



**HAL**  
open science

## **Oraux de mathématiques, Concours ENS PC 2025**

Raphael Ducatez, Luc Lehéricy, Eliot Pacherie, Nikolay Tzvetkov

► **To cite this version:**

Raphael Ducatez, Luc Lehéricy, Eliot Pacherie, Nikolay Tzvetkov. Oraux de mathématiques, Concours ENS PC 2025. Licence. Oraux de mathématiques, ENS PC., ENS Paris Saclay, Palaiseau, France. 2025. ⟨hal-05303423⟩

**HAL Id: hal-05303423**

**<https://hal.science/hal-05303423v1>**

Submitted on 8 Oct 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

# Oraux de mathématiques, Concours ENS PC 2025

Raphael Ducatez, Luc Lehéricy, Eliot Pacherie, Nikolay Tzvetkov

Ce fichier regroupe un certain nombre d'exercices de mathématiques qui ont été donnés à l'épreuve oral des ENS, concours PC en 2025. Des éléments de réponses sont proposés mais qui ne constituent en rien une correction officielle.

Raphael Ducatez, Luc Lehéricy, Eliot Pacherie, Nikolay Tzvetkov

# Chapitre 1

## Algèbre

**Exercice 1.1.** Soient  $A(t)$  et  $B(t)$  des matrices symétriques définies positives dont les coefficients sont  $\mathcal{C}^1$ .

1. Montrer que si  $\frac{d}{dt}A(t) = B(t)A(t)$  alors

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det(A(t)) \operatorname{Tr}(B(t)).$$

2. Montrer que si  $\frac{d}{dt}A(t) = B(t)A(t) + A(t)B(t)$ , alors

$$2 \min\{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)\} \operatorname{Tr}(A(t)) \leq \frac{d}{dt} \operatorname{Tr}(A(t)) \leq 2 \max\{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)\} \operatorname{Tr}(A(t)).$$

**Solution 1.1.** On écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det A(t + \varepsilon) - \det A(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(A(t) + \varepsilon B(t)A(t) + O(\varepsilon^2)) - \det A(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det((I + \varepsilon B(t) + O(\varepsilon^2 A(t)^{-1})) A(t)) - \det A(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \varepsilon B(t) + O(\varepsilon^2)) - 1}{\varepsilon} \det A(t) \end{aligned}$$

La matrice  $B(t)$  est triangularisable dans  $\mathbb{C}$ ,  $B(t) = UTU^{-1}$  et

$$\det(I + \varepsilon B(t)) = \det(I + \varepsilon T) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon T_{ii}) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n T_{ii} + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr}(B(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Par multilinéarité du déterminant, le  $O(\varepsilon^2)$  ne contribue que pour des termes  $O(\varepsilon^2)$  et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \varepsilon B(t) + O(\varepsilon^2)) - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Tr}(B(t)) + O(\varepsilon) = \operatorname{Tr}(B(t))$$

(Méthode 2) Avec le polynôme caractéristique  $\chi$  de  $B(t)$ , on a

$$\det(I + \varepsilon B(t)) = \det\left(\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} I + B(t)\right)\right) = \varepsilon^n \chi\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr}(B(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Pour 2) on se place dans la base où  $B(t)$  est diagonale alors

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(A(t)) = 2 \text{Tr}(B(t)A(t)) = 2 \sum_i \lambda_i(B) A(t)_{ii}$$

et on peut conclure car  $A(t)_{ii} \geq 0$  et  $\min \lambda_i(B) \leq \lambda_i(B) \leq \max \lambda_i(B)$ .

**Exercice 1.2.** Soient  $N, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $\text{rg}(M) = k$  et  $\text{rg}(N) = \ell$ . Quelles sont les valeurs possibles pour  $\text{rg}(NM)$  ?

