\mathbf{x}))$).
2. Écrire $\phi^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$ et faire le changement de coordonnées en $\mathbf{X}$ de ω .

Autrement dit on note

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \phi^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi^{-1}(\mathbf{x})_1 \\ \vdots \\ \phi^{-1}(\mathbf{x})_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

et on écrit $\phi^* \omega$ dans les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et ω dans les coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$

$$\phi^* \omega = \sum_{|I|=k} \Phi_I(\mathbf{x}) dx_I, \quad \omega = \sum_{|I|=k} \Omega_I(\mathbf{X}) dX_I.$$

L'égalité (3) est exactement équivalente à l'égalité de leurs coordonnées.

Proposition 41. (*Tiré en arrière*) Soit ω une k -forme, alors $\phi^* \omega$ est la k -forme qui vérifie

$$\forall |I| = k, \quad \Phi_I(\mathbf{x}) = \Omega_I(\mathbf{X}).$$

Démonstration. Sans écrire toute la preuve en détails, on peut vérifier l'égalité sur les rectangle $\mathcal{V}_I = \{\mathbf{x} : x_i \in [a_i, b_i]\}$ en coordonnée $\mathbf{x}$ et alors $\phi(\mathcal{V}_I) = \{\mathbf{y} : \phi^{-1}(\mathbf{y}) \in \mathcal{V}_I\} = \{\mathbf{y} : X_i \in [a_i, b_i]\}$ un rectangle dans les coordonnées $\mathbf{X}$ $\square$

Exemple 42. (Une transformation affine dans $\mathbb{R}^3$) On suppose ici que ϕ est une transformation affine : il existe une matrice $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\phi(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Pour f une 0-forme, on a simplement

$$\phi^* f(\mathbf{x}) = f(M\mathbf{x} + \mathbf{b})$$

Pour A une 1-forme, on calcule la Jacobienne $\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = M_{ij}$ et on a

$$[\phi^* A](\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 M_{ij} A_i(M\mathbf{x} + \mathbf{b}) \right) dx_j.$$

Pour B une 2-forme, on a

$$[\phi^* B](\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq k < \ell \leq 3} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (M_{ki} M_{\ell j} - M_{kj} M_{\ell i}) B_{ij}(M\mathbf{x} + \mathbf{b}) \right) dx_k \wedge dx_\ell$$

Pour C une 3-forme, on a

$$[\phi^*C](\mathbf{x}) = C(M\mathbf{x} + b) \det(M) dx \wedge dy \wedge dz.$$

En particulier si ϕ est une translation ($M = I_3$) on a toujours

$$\phi^*\omega(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{b}).$$

Et si ϕ une dilatation $M = \lambda I_3$, $\mathbf{b} = 0$, pour ω est une k forme on a

$$\phi^*\omega(\mathbf{x}) = \lambda^k \omega(\lambda \mathbf{x}).$$

1.7.2 Dérivée de Lie

On considère maintenant un déplacement continu. La dérivée de Lie sera alors la dérivée de l'opérateur tiré en arrière le long du déplacement. Pour V un vecteur tangent, on note $\phi_t(\mathbf{x})$ la position d'une particule au temps t commençant en $\mathbf{x}$ et se déplaçant à une vitesse $V(\mathbf{x})$

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t), \quad \text{la solution de l'équation} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = V(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (4)$$

On a par exemple

$$\phi_t(\mathbf{x}) \approx \mathbf{x} + tV(\mathbf{x})$$

pour $t \ll 1$.

Définition 43. (Dérivée de Lie) Soit V un vecteur tangent et ω une k -forme, la dérivée de Lie est la k -forme définie par

$$L_V\omega = \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*\omega - \omega}{t}.$$

De même que la dérivée extérieure regroupe les opérateurs gradient, rotationnel et divergence, la dérivée de Lie regroupe des expressions apparaissant dans les équations en hydrodynamique telles que la dérivée convective, l'équation de Helmholtz, ou l'équation de continuité. Commençons par un exemple simple où la vitesse est constante.

Exemple 44. (Translation) Soit $(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (x_1 + V_1 t, \dots, x_n + V_n t)$ avec V constant et une k -forme $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) dx_I$ on a

$$\phi_t^*\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x} + t\mathbf{V}) dx_I, \quad \text{et} \quad L_V\omega = \sum_{|I|=k} \left(\sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) dx_I.$$

et on reconnaît l'opérateur opérateur advection « $\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}$ ».

Cependant le cas général est plus compliqué et il y a à priori deux parties dans la dérivée de Lie : une de déplacement et une de déformation. Pour cette dernière il faut calculer la Jacobienne pour $\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}) = 1_{i=j} + t \frac{\partial V_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}),$$

et sa dérivée que l'on utilisera dans la suite pour tous les calculs

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) |_{t=0} = \frac{\partial V_i}{\partial X_j} |_{t=0} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$

Exemple 45. (Dérivée de Lie dans $\mathbb{R}^3$) Pour f une 0-forme, on a

$$L_V f(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) = \sum_i V_i(\mathbf{x}) \partial_i f(\mathbf{x})$$

Pour A une 1-forme, on a

$$\begin{aligned} [L_V A](\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \left(1_{i=j} + t \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) A_i(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) \right) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) A_i(\mathbf{x}) \right) dx_j \end{aligned}$$

Pour B une 2-forme, on a

$$\begin{aligned} [L_V B](\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \sum_{1 \leq k < \ell \leq 3} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_\ell} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_\ell} \right) B_{ij}(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) \right) dx_k \wedge dx_\ell \\ &= \sum_{1 \leq k < \ell \leq 3} \left(\sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial B_{k\ell}}{\partial x_i} \right) dx_k \wedge dx_\ell \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < \ell \leq 3} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} B_{i\ell} + \frac{\partial V_j}{\partial x_\ell} B_{kj} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k} B_{\ell j} - \frac{\partial V_i}{\partial x_\ell} B_{ik} \right) \right) dx_k \wedge dx_\ell \end{aligned}$$

Pour C une 3-forme, on a

$$\begin{aligned} L_V C(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \left[C(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) \det \left(I_3 + t \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz \right] \\ &= \left(\sum_i V_i(\mathbf{x}) \frac{\partial C}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x}) \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i(\mathbf{x}) C(\mathbf{x})) \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule $\frac{d}{dt} \det(I_3 + tM) = \text{Tr}(M)$ en $t = 0$.

1.7.3 Formules avec le tiré en arrière et la dérivée de Lie

Les expressions en coordonnées pour le tiré en arrière ou la dérivée de Lie peuvent être un peu laborieuses mais il existe heureusement des relations algébriques pour faire certains calculs sans écrire tous les coefficients.

Proposition 46. (*Linéarité*) On a

$$\phi^*(\alpha + \beta) = \phi^*\alpha + \phi^*\beta \quad , \quad L_V(\alpha + \beta) = L_V\alpha + L_V\beta$$

$$L_{fV+W}\omega = fL_V\omega + df \wedge i_V\omega + L_W\omega$$

pour toute 0-forme f , k -formes α, β et vecteurs tangents V, W .

Exemple 47. (Décomposition déplacement/Déformation) En écrivant $V = V_1 e_1 + \dots + V_n e_n$ et les propriétés précédentes, on obtient

$$L_V\omega = \sum_{i=1}^n V_i L_{e_i}\omega + dV_i \wedge i_{e_i}\omega.$$

où on peut associer le premier terme à un déplacement (l'opérateur advection) et le deuxième à une déformation.

Nous ne détaillons pas les preuves des propriétés suivantes qui peuvent être trouvées dans les livres mentionnées dans l'introduction.

Proposition 48. (*Propriété de Dérivation*) Pour toutes formes α, β on a

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\phi^*\alpha) \wedge (\phi^*\beta), \quad \text{et} \quad L_V(\alpha \wedge \beta) = L_V\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_V\beta.$$

Proposition 49. (*Commutation avec la dérivée extérieure*)

$$\phi^* \circ d = d \circ \phi^* \quad \text{et} \quad L_V \circ d = d \circ L_V$$

Proposition 50. (*Formule de Cartan*)

$$L_V = d \circ i_V + i_V \circ d$$

Cette dernière formule est très pratique et on l'utilisera beaucoup.

Exemple 51. (Formule de Cartan dans $\mathbb{R}^3$)

ω	$L_V\omega$	« expression usuelle »
0-forme	$i_V df$	$\vec{V} \cdot \text{grad}(f)$
1-forme	$d(i_V A) + i_V(dA)$	$\text{grad}(\vec{V} \cdot \vec{A}) + \text{rot} \vec{A} \times \vec{V}$
2-forme	$d(i_V B) + i_V(dB)$	$\text{rot}(\vec{B} \times \vec{V}) + \text{div}(B)\vec{V}$
3-forme	$d(i_V C)$	$\text{div}(C\vec{V})$

Exemple 52. (Théorème de Reynolds) On considère une sous-variété $\mathcal{V}(t)$ transporté selon un champs de vecteur tangent V . On applique la «dérivée de Lie», la «formule de Cartan»

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \omega = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \phi_t \omega = \int_{\mathcal{V}(t)} L_V \omega = \int_{\mathcal{V}(t)} d(i_V \omega) + i_V(d\omega)$$

puis le «théorème de Stokes » pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \omega = \int_{\partial \mathcal{V}(t)} i_V \omega + \int_{\mathcal{V}(t)} i_V(d\omega).$$

Pour $\mathcal{V}(t) = \Gamma(t)$ une courbe d'extrémités $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ et A une 1-forme on a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} A = \vec{V}(\mathbf{b}).\vec{A}(\mathbf{b}) - \vec{V}(\mathbf{a}).\vec{A}(\mathbf{a}) + \int_{\Gamma(t)} \vec{V} \times \text{rot}(\vec{A}).d\vec{\ell}.$$

Pour $\mathcal{V}(t) = \mathcal{S}(t)$ une surface et B une 2-forme on a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}(t)} B = \int_{\partial \mathcal{S}(t)} (\vec{V} \times \vec{B}).d\vec{\ell} + \int_{\mathcal{S}(t)} \text{div}(\vec{B})\vec{V}.d\vec{S}.$$

Pour $\mathcal{V}(t) = \Omega(t)$ un volume et C une 3-forme, on a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} C = \int_{\partial \Omega(t)} C(\mathbf{x})\vec{V}(\mathbf{x}).d\vec{S}$$

et si de plus $C = C(t)$ évolue dans le temps, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} C(t) = \int_{\partial \Omega(t)} C(t, \mathbf{x})\vec{V}(\mathbf{x}).d\vec{S} + \int_{\Omega(t)} \partial_t C(t, \mathbf{x})dV.$$

1.7.4 Point de vue géométrique

Les opérations sur les formes différentielles ont une forte motivation et interprétation géométrique.

Définition 53. Soit V un champs de vecteur tangent, ϕ_t le transport associé et $\mathcal{V}$ une sous-variété de dimension k on définit

— Une variété transportée

$$\mathcal{V}(t) = \phi_t(\mathcal{V}) = \{x(t), x_0 \in \mathcal{V}\}$$

avec $x(t)$ la solution de (4)

— Une variété élargie

$$I_t(\mathcal{V}) = \cup_{s \in [0, t]} \mathcal{V}(s) = \{x(s), x_0 \in \mathcal{V}, s \in [0, t]\}$$

qui est de dimension $k + 1$.

Ces notions sont assez naturelles et visuelle. Si on reprend l'exemple, d'une particule d'eau, d'un bout de ficelle ou une feuille transportés dans un cours d'eau. La variété élargie serait la trajectoire de la particule, la surface dessinée par la ficelle au cours de son déplacement ou le volume dans l'eau que la feuille aurait traversé et que l'on obtiendrait si l'on filmait le mouvement et que l'on superposait les images une par une.

Il est possible d'avoir pour l'opération produit intérieur une approche géométrique similaire aux définitions 18 et 39.

Définition 54. (Produit intérieur élargie) Pour ω une k -forme, on définit $\mathcal{I}_t\omega$ la $(k-1)$ -forme telle que

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{I}_t\omega = \int_{I_t(\mathcal{V})} \omega$$

pour toute sous-variété $\mathcal{V}$ de dimension $k-1$.

On peut réinterpréter l'opération de produit intérieur.

Proposition 55. (*Produit intérieur*) On a

$$i_V\omega = \frac{d}{dt}\mathcal{I}_t\omega.$$

Exemple 56. Un flot de matière ρ transporté à une vitesse V donnée par $j = i_V\rho$: La matière passant à travers surface $\mathcal{S}$ en un temps t est contenue dans $I_t\mathcal{S}$.

Nous terminons avec une variante de la formule de Cartan.

Proposition 57. (*Formule de Cartan bis*) On a

$$\phi_t^*\omega - \omega = d \circ \mathcal{I}_t(\omega) + \mathcal{I}_t \circ d(\omega)$$

Nous donnons ici une approche visuelle des formules de la section précédente et plus précisément

- Figure 5 pour les définitions 18,39 et 54,
- Figure 6 pour la proposition 26,
- Figure 7 pour la proposition 49,
- Figure 8 pour la proposition 50,
- Figure 9 pour la proposition 28.

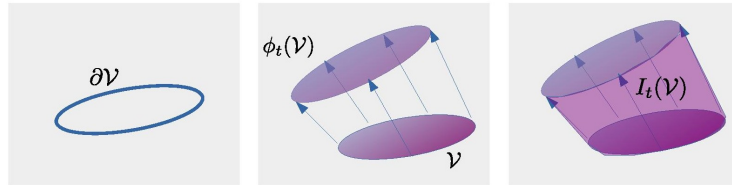


FIGURE 5 – Le bord de la variété, la variété transporté et la variété élargie.

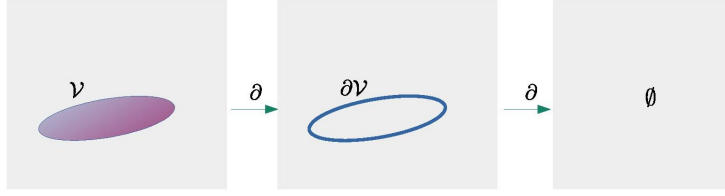


FIGURE 6 – Point de vue géométrique de la formule $d \circ d = 0$: Un bord n'a pas de bord.

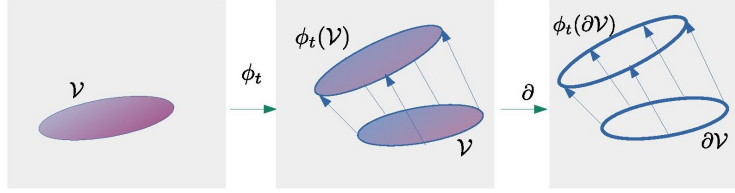


FIGURE 7 – Point de vue géométrique de la formule $\phi_t^* \circ d = d \circ \phi_t^*$ et $L_V \circ d = d \circ L_V$: Le bord de la sous variété transporté est aussi le transporté du bord de la sous variété.

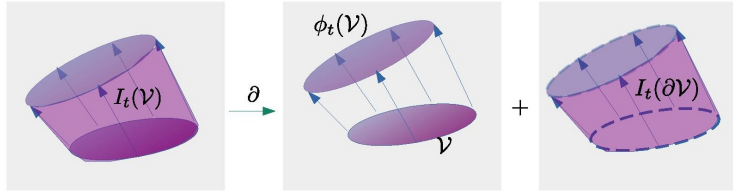


FIGURE 8 – Point de vue géométrique de la formule de Cartan : $\mathcal{I}_t \circ d(\omega) = \phi_t^* \omega - \omega - d \circ \mathcal{I}_t(\omega)$ et $i_V \circ d = L_V - d \circ i_V$: Le bord de la sous-variété élargie contient trois parties, V et $\phi_t(V)$ qui donnent les termes $\phi_t^* \omega - \omega$ et L_V et $I_t(\partial V)$ l'élargissement du bord ∂V qui donne les terme $d \circ \mathcal{I}_t(\omega)$ et $d \circ i_V$.

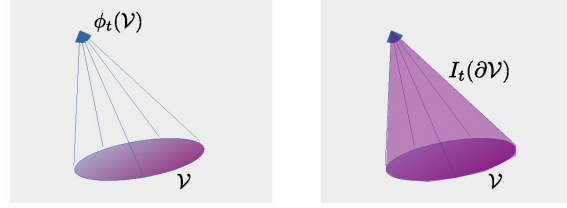


FIGURE 9 – Point de vue géométrique du Lemme de Poincaré : Il s’agit de la formule de Cartan dans le cas où $\phi_t(\mathcal{V}) = 0$. On a alors directement $-\alpha = d(\mathcal{I}_t(\alpha)) + \mathcal{I}_t(d\alpha)$. Si $d\alpha = 0$ on a $\alpha = d(-\mathcal{I}_t\alpha)$.

1.8 Les « isomorphismes » dans un espace euclidien

1.8.1 Des ensembles similaires

Dans ces notes nous avons souligné plus d’une fois que les espaces suivants sont de même dimension

$$\text{vecteurs tangents} \leftrightarrow 1\text{-formes} \leftrightarrow 2\text{-formes}$$

$$0\text{-formes} \leftrightarrow 3\text{-formes}$$

et plus généralement dans $\mathbb{R}^n$, on a les correspondances suivantes

$$\text{vecteurs tangents} \leftrightarrow 1\text{-formes} \leftrightarrow (n-1)\text{-formes}$$

$$k\text{-formes} \leftrightarrow (n-k)\text{-formes}$$

car ces derniers espaces ont la même dimension

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

De fait, il y a plusieurs de manières de passer d’un espace à l’autre et vis versa et ces transformations sont à la fois très courantes et naturelles. Une première manière est d’introduire des outils mathématiques supplémentaires que nous appellerons tenseurs (faute de mieux). On peut voir ceux-ci simplement comme des «matrices» décrivant des relations linéaires entre différents espaces. En générale ils dépendent du milieu et on pourra écrire

$$\beta(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}).$$

avec α, β des formes différentielles et T un tenseur. Ces tenseurs peuvent apparaître dans une grande variété de loi physique dont voici quelques exemples.

Pour des phénomènes de diffusions on a

Loi Physique	1-forme $\rightarrow$ 2-forme	tenseur
Loi de Fourier	$-\lambda \text{grad}(T) = j_C$	λ : conductivité thermique
Loi de Fick	$-\mathcal{D} \text{grad}(c) = j_p$	$\mathcal{D}$: coefficient de diffusion
Loi d’Ohm (locale)	$\sigma E = j_e$	σ : conductivité électrique

Remarque : On a plutôt l'habitude de considérer les coefficients $\lambda, \mathcal{D}, \sigma$ comme des scalaires mais ceci n'est vrai que dans un milieu isotrope car dans ce cas le tenseur est proportionnel à une matrice identité.