**Solution 1.2.** On considère les endomorphismes associés  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{m}$  et on note

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}} : \text{Im}(M) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \mathbf{n}(x) \end{aligned}$$

alors  $\text{rg}(NM) = \text{rg}(\mathbf{n} \circ \mathbf{m}) = \text{rg}(\tilde{\mathbf{n}})$ . En effet

$$\text{Im}(\mathbf{n} \circ \mathbf{m}) = \{(\mathbf{n} \circ \mathbf{m})(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \{\mathbf{n}(y), y \in \text{Im}(\mathbf{m})\} = \text{Im}(\tilde{\mathbf{n}}).$$

On a  $\text{Im}(\tilde{\mathbf{n}}) \subset \text{Im}(\mathbf{n})$  donc  $\text{rg}(\tilde{\mathbf{n}}) \leq \text{rg}(\mathbf{n})$ . Par le théorème du rang,

$$\text{rg}(\tilde{\mathbf{n}}) = \dim(\text{Im}(\mathbf{m})) - \dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{n}})) = \text{rg}(\mathbf{m}) - \dim(\text{Ker}(\mathbf{n}) \cap \text{Im}(\mathbf{m}))$$

et donc

$$k + \ell - n = \text{rg}(\mathbf{m}) - \dim(\text{Ker}(\mathbf{n})) \leq \text{rg}(\tilde{\mathbf{n}}) \leq \min\{\text{rg}(\mathbf{m}), \text{rg}(\mathbf{n})\} = \min\{k, \ell\}.$$

Finalement  $\text{rg}(\tilde{\mathbf{n}}) \in \llbracket k + \ell - n, \min\{k, \ell\} \rrbracket$  et toutes ces valeurs peuvent être atteintes en considérant les matrices bloc diagonales suivantes

$$M = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a + b = k \text{ et } b + c = \ell$$

**Exercice 1.3.** Soient  $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  deux matrices non nulles telles que

$$M^2 = N^2 = 0 \quad \text{et} \quad MN + NM = I_2.$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible  $A$  tel que

$$M = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{et} \quad N = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}.$$

**Solution 1.3.** Puisque  $N^2 = 0$ ,  $\text{Ker}(N) \neq \{0\}$  donc il existe un vecteur  $e \neq 0$  tel que  $Ne = 0$ . On a alors

$$e = MNe + NMe = NMe.$$

Posons  $f = Me$ , alors  $f \neq 0$  et  $Nf = e$ . Dans cette base,

$$\begin{cases} Ne = 0 \\ Nf = e \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Me = f \\ Mf = M^2e = 0 \end{cases} .$$

On peut alors choisir  $A$  la matrice de changement de base associée pour conclure l'exercice.

**Exercice 1.4.** Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  symétriques. On note  $[X, Y] = XY - YX$  le commutateur.

1. Montrer que

$$[[A, B]^2, C] = 0.$$

2. Même question si on ne suppose pas que les matrices sont symétriques.

**Solution 1.4.** 1) Si  $A$  et  $B$  sont symétriques alors

$$[A, B]^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -[A, B].$$

La matrice  $[A, B]$  est donc antisymétrique et est donc de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . On calcule

$$[A, B]^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 I_2$$

et on a alors

$$[[A, B]^2, C] = a^2 [I_2, C] = a^2 (C - C) = 0.$$

2) On remarque que

$$\text{Tr}([A, B]) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0.$$

Par Cayley-Hamilton on a que

$$X^2 - \det(X)I$$

est un polynôme annulateur de  $[A, B]$ . Avec  $a^2 = \det([A, B])$ , ( $a \in \mathbb{C}$ ) on a comme précédemment  $[A, B]^2 = a^2 I_2$  et également  $[[A, B]^2, C] = 0$ .

**Exercice 1.5.** Montrer que pour tous  $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$MN + NM - \text{Tr}(M)N - \text{Tr}(N)M + (\text{Tr}(N)\text{Tr}(M) - \text{Tr}(NM))I_2 = 0.$$

(Indication : on pourra commencer par le cas  $M = N$ ).

**Solution 1.5.** Dans le cas  $M = N$  il faut montrer que

$$M^2 - \text{Tr}(M)M + \frac{1}{2}(\text{Tr}(M)^2 - \text{Tr}(M^2))I_2 = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M)^2 - \text{Tr}(M^2) &= M_{11}^2 + M_{22}^2 + 2M_{11}M_{22} - (M_{11}^2 + M_{12}M_{21} + M_{22}^2 + M_{21}M_{12}) \\ &= 2(M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}) \\ &= 2 \det(M) \end{aligned}$$

et on reconnaît alors le théorème de Cayley-Hamilton  $M^2 - \text{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$

Pour le cas  $M \neq N$ , on peut réutiliser trois fois la formule précédente avec

$$(M + N)^2 - \text{Tr}(M + N)(M + N) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(M + N)^2 - \text{Tr}((M + N)^2))I_2 = 0$$

$$M^2 - \text{Tr}(M)M + \frac{1}{2}(\text{Tr}(M)^2 - \text{Tr}(M^2))I_2 = 0$$

$$M^2 - \text{Tr}(M)M + \frac{1}{2}(\text{Tr}(M)^2 - \text{Tr}(M^2))I_2 = 0$$

On développe alors la première expression pour retrouver alors la formule de l'énoncé.