Pour les lois de la cinétique on a également

Loi Physique	1-forme $\rightarrow$ vecteur tangent	tenseur
2nd Loi de Newton	$F = m a$	la masse
Moment cinétique	$\mathcal{M} = \dot{\Omega} I$	Tenseur d'inertie

Une autre manière est l'utilisation des opérations considérées précédemment. Par exemple, pour ρ une 3-forme décrivant une densité de masse, on a

- (Produit extérieur) $f \rightarrow \rho f$ est une application 0-forme $\rightarrow$ 3-forme. On a par exemple pour l'énergie thermique $C_m \rho T = \mathcal{E}_T$.
- (Produit intérieur) $V \rightarrow i_V \rho$ est une application vecteur tangent $\rightarrow$ 2-forme. On a par exemple pour le flot de matière $j = \rho \vec{V}$.

Une troisième possibilité utilise la géométrie et nous la détaillons dans la section suivante.

1.8.2 Espace Euclidien

Rappelons qu'un espace euclidien est $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Celui-ci est tellement omniprésent que l'on oublie parfois qu'il existe et qu'il joue un rôle important dans beaucoup de notions et de calculs. Pour une généralisation, on parlera plutôt de formes bilinéaires symétriques ou de métrique.

Définition 58. (Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$) Pour V, W deux vecteurs tangents on définit

$$\langle W, V \rangle = \sum_{i=1}^n W_i V_i.$$

(Forme bilinéaire symétrique) Pour $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique on définit

$$g(V, W) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} V_i W_j$$

et on pourra également écrire $g(V, W) = \langle V, gW \rangle$.

Par exemple pour les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans $\mathbb{R}^3$ on a

$$g_{\text{cylindriques}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{\text{sphérique}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

On dira aussi que la matrice g est un 2-tenseur symétrique. Le produit scalaire nous donne un premier « isomorphisme » entre 1-forme et vecteurs tangents.

Définition 59. (Théorème de Rietz) Soit V un vecteur tangent, on peut définir la 1-forme α telle que pour tout vecteur tangent W

$$\langle V, W \rangle = \alpha(W)$$

Réciproquement pour tout 1-forme α il existe un unique vecteur tangent V tel que cette propriété soit vérifiée.

Cette construction généralise bien sûr aux formes bilinéaires avec

$$g(V, W) = \alpha(W).$$

La correspondance $V \leftrightarrow \alpha$ dépend alors g et on notera alors $\alpha = gV$ ou $V = g^{-1}\alpha$. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, avec le produit scalaire usuel on a simplement

$$\alpha = \sum_{\text{cyc}} \alpha_x dx, \quad V = \sum_{\text{cyc}} V_x e_x, \quad \alpha_x = V_x.$$

Avec des coordonnées sphériques par contre on obtient

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_r dr + \alpha_\theta d\theta + \alpha_\phi d\phi, \quad V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi e_\phi \\ \alpha_r &= V_r, \quad \alpha_\theta = r^2 V_\theta, \quad \alpha_\phi = r^2 \sin^2 \theta V_\phi \end{aligned}$$

Exemple 60. (Descente de gradient) On cherche à minimiser une fonction f (0-forme). Pour cela on considère son gradient df (1-forme) et on définit la trajectoire

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = -g^{-1} df(\mathbf{x}(t)).$$

L'idée étant de se déplacer « dans la direction » du gradient de f . Remarque qu'il est important ici d'avoir une forme bilinéaire (souvent simplement le produit scalaire usuel) pour construire le vecteur tangent $V = g^{-1} df$. Il faut donc bien préciser la métrique utilisée puisqu'il s'agit pour la descente de gradient de diminuer la valeur de f en la *distance la plus courte possible*. On a effectivement, si g est positive,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = -df(V) = -g(V, V) \leq 0.$$

et donc que $f(\mathbf{x}(t))$ est bien décroissant le long de la trajectoire.

Définition 61. (Volume Canonique dans $\mathbb{R}^n$) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées orthonormales, on note le volume canonique dans $\mathbb{R}^n$ la n -forme

$$\nu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Il s'agit bien sûr simplement de l'élément de volume usuel « dV ». Cependant il faut souligner que l'hypothèse *orthonormales* est important et qu'avec un autre choix de g , on obtiendrait une forme volume ν différente. Par exemple en coordonnée sphérique on a

$$\nu = r^2 \sin \theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\phi$$

Exemple 62. (Forme volume générale) Dans le cas général d'une forme bilinéaire g dans $\mathbb{R}^n$, il faut faire un changement de variable pour se ramener à un système orthonormales en choisissant $P\mathbf{x} = \mathbf{X}$ tel que $g = P^t P$. On a alors $\det(g) = \det^2(P)$ et la forme volume associée à g est donnée par

$$\nu_g = dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n = \sqrt{\det(g)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Le produit intérieur $V \rightarrow i_V \nu$ donne un autre « isomorphisme » entre vecteurs tangents et $(n-1)$ -formes. On a ainsi les équivalences suivantes

$$\begin{array}{ccc} 1\text{-forme} & \xleftrightarrow{\text{Riez}} & \text{vecteur tangent} \\ & & \xleftrightarrow{\text{forme volume}} (n-1)\text{-forme} \end{array}$$

et donc on a par exemple dans $\mathbb{R}^3$ l'équivalence canonique

$$A = \sum_{\text{cyc}} V_x dx \quad \leftrightarrow \quad V = \sum_{\text{cyc}} V_x e_x \quad \leftrightarrow \quad B = \sum_{\text{cyc}} V_x dy \wedge dz.$$

Remarquer que l'on obtient par conjugaison un « isomorphisme » entre 1-formes et 2-formes. Ce type d'isomorphisme se généralise entre les k -formes et les $(n-k)$ formes. On identifie simplement les coefficients par complémentarité.

Définition 63. (Opérateur de Hodge dans $\mathbb{R}^n$) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées *orthonormales* et ω une k forme différentielle. On définit $\star\omega$ comme la $(n-k)$ -forme

$$\star\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{x}) \star dx_I \quad \text{avec} \quad \star dx_I = (-1)^m dx_{I^c}$$

où I^c est le complémentaire de $I \subset \{1, \dots, n\}$ et m le nombre de transpositions nécessaire pour remettre les indices $I \cup I^c$ dans le bon ordre.

En pratique on pourra simplement utiliser les tableaux suivants.

Exemple 64. (Opérateur de Hodge dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

$\star$ dans $\mathbb{R}^2$		$\star$ dans $\mathbb{R}^3$			
ω	$\star\omega$	ω	$\star\omega$	ω	$\star\omega$
1	$dx \wedge dy$	1	$dx \wedge dy \wedge dz$	$dy \wedge dz$	dx
dx	dy	dx	$dy \wedge dz$	$dz \wedge dx$	dy
dy	$-dx$	dy	$dz \wedge dx$	$dx \wedge dy$	dz
$dx \wedge dy$	1	dz	$dx \wedge dy$	$dx \wedge dy \wedge dz$	1

Exemple 65. (Opérateur de Hodge en Coordonnées sphériques)

$\star$ pour les coordonnées sphériques			
ω	$\star\omega$	ω	$\star\omega$
1	$r^2 \sin \theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\phi$	$d\theta \wedge d\phi$	$(r^2 \sin \theta)^{-1} dr$
dr	$r^2 \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi$	$d\phi \wedge dr$	$(\sin \theta)^{-1} d\theta$
$d\theta$	$\sin \theta \, d\phi \wedge dr$	$dr \wedge d\theta$	$\sin \theta \, d\phi$
$d\phi$	$(\sin \theta)^{-1} dr \wedge d\theta$	$dx \wedge dy \wedge dz$	$(r^2 \sin \theta)^{-1}$

Exemple 66. (Milieu homogène isotrope) Si le milieu est homogène et isotrope, on pourra écrire pour la loi de Fourier, la loi de Fick ou la loi d'Ohm

$$j_C = -\star \lambda d(T), \quad j_p = -\star \mathcal{D}d(c), \quad j_e = -\star \sigma E$$

avec $\lambda, \mathcal{D}, \sigma \in \mathbb{R}$ les coefficients de diffusion, c la quantité de particule, T la température (0-formes), E le champs électrique (1-forme) et j_C, j_p, j_e les flots de chaleurs, particules et de charges (2-formes).

Nous mentionnons également une autre utilisation de l'opérateur de Hodge.

Exemple 67. Sur $\mathbb{R}^n$, pour ω une k -forme, on a

$$\omega \wedge (\star \omega) = \|\omega(\mathbf{x})\|^2 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{avec} \quad \|\omega(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{|I|=k} |\omega_I(\mathbf{x})|^2$$

Ainsi pour une 1-forme A sur $\mathbb{R}^n$ on a par exemple

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} A \wedge (\star A) = \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{A}|^2 dx \wedge dy \wedge dz.$$

1.8.3 Opérateur Laplacien

Nous terminons la section avec l'opérateur Laplacien.

Définition 68. (Laplacien et Codifférentielle) Dans $\mathbb{R}^n$, on appelle laplacien l'opérateur agissant $\Delta : k\text{-formes} \rightarrow k\text{-formes}$ définit par

$$\Delta = d \circ \partial + d \circ \partial.$$

où ∂ est l'opérateur codifférentielle $\partial : k\text{-formes} \rightarrow (k-1)\text{-formes}$, défini par

$$\partial = (-1)^m \star \circ d \circ \star$$

avec $m = \dots$

Exemple 69. (Laplacien dans $\mathbb{R}^3$) Pour une 0 forme f , $\partial f = 0$ et on l'expression $\Delta = \partial \circ d$ correspond à la formule usuelle $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$. On peut également calculer

$$\Delta f = \star d \left(\star \sum_{\text{cyc}} \partial_x f dx \right) = \star d \left(\sum_{\text{cyc}} \partial_x f dy \wedge dz \right) = \star \left(\sum_{\text{cyc}} \partial_{xx} f \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

et finalement

$$\Delta f = \sum_{\text{cyc}} \partial_{xx} f$$

Pour une 1 forme A , l'expression $\Delta = d \circ \partial + d \circ \partial$ correspond à la formule pour le laplacien vectoriel

$$\Delta = -\text{rot} \circ \text{rot} + \text{grad} \circ \text{div}.$$

mais il s'agit ici donc d'une définition. Après calculs, on obtient également

$$\Delta A = \sum_{\text{cyc}} ((\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) A_x dx).$$

L'expression pour les 2-formes et 3-formes sont similaires à celle pour les 1-formes et les 0-formes, respectivement.

2 Exemples pratiques d'applications des formes différentielles

Le but ces notes étant de souligner la nature des objets (formes, vecteurs tangents,...) on les indiquera parfois à côté des équations. On notera par exemple : « $3 = 2 \wedge 1$ » pour « une 3 forme comme produit extérieur d'une 2-forme et d'une 1-forme ».

2.1 Mécanique

En mécanique, la notion centrale est le travail qui s'exprime comme l'intégrale d'une force qui est donc une 1-forme ($J.m^{-1}$)

$$W = \int_a^b F.$$

Exemple 70. (Force conservative) Une force F est dite conservative si pour tout chemin fermé γ

$$\oint_{\gamma} F = 0.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, ceci est équivalent à $\vec{\text{rot}} F = 0$ et plus généralement dans $\mathbb{R}^n$ à $dF = 0$, c'est à dire $\partial_i F_j(\mathbf{x}) - \partial_j F_i(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Dans ce cas il existe un potentiel P qui est une 0 forme (J) tel que : $F = dP$. Noter que ce critère reste valide même si F décrit la force sur plusieurs particules ou sur un système avec un grand nombre de degrés de liberté.

Exemple 71. (La Poulie) On note x, X les positions des extrémités des cordes à gauche et à droite d'une poulie. On a $x - x_0 = -M(X - X_0)$, avec M le facteur multiplicatif et x_0, X_0 les longueurs initiales. On tire sur la corde de gauche. Ceci transmet une force et une vitesse sur la corde de droite

$$F = F_x dx = -F_x M dX, \quad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -M \frac{dX(t)}{dt} = -M v_X(t).$$

On a donc pour la force (1-forme) $F_X = -F_x M$ et pour la vitesse (vecteur tangent) $v_X = -\frac{1}{M} v_x$. La puissance $i_v F$ et le travail par contre restent les mêmes que l'on considère la corde de gauche ou de droite

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{X_1}^{X_2} F_X dX.$$

Le raisonnement serait similaire pour $x, X \in \mathbb{R}^n$ avec $x = M(X)$ décrivant des systèmes plus compliqués.

Exemple 72. (Moment d'une force) Dans le plan, on écrit en coordonnées polaires ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) une force

$$\begin{aligned} F &= F_x dx + F_y dy \\ &= (F_x + F_y) dr + r(-F_x \sin \theta + F_y \cos \theta) d\theta \\ &= (F_x + F_y) dr + (xF_y - yF_x) d\theta \end{aligned}$$

Le moment angulaire d'une force $M = \vec{r} \times \vec{F}$ est donc égale au coefficient de $d\theta$ en coordonnées polaires. Sur un mouvement de rotation, le travail est donné par

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

Remarque 73. On peut également écrire

$$d\theta = \frac{1}{x^2 + y^2} (-ydx + xdy).$$

qui présente une singularité en 0. Contrairement à sa notation, $d\theta$ n'est pas une forme exacte car θ n'est pas une fonction réelle mais n'est définie qu'à $2k\pi$ près. De fait pour un cercle $\mathcal{C}$ entourant 0, on a

$$\oint_{\mathcal{C}} d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Exemple 74. (Force de Friction dans l'espace des phases) On considère une force $F = -kpdx$, avec p l'impulsion et k un coefficient de friction. On a alors $dF = kdx \wedge dp$ et donc pour tout γ chemin fermé dans l'espace des phases

$$W = \oint_{\gamma} F = k \iint_S dx \wedge dp$$

C'est à dire l'énergie dissipée est égale kS la surface entourée par la trajectoire.

Exemple 75. (Conservation / Fonctions implicites) Considérons un objet se déplaçant à une vitesse $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = V$ (un vecteur tangent). Une quantité $F(t) = f(\mathbf{x}(t))$ est conservée au cours du mouvement si et seulement si

$$\frac{d}{dt}f = L_V f = i_V df = \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Similairement, on peut définir la trajectoire de manière implicite en imposant que certaines quantités soit conservées $f_1(\mathbf{x}(t)) = F_1, \dots, f_m(\mathbf{x}(t)) = F_m$ et alors le vecteur vitesse V doit satisfaire

$$i_V df_1 = \dots = i_V df_m = 0$$

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ avec une seule quantité conservée et $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, on obtient

$$\frac{dx}{dt} \partial_x f + \frac{dy}{dt} \partial_y f = 0, \quad \text{et alors} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}.$$

(Méthode de séparation des variables) Inversement résoudre une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

est équivalent à trouver une trajectoire γ décrivant $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$-\frac{dx}{dt}g(x) + \frac{dy}{dt}h(y) = i_{\frac{dx}{dt}}(-g(x)dx + h(y)dy) = 0$$

et donc

$$\int_{\gamma} h(y)dy = \int_{\gamma} g(x)dx.$$

2.2 Thermodynamique

2.2.1 Système thermodynamique macroscopique

L'espace sous-jacent pour la description de systèmes thermodynamiques macroscopiques n'est pas forcément écrit explicitement. Les quantités $U, V, P, T, S, \dots$ appelées fonctions d'états sont des 0-formes qui peuvent être vues comme des fonctions $U(a), V(a), \dots$ avec $a \in \Omega$ des coordonnées dans un espace plus ou moins abstrait. Les quantités $dU, dV, \dots$ sont des 1-formes sur ce même espace, et on a

$$U(b) - U(a) = \int_a^b dU.$$

Exemple 76. (Diverses Équations Thermodynamiques) Nous mentionnons quelles équations entre 1-formes. On a (« $1 = 0 \wedge 1$ »)

$$dU = TdS - PdV \quad (\text{Premier Principe}).$$

et si les coordonnées étaient écrites explicitement $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, on aurait

$$\overrightarrow{\text{grad}} U(a) = T(a)\overrightarrow{\text{grad}} S(a) - P(a)\overrightarrow{\text{grad}} V(a).$$

On a également

$$dH = TdS + VdP \quad (\text{Enthalpie})$$

$$\frac{1}{V}dV = -\chi_T dP + \alpha dT \quad (\text{Coefficients thermoélastiques})$$

$$dU = mc_V dT + (\ell - P)dV \quad (\text{Coefficients calorimétriques})$$

Implicitement, on suppose ici que l'espace sous-jacent n'a que deux degrés de liberté. L'espace des 1-formes est alors de dimension 2. Les équations précédentes sont les expressions des 1-formes dU, dH et dV avec les choix de bases (dS, dV) , (dS, dP) , (dP, dT) et (dT, dV) .

Pour qu'une 1-forme α soit la dérivée d'une fonction d'état, il faut et il suffit que pour tout chemin fermé γ

$$\oint_{\gamma} \alpha = 0.$$

Ce n'est pas le cas pour le travail ou la chaleur.

Exemple 77. (Diagramme thermodynamique) Supposons que l'état d'une machine thermique puisse être décrite par deux paramètres (x, y) . Si elle est composée d'un piston et que celui ci est mis en mouvement, le travail fourni est donné par une 1-forme PdV , avec V le volume du piston et P est la pression à l'intérieur. Ainsi sur un cycle, le travail total est égal à («Stokes»)

$$W = \oint PdV = \iint_S d(PdV) = \iint_S dP \wedge dV.$$

Si les coordonnées du diagramme sont $x = V$ et $y = P$, il s'agit de la surface de $\mathcal{S}$ (Diagramme de Clapeyron). Pour des coordonnées plus générales on a

$$W = \iint_S \left(\frac{dP(x, y)}{dx} \frac{dV(x, y)}{dy} - \frac{dP(x, y)}{dy} \frac{dV(x, y)}{dx} \right) dx \wedge dy.$$

De même, la chaleur échangée est égale à («Stokes»)

$$Q = \oint TdS = \iint_S d(TdS) = \iint_S dT \wedge dS$$

qui correspond à la surface de $\mathcal{S}$ si $x = S$ et $y = T$ (Diagramme Entropique) et plus généralement on a

$$Q = \iint_S \left(\frac{dT(x, y)}{dx} \frac{dS(x, y)}{dy} - \frac{dT(x, y)}{dy} \frac{dS(x, y)}{dx} \right) dx \wedge dy.$$

2.2.2 Diffusion de la chaleur

Pour la description des systèmes thermodynamique microscopique dans $\mathbb{R}^3$, on utilise les formes différentielles suivantes.

0-forme	Température	T	K
1-forme	Gradient de température	∇T	$K.m^{-1}$
2-forme	Flux de chaleur	j	$J.s^{-1}.m^{-2}$
3-forme	Énergie thermique	$\mathcal{E}_T$	$J.m^{-3}$

Exemple 78. (Diffusion thermique) Nous détaillons les différents termes jouant un rôle dans la diffusion thermique.