**Exercice 1.6.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible. Montrer qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$P(A) = A^{-1}.$$

**Solution 1.6.** Avec le théorème de Cayley-Hamilton, il existe un polynôme  $R$  tel que

$$R(A) = A^n + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$$

avec  $a_0 = (-1)^n \det A \neq 0$ , donc

$$I = \frac{1}{a_0}(A^{n-1} + \dots + a_1)A \quad \text{et finalement} \quad A^{-1} = \frac{1}{a_0}(A^{n-1} + \dots + a_1).$$

**Exercice 1.7.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques tel que  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \subset \mathbb{C}$ . Montrer que l'application  $M \mapsto AM - MB$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Solution 1.7.** On note  $\phi$  cette application. Commençons par traiter le cas  $A, B$  diagonales.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

On a simplement

$$(AM - MB)_{ij} = (\lambda_i - \mu_j)M_{ij}.$$

Comme  $\lambda_i - \mu_j \neq 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , c'est un automorphisme dont l'application inverse est

$$\phi^{-1}(M)_{ij} = \frac{1}{\lambda_i - \mu_j} M_{ij}.$$

Pour le cas général, on diagonalise  $A = UD_1U^{-1}$  et  $B = VD_2V^{-1}$  (les matrices sont symétriques) et on écrit

$$\begin{aligned} \phi(M) &= UD_1U^{-1}M - MVD_2V^{-1} \\ &= U(D_1U^{-1}MV - U^{-1}MVD_2)V^{-1} \\ &= \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(M) \end{aligned}$$

avec  $\phi_1(M) = U^{-1}MV$ ,  $\phi_2(M) = D_1M - MD_2$  et  $\phi_3(M) = U^{-1}MV^{-1}$  qui sont trois automorphismes. Leur composition donne donc bien un automorphisme.

(Méthode 2) Comme c'est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il suffit de montrer qu'il est injectif. Pour cela, soit  $M \in \text{Ker}(\phi)$ , montrons que  $M = 0$ . Soit  $X$  un vecteur propre de  $B$  (non nul) associé à la valeur propre  $\mu$ , alors

$$0 = \phi(M)X = (AM - MB)X = AMX - \mu MX = (A - \mu \text{Id})(MX)$$

et donc

$$AMX = \mu MX.$$

Or  $\mu \notin \text{Sp}(A)$  car  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ , et donc  $MX = 0$ . Soit  $\{X_1, \dots, X_n\}$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $B$ , alors  $MX_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et donc  $M = 0$ .

(Méthode 3) Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $B$  de valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $A$  de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors

$$\phi(Y_i X_j^t) = AY_i X_j^t - Y_i X_j^t B = AY_i X_j^t - Y_i (BX_j)^t = (\lambda_i - \mu_j) Y_i X_j^t.$$

La matrice  $Y_i X_j^t$  est donc un vecteur propre de  $\phi$  de valeurs propre  $\lambda_i - \mu_j$ . On construit ainsi  $n^2$  vecteurs propres. On remarque qu'ils sont orthonormés

$$\text{Tr} \left( Y_i X_j^t (Y_{i'} X_{j'}^t)^t \right) = \text{Tr} (Y_i X_j^t X_{j'} Y_{i'}^t) = 1_{j=j'} \text{Tr} (Y_i Y_{i'}^t) = 1_{j=j'} 1_{i=i'}.$$

Ils forment donc une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'application  $\phi$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres  $\lambda_i - \mu_j$  sont tous non nulles.

**Exercice 1.8.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique et  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$  ses valeurs propres. On considère des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & x \\ x^t & a \end{pmatrix}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Soient  $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \mu_{n+1}$ . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe  $x, a$  tels que  $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$  soient les valeurs propres de  $M$ .

**Solution 1.8.** On pourra commencer par le cas  $n = 1$  (facultatif). Alors

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ x & a \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= (\lambda - X)(a - X) - x^2 = X^2 - (\lambda + a)X + a\lambda \\ &= (\mu_1 - X)(\mu_2 - X) = X^2 - (\mu_1 + \mu_2)X + \mu_1\mu_2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda + a = \mu_1 + \mu_2 \\ \lambda a - x^2 = \mu_1\mu_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = \mu_1 + \mu_2 - \lambda \\ x^2 = -\mu_1\mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 - \lambda) = (\mu_1 - \lambda)(\lambda - \mu_2) \end{cases}$$

qui est bien positif.