1. (Conduction) La température est T une 0-forme, son gradient une 1-forme et le terme de conduction thermique $j_{\text{cond}} = -\sigma(dT)$ est une 2-forme.
2. (Convection) La densité massique ρ et l'énergie thermique $\mathcal{E}_T = C_m \rho T$ sont des 3-formes. La vitesse du fluide V est un vecteur tangent et le terme associé au transport de l'énergie thermique $L_V \mathcal{E}_T = d(i_V \mathcal{E}_T) = d(j_{\text{conv}})$ est une 2-forme.
3. (Rayonnement) Le rayonnement thermique j_{ray} est une 2-forme.

Finalement la diffusion thermique total est la 2-forme donnée par

$$j_{\text{total}} = i_V \mathcal{E}_T - \sigma dT + j_{\text{ray}}.$$

Exemple 79. (Flot de chaleur dans un cylindre) Par symétrie, le flot de chaleur dans un cylindre infini s'écrit

$$j = j(r)d\theta \wedge dz.$$

Ici on a $d(j) = 0$ si et seulement si $j(r) = j_0 = \text{constante}$. On écrit la loi de Fourier (en milieu homogène isotrope)

$$j = \sigma(\star dT) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial r} T(r) \right) r d\theta \wedge dz.$$

On a alors

$$\sigma r \frac{\partial}{\partial r} T(r) = j_0 \quad \text{et donc} \quad T(r) - T(r_0) = \frac{j_0}{\sigma} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right).$$

Exemple 80. (Équation de la chaleur) On écrit la densité d'énergie thermique et l'équation de continuité pour le flot de chaleur (« $3 = 3 \wedge 0$ » et « $3 = d(2)$ »)

$$\mathcal{E}_T = C_m \rho T, \quad \partial_t \mathcal{E}_T = d(j)$$

Dans un milieu homogène isotrope, on obtient avec l'équation pour la diffusion thermique

$$\partial_t T = \frac{\sigma}{C_m \rho} \star d \star dT = \frac{\sigma}{C_m \rho} \Delta T$$

Exemple 81. (Rayonnement sur la terre) Le flux de rayonnement solaire arrive sur la terre selon la direction $\vec{e}_x$ est une 2-forme $R = R_{yz} dy \wedge dz$. En coordonnées sphériques, si on néglige les termes en dr qui ne jouent pas de rôle sur la surface de la sphère, on a alors

$$dy = r \sin \theta \cos \phi d\phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta, \quad dz = -r \sin \theta d\theta$$

et donc

$$R = R_{yz} r^2 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta \wedge d\phi.$$

que l'on peut comparer à $r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ l'élément de surface usuelle sur la sphère.

2.3 Électromagnétisme dans $\mathbb{R}^3$

Les quantités physiques pour décrire le champs électromagnétisme sont les suivantes

0-forme	Potentiel électrique	V	V
1-forme	Potentiel vecteur	A	$V.s.m^{-1}$
	Champs électrique	E	$V.m^{-1}$
	Champs magnétique	H	$C.s^{-1}.m^{-1}$
2-forme	Induction électrique	D	$C.m^{-2}$
	Induction magnétique	B	$V.s.m^{-2}$
	densité de courant	j	$C.s^{-1}.m^{-2}$
3-forme	densité de charge	ρ	$C.m^{-3}$

Ici nous faisons le choix de faire la distinction entre le champs électrique E (1-forme) et l'induction électrique D (2-forme) ainsi qu'entre le champs magnétique H (1-forme) et l'induction magnétique B (2-forme). Dans le vide et on a l'habitude d'écrire $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, ce qui implique d'identifier les coefficients

$$D_{yz} = \epsilon_0 E_x \quad \text{et} \quad B_{yz} = \mu_0 H_x.$$

Cette distinction est motivée par les rôles différents que ces derniers jouent dans les équations de Maxwell. Celle ci permet aussi de souligner que ces équations dépendent du milieu dans lequel le champs électromagnétisme se propage (on peut avoir des tenseurs ϵ, μ plus compliqués) et sinon de la géométrie (la métrique g).

2.3.1 Champs électriques et magnétiques usuels

Nous écrivons ici les champs électriques et magnétiques dans les cas les plus simples et qu'on trouve dans les livres de physique de premières années.

Exemple 82. (Charge Ponctuelle) Pour une charge q placée à l'origine, le potentiel et le champs électrique sont donnés en coordonnées sphériques par

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad \text{et} \quad D(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \sin\theta d\theta \wedge d\phi$$

Exemple 83. (Dipôle électrique) Pour un dipôle $\vec{d} = d\mathbf{e}_z$ placée à l'origine, le potentiel et le champs électrique sont donnés par

$$V(\mathbf{r}) = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right), \quad E(\mathbf{r}) = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\cos\theta}{r^3} dr + \frac{\sin\theta}{r^2} d\theta \right]$$

et

$$D(\mathbf{r}) = \frac{d}{4\pi r} \left[\frac{\sin 2\theta}{r} d\theta \wedge d\phi + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} d\phi \wedge dr \right].$$

Remarquer que l'on a $V_{\text{Dipole}} = L_{\vec{d}} V_{\text{charge}}$ et $E_{\text{Dipole}} = L_{\vec{d}} E_{\text{charge}}$.

Les formules sont similaires pour H et B pour un dipôle magnétique.

Exemple 84. (Fils électrique infini) Pour un fils électrique verticale, infini, parcouru d'un courant électrique I , le champs magnétique, l'induction magnétique et le potentiel vecteurs sont donnés par

$$H = \frac{I}{2\pi} d\theta, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \wedge dz, \quad A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log r \, dz,$$

Exemple 85. (Loi de Biot et Savart) On considère une charge placée à l'origine et se déplaçant dans la direction $\vec{e}_z$ à une vitesse v_z . Le champs magnétique (au temps $t = 0$) est donné par

$$A = \frac{\mu_0 q v_z}{4\pi r} dz, \quad B = \frac{\mu_0 q v_z}{4\pi r^2} dr \wedge dz, \quad H = \frac{q v_z}{4\pi r^3} (y dx - x dy).$$

Mentionnons également la force de Lorentz

Exemple 86. (force de Lorentz) Une particule de charge q se déplaçant à une vitesse V dans un champs électromagnétique subit une force (« $i_V(2) = 1$ »)

$$F = q(E + i_V B).$$

2.3.2 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont peut-être l'exemple le plus remarquable pour l'utilisation des formes différentielles.

Exemple 87. (Maxwell) On écrit les équations de Maxwell-Thomson Maxwell-Gauss

$$dB = 0, \quad dD = \rho \quad (\ll d(2) = 3 \gg)$$

et les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère

$$dE = -\partial_t B, \quad dH = \partial_t D + J \quad (\ll d(1) = 2 \gg).$$

(Formulation intégrale) On a pour tout volume $\mathcal{V}$

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} B = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\partial\mathcal{V}} D = \iiint_{\mathcal{V}} \rho$$

et toute surface $\mathcal{S}$

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} E = -\partial_t \iint_{\mathcal{S}} B \quad \text{et} \quad \oint_{\partial\mathcal{V}} H = \partial_t \iint_{\mathcal{S}} D + \iint_{\mathcal{S}} J$$

Exercice 88. Vérifier que les champs électriques et magnétiques proposés dans la sections précédente vérifient bien les équations de Maxwell.

Exemple 89. (Potentiel, Potentiel vecteur et Invariance de Jauge) Puisque $dB = 0$, il existe une 1-forme A tel que

$$B = dA.$$

Puisque $d(E + \partial_t A) = dE + \partial_t B = 0$, il existe une 0-forme V tel que

$$E + \partial_t A = dV.$$

De plus, pour tout 0-forme f et constante $c \in \mathbb{R}$, on a $d(A + df) = dA$ et $d(V + c) = dV$.

Exemple 90. (Gravitation selon Newton) On note V le potentiel gravitationnel (0-forme), F le champs de gravitation (1-forme), ρ_m la densité de masse (3-forme) et on introduit la 2-forme $g = \star 4\pi G F$ avec G la constante de gravitation. La loi de gravitation est alors donnée par

$$d(V) = F \quad \text{et} \quad d(g) = -\rho_m$$

qui se réécrit pour toute boucle γ et tout volume $\mathcal{V}$

$$\oint_{\gamma} F = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\partial \mathcal{V}} g = - \iiint_{\mathcal{V}} \rho_m.$$

Pour une masse ponctuelle M placé en 0, le champs de gravitation est donné par

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}, \quad F(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} dr \quad \text{et} \quad g(\mathbf{r}) = -GM \sin \theta d\theta \wedge d\phi$$

2.3.3 Énergie en électromagnétisme

Nous mentionnons les différentes formes sous lesquelles l'énergie apparaît en électromagnétisme. Celle ci étant une quantité extensive, il s'agira toujours de 3-formes. On a ainsi l'énergie potentielle d'une densité de charge (« $3 = 0 \wedge 3$ »)

$$\mathcal{E}_p = V \wedge \rho = V(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dx \wedge dy \wedge dz,$$

le travail du champs électrique sur un courant (« $3 = 1 \wedge 2$ »)

$$\mathcal{W}_e = E \wedge J = \left(\sum_{\text{cyc}} E_x(\mathbf{x}) J_{yz}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

l'énergie du champs électrique (« $3 = 1 \wedge 2$ »)

$$\mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} E \wedge D = \frac{1}{2} \left(\sum_{\text{cyc}} E_x(\mathbf{x}) D_{yz}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

l'énergie du champs magnétique (« $3 = 1 \wedge 2$ ») :

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} H \wedge B = \frac{1}{2} \left(\sum_{\text{cyc}} H_x(\mathbf{x}) B_{yz}(\mathbf{x}) \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Exemple 91. (Un condensateur) Deux plaques de surface S sont placées en $\pm z_0$ et sont chargées électriquement avec une densité surfacique $\pm\sigma$. Dans $[-z_0, z_0]$ le champ électrique est donné par

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\epsilon} z, \quad E(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\epsilon} dz, \quad D(\mathbf{x}) = \sigma dx \wedge dy,$$

La densité d'énergie est donnée par

$$\mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} E(\mathbf{x}) \wedge D(\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} dx \wedge dy \wedge dz.$$

On obtient alors l'énergie totale

$$\iiint_{S \times [-z_0, z_0]} \mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{z_0 S \sigma^2}{\epsilon} = \frac{S \epsilon}{4 z_0} U^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

où $U = V(z_0) - V(-z_0) = \frac{2\sigma z_0}{\epsilon}$ et $C = \frac{S \epsilon}{2 z_0}$ est la capacité électrique.