Pour le cas  $n \geq 1$  on commence par traiter le cas plus simple où  $A$  est diagonal.

$$M = \begin{pmatrix} D & x \\ x^t & a \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

et on calcule le polynôme caractéristique en développant la dernière colonne

$$\begin{aligned} \det(M - XI_{n+1}) &= \begin{vmatrix} D - XI_n & x \\ x^t & a - X \end{vmatrix} \\ &= (a - X) \prod (\lambda_i - X) \\ &\quad + \sum_i (-1)^{i-1+n} x_i \begin{vmatrix} D_{[1,i-1]} - XI_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{[i+1,n]} - XI_{n-i} \\ x_{[1,i-1]} & x_i & x_{[i+1,n]} \end{vmatrix} \\ &= (a - X) \prod_{j=1}^n (\lambda_j - X) - \sum_i x_i^2 \prod_{j \neq i} (\lambda_j - X). \end{aligned}$$

où on a développé la  $i$ -ème colonne. On cherche alors  $a$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que

$$\prod_{j=1}^{n+1} (\mu_j - X) = (a - X) \prod_{j=1}^n (\lambda_j - X) - \sum_i x_i^2 \prod_{j \neq i} (\lambda_j - X).$$

On a

$$X^{n+1} - \left( \sum \mu_j \right) X^n + \dots = X^{n+1} - (a + \sum \lambda_j) X^n + \dots$$

car les polynômes à droite sont de degré  $n - 1$ . On en déduit  $a = \sum \mu_j - \sum \lambda_j$ . (Autre méthode : on peut aussi utiliser  $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(A) + a$  pour montrer cette égalité.)

Pour déterminer les  $x_i^2$ , l'idée est d'évaluer en  $X = \lambda_i$  (On aurait pu reconnaître des polynômes de Lagrange), d'où

$$\prod_j (\mu_j - \lambda_i) = - \left( \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) \right) x_i^2$$

et on conclut

$$x_i^2 = - \frac{\prod_j (\mu_j - \lambda_i)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)}.$$

Il reste à vérifier que le terme de droite est bien positif. Cela découle de l'hypothèse d'entrelacement des valeurs propres.

Pour le cas général,  $A$  est symétrique et il existe donc  $U$  orthogonal tel que  $A = UDU^{-1}$  et on a

$$M = \begin{pmatrix} UDU^{-1} & x \\ x^t & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & U^t x \\ x^t U & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le cas diagonal il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  soient les valeurs propres de  $\begin{pmatrix} D & y \\ y^t & a \end{pmatrix}$  et on obtient une solution pour  $M$  en posant  $x = Uy$ .

**Exercice 1.9.** Soit  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(A) = \beta \text{Tr}(A).$$

**Solution 1.9.** Soient  $E_{ij}$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$  les matrices élémentaires. Par hypothèse,

$$\varphi(E_{ik}) = \varphi(E_{ij}E_{jk}) = \varphi(E_{jk}E_{ij}) = \varphi(1_{k=i}E_{jj}).$$

Puisque  $\varphi(0) = 0$ , nous obtenons que

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i \neq k \Rightarrow \varphi(E_{ik}) = 0.$$

De plus

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj}).$$

Notons  $\beta = \varphi(E_{11})$ , alors pour toute matrice  $A = (a_{ij})_{i,j}$ , par linéarité de  $\varphi$ ,

$$\varphi(A) = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi(E_{ij}) = \beta \text{Tr}(A).$$

Réciproquement, on vérifie que pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  et pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\beta \text{Tr}(AB) = \beta \text{Tr}(BA).$$

**Exercice 1.10.** Soit  $m \geq 2$  un nombre entier.

1. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que

$$B^2 = mB, \quad \text{Tr}(B) = 0,$$

Montrer que  $B = 0$ .

2. Soit  $A_1, \dots, A_m$  des matrices différentes, inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2 \quad A_j A_k \in \{A_1, \dots, A_m\}.$$

On suppose que

$$\text{Tr}(A_1 + \dots + A_m) = 0.$$

Montrer que

$$A_1 + \dots + A_m = 0.$$

**Solution 1.10.** 1. On a

$$B(B - m) = 0.$$

Le polynôme est scindé à racine simple donc  $B$  est diagonalisable et ses valeurs propres possibles sont 0 et  $m$ . Mais puisque  $\text{Tr}(B) = 0$ , l'unique valeur propre est donc 0 et finalement  $B = 0$ .

2. Soit  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . On remarque que  $\{A_j A_1, \dots, A_j A_m\}$  est une permutation de  $\{A_1, \dots, A_m\}$ . En effet, avec l'énoncé de l'exercice on a

$$\{A_j A_1, \dots, A_j A_m\} \subset \{A_1, \dots, A_m\}$$

et puisque  $A_j$  est inversible,

$$A_j A_k = A_j A_\ell \Rightarrow A_k = A_\ell.$$

Les éléments de  $\{A_j A_1, \dots, A_j A_m\}$  sont bien tous différents. On a alors que

$$A_j(A_1 + \dots + A_m) = A_1 + \dots + A_m.$$

Cette égalité est vraie pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et donc

$$(A_1 + \dots + A_m)^2 = \sum_{j=1}^m A_j(A_1 + \dots + A_m) = m(A_1 + \dots + A_m).$$

On note  $B = A_1 + \dots + A_m$  qui satisfait alors

$$B^2 = mB, \quad \text{Tr}(B) = 0,$$

Cette matrice est donc nulle d'après la première question.

**Exercice 1.11.** Soient  $A, B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $T \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$A = T^{-1}BT.$$

Montrer qu'il existe  $S \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que

$$A = S^{-1}BS.$$

**Solution 1.11.** On peut écrire

$$T = U + iV$$

avec  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En séparant la partie réelle et imaginaire dans

$$TA = BT,$$

on obtient

$$UA = BU, \quad VA = BV.$$

Le problème que l'on ne sait pas si  $U$  et  $V$  sont inversibles, mais on sait que  $U + iV$  est inversible. On pose alors

$$f(t) = \det(U + tV).$$

Nous avons que  $f(t)$  est un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $f(i) \neq 0$ , donc  $f$  n'est pas identiquement nul. Il existe donc  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$f(t_0) \neq 0.$$

En effet, si  $f(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  alors  $f$  admet strictement plus que  $n$  racines ce qui contredit que  $f$  n'est pas identiquement nul. On pose alors

$$S = U + t_0V.$$

Nous avons que  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible et que

$$SA = (U + t_0V)A = BU + t_0BV = B(U + t_0V) = BS,$$

donc

$$A = S^{-1}BS.$$

**Exercice 1.12.** Soit  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\mathrm{Tr}(A^2) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

**Solution 1.12.** L'application  $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$  est un produit scalaire associé à la norme  $\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ , donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathrm{Tr}(A^2)^2 \leq \|A^\top\|^2 \|A\|^2 = \|A\|^4$$

et donc  $\mathrm{Tr}(A^2) \leq \|A\|^2$ . De plus on a égalité si et seulement si  $A^\top$  et  $A$  sont colinéaires, c'est-à-dire  $A^\top = \lambda A$ . En appliquant deux fois la transposition, on déduit  $(\lambda^2 - 1)A = 0$ , donc soit  $A = 0$ , soit  $\lambda \in \{-1, 1\}$ . Les cas  $A = 0$  et  $\lambda = 1$  impliquent que  $A$  est symétrique. Si  $\lambda = -1$ , on aurait

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \mathrm{Tr}(A^2) = -\mathrm{Tr}(A^\top A) = -\|A\|^2 = -\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2,$$

et donc  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  c'est à dire  $A = 0$ . Ainsi, on a égalité si et seulement si  $A$  est symétrique.

**Exercice 1.13.** Soit  $A \in S_4(\mathbb{R})$  de rang 2 et dont le polynôme minimal est  $\pi(X) = X(X-1)(X+1)$ . Soit  $B \in S_4(\mathbb{R})$ , montrer que

$$\inf_{P \in \mathbb{R}[X]} \|P(A) - B\|_2$$

est atteint pour un polynôme  $P_{\text{inf}} \in \mathbb{R}_2[X]$  dont on pourra expliciter les coefficients en fonction de  $\text{Tr}(B)$ ,  $\text{Tr}(AB)$  et  $\text{Tr}(A^2B)$ .