Exemple 92. (Théorème de Poynting) Le vecteur de Poynting est la deux forme suivante (« $2 = 1 \wedge 1$ »)

$$\mathcal{P} = E \wedge H = \sum_{\text{cyc}} (E_x(\mathbf{x}) H_y(\mathbf{x}) - E_y(\mathbf{x}) H_x(\mathbf{x})) dx \wedge dy$$

Il est associée au flot de l'énergie électromagnétisme et apparaît dans une équation de continuité. En effet, on a

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= dE \wedge H - E \wedge dH \\ &= -\partial_t B \wedge H - E \wedge (\partial_t D + J) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_t (B \wedge H) - \frac{1}{2} \partial_t (E \wedge D) - E \wedge J \end{aligned}$$

et finalement

$$\partial_t (\mathcal{E}_{\text{elec}} + \mathcal{E}_{\text{magn}}) + d\mathcal{P} = -E \wedge J$$

2.4 Hydrodynamique

Les quantités physiques apparaissant en hydrodynamique sont par exemple les suivantes.

0-forme	Pression	P	Pa
1-forme	Circulation de vitesse	v	$m.s^{-1}$
2-forme	Vorticité	ω	s^{-1}
	Flot de matière	j	$kg.s^{-1}.m^{-2}$
3-forme	Densité de matière	ρ	$kg.m^{-3}$
	Densité d'énergie	ρ_E	$J.m^{-3}$

Attention : la vitesse du fluide V n'est pas une 1-forme mais un vecteur tangent. Aussi on utilisera à la place la 1-forme canoniquement associée que l'on notera v et que l'on appellera «circulation de vitesse», la même appellation pour son intégrale sur un lacet γ

$$C = \int_{\gamma} \nu.$$

Exemple 93. (Équilibre de pression) On note $\Phi = \frac{P}{\rho}$ l'énergie de pression par masse. Le fluide est à l'équilibre lorsque la pression et la gravité se compense (« $d(0) = 1$ »)

$$d(\Phi) + g dz = d(\Phi + gz) = 0.$$

Exemple 94. (Poussé d'Archimède) L'énergie potentiel d'un fluide est donné par $E_p = gz\rho$ avec z la coordonnée verticale, g la gravitation et ρ la densité de matière du fluide. À l'équilibre hydrostatique celle ci correspond à la pression $P = gz\rho + P_0$. La force verticale sur un volume $\mathcal{V}$ est donnée par la variation de l'énergie potentiel lors d'un déplacement selon le vecteur e_z

$$F_z = \iiint_{\mathcal{V}} L_{e_z}(gz\rho) = g \iiint_{\mathcal{V}} \rho.$$

Avec la formule de Cartan on a également

$$F_z = \iiint_{\mathcal{V}} di_{e_z}(gz\rho) = \iint_{\partial\mathcal{V}} i_{e_z}P.$$

On obtient ainsi les deux expressions pour la poussé d'Archimède : « Le poids du volume de fluide déplacé » ou alors « l'intégrale de la force de pression dans la direction vertical sur la surface du volume ».

Exemple 95. (Conservation le long d'un tube de champs) Soit j un courant de matière, c'est à dire une 2-forme de divergence nulle $dj = 0$ et soit V un champs de vecteur tangent le long des lignes de champs $i_V j = 0$. On a alors

$$L_V j = (i_V \circ d + d \circ i_V)j = 0.$$

Exemple 96. (Équation de Continuité, « $\partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = 0$ ») La quantité de fluide ρ (une 3-forme) est transportée selon un champs de vitesse V , le flot est alors la 2-forme

$$i_V \rho = \sum_{\text{cyc}} \rho(\mathbf{x}) V_x(\mathbf{x}) dy \wedge dz$$

Le flot sortant à la surface d'un volume $\mathcal{V}$ (fixé) est une perte pour la quantité totale de fluide à l'intérieur du volume

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(t) = - \int_{\partial\mathcal{V}} i_V \rho(t) = - \int_{\partial\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) \vec{V}(\mathbf{x}, t) \cdot d\vec{S}.$$

Cela correspond à l'équation suivante qui pouvait aussi être obtenue avec la dérivée de Lie

$$\partial_t \rho + d(i_V \rho) = \partial_t \rho + L_V \rho = 0.$$

Exemple 97. (Équation d'Euler) On note v la circulation (1-forme) associée au champs de vitesse V (vecteur tangent, « $\vec{V} = \vec{v}$ ») et on énonce l'équation d'Euler

$$\partial_t v + (V.\text{grad}) v = -d\Phi - g dz.$$

Il est possible d'utiliser la dérivée de Lie

$$L_V v = (V.\text{grad}) v + \sum_{\text{cyc}} v_x \text{grad}(V_x) = (V.\text{grad}) v + \frac{1}{2} \text{grad}(|v|^2)$$

pour réécrire l'équation d'Euler sous la forme (« $1 = d(0)$ »)

$$\partial_t v + L_V v = d\left(\frac{1}{2}|v|^2 - \Phi - gz\right).$$

En utilisant $L_V v = d(|v|^2) + i_V v$ on a également

$$\partial_t v + i_V dv = -d\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \Phi + gz\right)$$

donnant l'expression « $\partial_t \vec{v} + \text{rot}(\vec{v}) \times \vec{v} = -\text{grad}(\dots)$ ».

Exemple 98. (Théorème de Bernoulli) Dans le cas d'un flot stationnaire $\partial_t v = 0$ et puisque $i_V \circ i_V = 0$, l'équation d'Euler implique alors

$$i_V d\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \Phi + gz\right) = L_V \left(\frac{1}{2}|v|^2 + \Phi + gz\right) = 0.$$

L'énergie par particule est constante le long des lignes de champs.

Exemple 99. (Conservation de la circulation) Soit $\gamma(t)$ une boucle transportée selon le champs de vitesse v . Alors

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} v(t) = \oint_{\gamma(t)} \partial_t v(t) + \oint_{\gamma(t)} L_{V(t)} v(t) = \oint_{\gamma(t)} d\left(\frac{1}{2}v^2 - \Phi - gz\right) = 0$$

La circulation sur la boucle est donc conservée. On a alors

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} d(v(t)) = 0$$

et la vortécité $\omega(t) = d(v(t))$ est donc aussi conservée. À partir de l'équation d'Euler et de $d \circ L_V = L_V \circ d$ on aurait aussi pu directement écrire

$$\partial_t \omega(t) + L_V \omega(t) = d(v(t) + L_V v(t)) = 0.$$

Finalement avec la formule de Cartan on a

$$\partial_t \omega(t) + d[i_V \omega(t)] = 0$$

qui est l'expression « $\partial_t \omega + \text{rot}(\omega \times v) = 0$ ».

Exemple 100. (Flots d'énergie et de quantité de mouvement) L'énergie étant conservée, elle suit une équation de continuité

$$(\partial_t + L_V) \left[\frac{1}{2} \rho |v|^2 + p + \rho g z \right] = 0.$$

Pour la quantité de mouvement, on a également

$$(\partial_t + L_V) [\rho v_x] = \partial_t(\rho v_x) + d[i_V(\rho v_x)] = -i_{e_x} dp,$$

et la même chose pour y et z en ajoutant le terme en ρg dans ce dernier cas. On peut écrire ces 2-formes comme les lignes d'un tableau

$$\begin{bmatrix} i_V(\rho v_x) \\ i_V(\rho v_y) \\ i_V(\rho v_z) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{bmatrix} = \rho v \otimes v$$

appelé tenseur d'impulsion (dans lequel on ajoute habituellement la pression aux termes diagonaux).

Exemple 101. (Flot irrotationnel et flot incompressible) Le flot est dit irrotationnel si $dv = 0$. Dans ce cas il existe une 0-forme ϕ tel que $v = d\phi$ et l'équation d'Euler devient

$$d \left(\partial_t \phi + \frac{1}{2} |v|^2 + \Phi + g z \right) = 0.$$

Le terme du milieu est donc constant et il est possible de le fixer égale à 0. On a alors

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |v|^2 + \Phi + g z = 0.$$

Le flot est dit incompressible si $d(i_V \rho) = 0$. Dans ce cas il existe une 1-forme A telle que

$$j = i_V \rho = dA.$$

Si la densité ρ est constante on peut aussi écrire $d(\star v) = 0$.

Dans le cas irrotationnel et incompressible, on obtient alors une équation de Poisson

$$\Delta \phi = \star d \star d\phi = \star d(\star v) = 0.$$

3 Exemples d'applications en physique plus avancé

3.1 Mécanique Hamiltonienne

L'hamiltonien $H(x, p)$, une 0-forme, et la forme symplectique ω , une 2-forme, sont données par

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$$

et on pourra écrire $\omega = d\alpha$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ la 1-forme de Poincaré. La deuxième loi de Newton pour la position et l'impulsion $(x(t), p(t))$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp}{dt}(t) = -\vec{\text{grad}} U(x(t))$$

est alors équivalente à l'équation d'Hamilton.

Définition 102. (Équation d'Hamilton) Il existe un unique vecteur tangent

$$V = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dp}{dt}(t) \right) \quad \text{tel que} \quad i_V \omega = dH.$$

On note ϕ_t le transport induit par ce champs de vecteur V .

Exemple 103. (Conservation de l'énergie) L'énergie est conservée par la dynamique,

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* H = L_V H = i_V dH + d i_V H = i_V i_V \omega = 0$$

et donc $\phi_t^* H = H$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 104. (Théorème de Liouville) La 2-forme ω est conservée par la dynamique,

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = L_V \omega = di_V \omega + i_V d\omega = d \circ dH = 0$$

et donc $\phi_t^* \omega = \omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On peut remarquer qu'il s'agit en fait d'une équivalence : Si un transport ϕ_t , satisfait $\phi_t^* \omega = \omega$ pour tout t , alors $di_V \omega = 0$ et donc avec le Lemme de Poincaré il existe H tel que $i_V \omega = dH$.

On a aussi directement la conservation de la forme volume de l'espace des phases

$$\phi_t^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = (\phi_t^* \omega) \wedge \cdots \wedge (\phi_t^* \omega) = \omega \wedge \cdots \wedge \omega.$$

Exemple 105. (Crochet de Poisson) Pour F une 0 forme, on introduit de la même manière un vecteur tangent W tel que $i_W \omega = dF$. Alors

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* F = L_V F = i_V dF + d i_V F = i_V i_W \omega = \omega(W, V).$$

et on appelle crochet de Poisson cette quantité. En particulier si $\omega(W, V) = 0$, on a la conservation de F par la dynamique : $\phi_t^* F = F$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3.2 Équations de Maxwell dans $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$, les dimensions pour les 1-formes, 2-formes et 3-formes sont 4, 6 et 4. Les quantités physiques pour l'électromagnétisme apparaissent sous la forme suivante.

- $A^\mu = (V, A)$: Le potentiel et le potentiel vecteur. C'est une 1-forme et est liée à la phase de la fonction d'onde de l'électron (comme par exemple dans l'effet d'Aharanov Bohm)

$$A = -Vdt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

- $F^{\mu\nu} = (E, B)$: Le champs électromagnétique (d'habitude un 2-tenseur antisymétrique). C'est une 2-forme, on intègre le champs magnétique sur une surface par exemple.

$$F = \sum_{\text{cyc}} E_x dx \wedge dt + \sum_{\text{cyc}} B_{xy} dx \wedge dy$$

- $J^\mu = (\rho, j)$: La densité de charge et de courant. C'est une 3-forme, la densité s'intègre sur un volume et le courant sur une surface fois un intervalle de temps.

$$J = \rho dx \wedge dy \wedge dz + \sum_{\text{cyc}} j_x dy \wedge dz \wedge dt.$$

Pour simplifier nous supposons $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$. Les équations de Maxwell sont alors données dans la magnifique table suivante

0-forme	$\frac{d}{\partial}$	1-forme	$\frac{d}{\partial}$	2-forme	$\frac{d}{\partial}$	3-forme	$\frac{d}{\partial}$	4-forme
f	$\xrightarrow{(1)} \xleftarrow{(2)}$	(V, A)	$\xrightarrow{(3)}$	(E, B)	$\xrightarrow{(4)}$	0		
				$\star(E, B)$	$\xrightarrow{(5)}$	(ρ, j)	$\xrightarrow{(6)}$	0

Ici chaque flèche est la dérivée extérieure ou la codifférentielle.

- (1) Il s'agit de l'invariance de Jauge. On peut changer

$$V \rightarrow V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad A \rightarrow A + \text{grad}(f)$$

sans modifier le champs électromagnétique, en effet $(3) \circ (1) = 0$.

- (2) Un choix particulier de Jauge appelée Jauge de Lorentz $(2) = 0$, C'est à dire

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(A) = 0.$$

- (3) Les champs électriques et magnétiques sont exprimés avec le potentiel et le vecteur potentiel

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}(V) \quad \text{et} \quad B = \text{rot}(A).$$

- (4) On a ici les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Thomson

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot}(E) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(B) = 0$$

Celles-ci suivent bien sûr de (4) $\circ$ (3) = 0.

- (5) Ici ce sont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampere

$$\text{div}(E) = \rho \quad \text{et} \quad -\frac{\partial E}{\partial t} + \text{curl}(B) = j$$

- (6) La loi de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(j) = 0$$

une fois encore (6) $\circ$ (5) = 0.

Exemple 106. (Équation de continuité) Dans $\mathbb{R}^4$, une quantité conservée est une 3-forme J satisfaisant $d(J) = 0$. Par exemple, pour $\mathcal{V} = [t_1, t_2] \times \mathcal{D}$, (un intervalle de temps $\times$ un volume $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$), et en écrivant $J = (\rho, j)$ on a

$$\iiint_{\partial \mathcal{V}} J = \iiint_{\{t=t_2\}} \rho - \iiint_{\{t=t_1\}} \rho + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial \mathcal{D}} j = 0.$$

Autrement dit la quantité dans $\mathcal{D}$ au temps t_2 est égale à la quantité au temps t_1 moins le flux qui est sorti de $\mathcal{D}$ durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Remarque 107. (Isomorphismes)

- Dans le cadre de la relativité restreinte, on utilise la métrique de Minkowski

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Les notations x^μ (contravariant) et $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ (covariant) désignent un vecteur tangent et la 1-forme associée (Rietz : $\alpha = gV$ ou $V = g^{-1}\alpha$).
- Comme dans $\mathbb{R}^3$, nous préférons faire la distinction entre $F = (E, B)$ et $\star F = (H, D)$. Cette différence apparaît habituellement avec les notations $F^{\mu\nu}$ ou $F_{\mu\nu}$.

Exemple 108. (Équation d'onde) Les équations de Maxwell impliquent que

$$d \star dA = J.$$

Avec le choix de Jauge $\partial A = 0$ on aurait également

$$(d \circ \partial + \partial \circ d)A = \star J$$

et on obtient le Laplacien sur les 1-formes. Parce qu'il y a ici la métrique de Minkowski et non le produit scalaire usuelle, celui ci donne (après calculs) le D'alembertien

$$\square A = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A = \star J$$

Exemple 109. (Lagrangien Électromagnétisme) Le Lagrangien est une quantité que l'on intègre en temps et en espace (et qu'il faut minimiser). Il s'agit donc d'une 4-forme. Pour l'électromagnétisme, celle ci s'écrit ainsi

$$\mathcal{L}^{(\text{EM})} = -A \wedge J - \frac{1}{2}(dA \wedge \star dA).$$

Exercice 110. Par «analyse dimensionnelle» quelles 4-formes est-il possible d'obtenir à partir des formes différentielles $A, F, J, \dots$ et des opérations usuelles $\wedge, d, \star, \dots$?

3.3 Fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$

Nous considérons une fonction complexe $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et nous décomposons sa partie réelle et imaginaire

$$h(z) = h(x + iy) = f(x, y) + ig(x, y)$$

avec $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. En analyse complexe, on peut définir la 1-forme (complexe)

$$\begin{aligned} h(z)dz &= h(x + iy)(dx + idy) \\ &= (f(x, y)dx - g(x, y)dy) + i(f(x, y)dy + g(x, y)dx) \\ &= \mathcal{R} + i\mathcal{I} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{R}, \mathcal{I}$ deux 1-formes réelles sur $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\int_a^b h(z)dz = \int_a^b \mathcal{R} + i \int_a^b \mathcal{I}.$$

Théorème 111. (Théorème intégral de Cauchy) Si h est dérivable dans $\mathbb{C}$ alors $d\mathcal{R} = d\mathcal{I} = 0$ et donc pour toute boucle γ fermée dans $\mathbb{C}$

$$\oint_{\gamma} h(z)dz = \oint_{\gamma} \mathcal{R} + i \oint_{\gamma} \mathcal{I} = 0.$$

Démonstration. Être dérivable dans $\mathbb{C}$ signifie que

$$\frac{\partial h(x+iy)}{\partial x} = \frac{\partial h(x+iy)}{i\partial y}.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires on obtient les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

qui sont bien équivalentes à $d\mathcal{I} = d\mathcal{R} = 0$. $\square$

Remarque 112. On a $\star\mathcal{R} = \mathcal{I}$.

On obtient alors la conséquence suivante.

Proposition 113. *Pour une fonction dérivable dans $\mathbb{C}$*

$$\Delta\mathcal{R} = \Delta\mathcal{I} = 0.$$

Une autre propriété peut être interprétée comme le Lemme de Poincaré.

Proposition 114. *Toute fonction dérivable dans $\mathbb{C}$ est la dérivée d'une fonction dérivable dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. (preuve 1) Imiter la preuve du Lemme de Poincaré.

(preuve 2) Puisque $d\mathcal{I} = d\mathcal{R} = 0$, par le Lemme de Poincaré il existe R, I deux 0-formes, c'est à dire des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et tel que $dR = \mathcal{R}$ et $dI = \mathcal{I}$. On peut alors vérifier que pour $H(x+iy) = R(x, y) + iI(x, y)$ on a bien

$$\frac{dH}{dz}(z) = h(z)$$

$\square$

Remarque 115. (« $d \log z$ ») Avec l'écriture polaire des nombres complexes $z = re^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$ on a

$$\frac{dz}{z} = \frac{(x-iy)(dx+idy)}{|z|^2} = \frac{xdx+ydy}{|z|^2} + i\frac{-ydx+xdy}{|z|^2} = \frac{dr}{r} + id\theta.$$

En particulier pour une boucle fermée $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{C}$ entourant $\{0\}$ on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \oint_{\mathcal{C}} d \log r + i \oint_{\mathcal{C}} d\theta = 2i\pi.$$

Proposition 116. (*Formule des résidus*) Soit f une fonction dérivable dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ une boucle entourant $\{z_0\}$. On a

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2i\pi f(z_0).$$

Démonstration. On peut écrire

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz + \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = 2i\pi f(z_0).$$

On a ici fait le changement de variable $z-z_0 \rightarrow z$ pour utiliser la remarque précédente et on observe que $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{C}$. $\square$

A Annexe

A.1 Plus de coordonnées sphériques

On recalcule les gradient, rotationnel et divergence dans les coordonnées sphérique avec le repère orthonormé usuel. La morale ici est que les formules obtenues sont compliquées et donc si c'est possible, on préfère rester avec les formes différentielle et un repère non orthonormé.

Exemple 117. (Gradient en coordonnée sphérique) Soit une 0-forme f et son gradient en coordonnées sphérique

$$df = (\partial_r f) dr + (\partial_\theta f) d\theta + (\partial_\phi f) d\phi.$$

Si on s'impose un repère orthonormé $(dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)$ on écrira alors plutôt

$$df = (\partial_r f) dr + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta f \right) r d\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi f \right) r \sin \theta d\phi.$$

(Rotationnel en coordonnée sphérique) Pour une 1-forme en coordonnées sphérique $A = A_r dr + A_\theta d\theta + A_\phi d\phi$, on a simplement

$$dA = \sum_{\text{cyc}} (\partial_\theta A_r - \partial_r A_\theta) d\theta \wedge dr.$$

Pour retrouver le repère orthonormé il faut utiliser les coordonnées $\tilde{A}_r = A_r$, $\tilde{A}_\theta = \frac{A_\theta}{r}$, $\tilde{A}_\phi = \frac{A_\phi}{r \sin \theta}$ de telle sorte à avoir

$$A = \tilde{A}_r dr + \tilde{A}_\theta r d\theta + \tilde{A}_\phi r \sin \theta d\phi$$

et le rotationnel s'écrit alors

$$\begin{aligned} dA &= \left(\partial_\theta \tilde{A}_r - \partial_r (r \tilde{A}_\theta) \right) \frac{1}{r} r d\theta \wedge dr \\ &\quad + \left(\partial_r (r \sin \theta \tilde{A}_\phi) - \partial_\phi \tilde{A}_r \right) \frac{1}{r \sin \theta} dr \wedge r \sin \theta d\phi \\ &\quad + \left(\partial_\phi (r \tilde{A}_\theta) - \partial_\theta (r \sin \theta \tilde{A}_\phi) \right) \frac{1}{r^2 \sin \theta} r \sin \theta d\phi \wedge r d\theta. \end{aligned}$$

(Divergence en coordonnée sphérique) Pour une 2-forme en coordonnées sphérique $B = B_{\theta\phi} d\theta \wedge \phi + B_{\phi r} d\phi \wedge dr + B_{r\theta} dr \wedge d\theta$ on

$$dB = \left(\sum_{\text{cyc}} \partial_r B_{\theta\phi} \right) dr \wedge d\theta \wedge d\phi$$

Il faut alors utiliser comme coordonnées $\tilde{B}_{\theta\phi} = \frac{B_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta}$, $\tilde{B}_{\phi r} = \frac{B_{\phi r}}{r \sin \theta}$, $\tilde{B}_{r\theta} = \frac{B_{r\theta}}{r}$ de telle sorte à avoir

$$B = \tilde{B}_{\theta\phi} r^2 \sin \theta d\theta \wedge \phi + \tilde{B}_{\phi r} r \sin \theta d\phi \wedge dr + \tilde{B}_{r\theta} r dr \wedge d\theta$$

La divergence s'écrit alors

$$\begin{aligned} dB &= \left(\partial_r \left(\tilde{B}_{\theta\phi} r^2 \sin \theta \right) + \partial_\theta \left(\tilde{B}_{\phi r} r \sin \theta \right) + \partial_\phi \left(r \tilde{B}_{r\theta} \right) \right) dr \wedge d\theta \wedge d\phi \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \partial_r \left(\tilde{B}_{\theta\phi} r^2 \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \left(\tilde{B}_{\phi r} \sin \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \left(\tilde{B}_{r\theta} \right) \right) \\ &\quad \times r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi. \end{aligned}$$

A.2 Construction explicite pour le lemme de Poincaré

On propose maintenant plusieurs constructions explicites de β qui apparaît dans le Lemme de Poincaré $d\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = d\beta$.

Exemple 118. (Lemme de Poincaré, Construction dans $\mathbb{R}^3$, I)

($\text{rot} \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \text{grad} f$) Soit A une 1-forme telle que $dA = 0$. On fixe un point de référence x_0 et on définit la 0-forme

$$f(x) = \int_{x_0}^x A.$$

On peut alors vérifier que cette définition ne dépend pas du chemin allant de x_0 à x et que l'on a $df = A$.

(Transport d'une masse) Soit ρ une 3-forme décrivant une quantité de matière, on envoie celle-ci à l'infini avec une translation de vitesse $\mathbf{V}$. Avec l'équation de continuité on peut écrire

$$\rho(\mathbf{x}) = - \int_0^\infty \left(\frac{d}{ds} \rho(\mathbf{x} - s\mathbf{V}) \right) ds = \text{div} \left(\int_0^\infty \rho(\mathbf{x} - s\mathbf{V}) \mathbf{V} ds \right).$$

Dit autrement, on a $\rho = d(j)$ avec

$$j = R(x, y, z) dy \wedge dz, \quad \text{et} \quad R(x, y, z) = \int_{-\infty}^x \rho(u, y, z) du.$$

Exemple 119. (Lemme de Poincaré, Construction dans $\mathbb{R}^3$, II) On peut également s'inspirer des solutions bien connues d'électrostatique pour construire un β explicite. On définit le champ de vecteur tangent

$$V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}') = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}$$

(Avec la loi de Coulomb) Soit ρ une 3-forme. Alors la 2-forme

$$D(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} i_{V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}')} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = \sum_{\text{cyc}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - x'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \right) dy \wedge dz,$$

satisfait $dD = \rho$.

(Avec la loi de Biot et Savart) Soit j une 2-forme telle que $dj = 0$. Alors pour

$$H(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} i_{V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}')} j(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = \sum_{\text{cyc}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(z - z') j_{zx}(\mathbf{x}') - (y - y') j_{xy}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} d^3 \mathbf{x}' \right) dx$$

on a $dH = j$.

A.3 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une opération extrêmement courante en mathématique comme en physique. Nous présentons ici sa formulation pour les formes différentielles et ses propriétés de bases vis à vis des opérations algébriques vues précédemment.

Définition 120. (Transformée de Fourier) Soit α une ℓ forme différentielle dans $\mathbb{R}^n$. Pour $|J| = n - \ell$ et $k \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$F_J(\alpha, k) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge e^{ik \cdot x} dx_J.$$

Proposition 121. Soit α une ℓ -forme, β une $(\ell - 1)$ -forme, V un champs de vecteur constant dans $\mathbb{R}^n$ (espace euclidien). Pour $|I| = n - \ell - 1$ et $|J| = n - \ell$, on a les égalités suivantes :

$$(Différentielle extérieure) \quad F_J(d\beta, k) = (-1)^{\ell-1} i \sum_{i=1}^n k_i F_{\{i, J\}}(\beta, k),$$

$$(Dérivée de Lie) \quad F_J(L_V \alpha, k) = -i \left(\sum_{i=1}^n k_i V_i \right) F_J(\alpha, k)$$

$$(Produit intérieur) \quad F_I(i_V \alpha, k) = \sum_{i=1}^n V_i F_{I \setminus \{i\}}(\alpha, k),$$

$$(Opérateur de Hodge) \quad F_J(\star \alpha, k) = F_{J^c}(\alpha, k),$$

$$(Laplacien) \quad F_J(-\Delta \alpha, k) = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) F_J(\alpha, k).$$

Pour α_1 une ℓ_1 -forme et α_2 une ℓ_2 -forme et $|J| = n - \ell_1 - \ell_2$ on a

$$F_J(\alpha_1 \wedge \alpha_2, k) = \sum_{J_1 \cup J_2 \cup J = \{1, \dots, n\}} (F_{J \cup J_2}(\alpha_1, \cdot) * F_{J \cup J_1}(\alpha_2, \cdot)) (k)$$

où $*$ est le produit de convolution et la somme est sur les ensembles $|J_1| = \ell_1$ et $|J_2| = \ell_2$.

Exercice 122. Démontrer les égalités de cette dernière proposition.

Références

- [BBB85] William L BURKE, William L BURKE et William L BURKE : *Applied differential geometry*. Cambridge University Press, 1985.
- [Duc23] Raphael DUCATEZ : For the use of exterior form in daily physics, an introduction without coordinate frame. 2023.
- [Fla63] Harley FLANDERS : *Differential forms with applications to the physical sciences*, volume 11. Courier Corporation, 1963.
- [Fra11] Theodore FRANKEL : *The geometry of physics : an introduction*. Cambridge university press, 2011.
- [LCC⁺09] Jeffrey M LEE, Bennett CHOW, Sun-Chin CHU, David GLICKENSTEIN, Christine GUENTHER, James ISENBERG, Tom IVEY, Dan KNOFF, Peng LU, Feng LUO *et al.* : Manifolds and differential geometry. *Topology*, 643:658, 2009.