**Solution 1.13.** Avec le polynôme annulateur, on a  $A(A^2 - 1) = A^3 - A = 0$  et donc  $A^3 = A \in \text{Vect}(I, A, A^2)$ . Par récurrence immédiate on a que  $X^n \in \text{Vect}(I, A, A^2)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc que

$$\{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\} = \text{Vect}(I, A, A^2).$$

Le minimum est atteint avec la projection orthogonale sur cet espace. De plus, avec les hypothèses de l'énoncé, on sait que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée et que dans cette base, elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque  $\text{Tr}(IA) = \text{Tr}(A) = 0$ ,  $I$  et  $A$  sont orthogonales pour le produit scalaire de matrices. On cherche une troisième matrice  $M = aA^2 + bA + cI$  pour que la famille  $I, A, M$  soit orthogonale.  $\text{Tr}(IM) = 2a + 0 + 4c = 0$  et  $\text{Tr}(AM) = a \text{Tr}(A^3) + b \text{Tr}(A^2) + c \text{Tr}(A) = 2b = 0$ , donc il faut prendre  $b = 0$  et  $a = -2c$ . Finalement,  $(I, A, 2A^2 - I)$  est une base orthogonale que l'on peut utiliser pour écrire la projection  $\Pi(B)$  :

$$P_{\text{inf}}(A) = \alpha I + \beta A + \gamma(2A^2 - I) = \Pi(B),$$

et en utilisant les produits scalaires et le fait que  $\langle P(A), B \rangle = \langle P(A), \Pi(B) \rangle$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  (par définition du projeté orthogonal), on obtient  $4\alpha = \text{Tr}(B)$ ,  $2\beta = \text{Tr}(AB)$  et  $4\gamma = \text{Tr}((2A^2 - I)B)$ .

**Exercice 1.14.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  avec  $n > p$ . Soit  $b \in \mathbb{R}^n$ .

$$(P) : \text{trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|.$$

1. Donner  $S_{(P)}$  l'ensemble des solutions de (P)
2. Montrer qu'il existe un unique  $\bar{x} \in S_{(P)}$  de norme minimale, c'est à dire  $\|\bar{x}\| = \inf_{y \in S_{(P)}} \|y\|$ .
3. (Bonus) Montrer que  $x \in \mathbb{R}^p$  est solution de (P) si et seulement si  $A^\top Ax = A^\top b$  et que  $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A)$ .

**Solution 1.14.** 1) (Remarque : Il s'agit du problème des moindres carrés.) Pour  $m \in \mathbb{N}$ , On note  $\pi_F(x)$  la projection orthogonale de  $x \in \mathbb{R}^m$  sur  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$ . On a

$$\min_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\| = \min_{z \in \text{Im}(A)} \|b - z\| = \|b - \pi_{\text{Im}(A)}(b)\|$$

et par unicité du minimum,  $x \in \mathbb{R}^p$  est solution de (P) si et seulement si  $Ax = \pi_{\text{Im}(A)}(b)$ . Soit  $x^*$  tel que  $Ax^* = \pi_{\text{Im}(A)}(b)$  (il existe car  $\pi_{\text{Im}(A)}(b) \in \text{Im}(A)$ ) et soit  $x \in \mathbb{R}^p$ . Alors  $x$  est aussi solution ssi

$$\begin{aligned} Ax &= \pi_{\text{Im}(A)}(b) \\ \Leftrightarrow Ax &= Ax^* \\ \Leftrightarrow A(x - x^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - x^* &\in \text{Ker}(A) \\ \Leftrightarrow x &\in x^* + \text{Ker}(A) \end{aligned}$$

En conclusion

$$S_{(P)} = x^* + \text{Ker}(A).$$

2) Soit  $x^*$  une solution de (P), alors  $\bar{x} = \pi_{\text{Ker}(A)^\perp}(x^*)$  est l'unique minimum recherché grâce au lemme de projection : si  $y \in S_{\text{Pmc}}$ , alors  $y = \bar{x} + z$  pour un  $z \in \text{Ker}(A)$  d'après la question 2, donc comme  $\bar{x} \in \text{Ker}(A)^\perp$ ,  $\|y\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|z\|^2 \geq \|\bar{x}\|^2$  avec égalité si et seulement si  $y = \bar{x}$ .

3) (Bonus) D'après la question 1,  $x \in \mathbb{R}^p$  est solution de (P) si et seulement si

$$\begin{aligned} Ax &= \pi_{\text{Im}(A)}(b) \\ \Leftrightarrow \langle b - Ax, z \rangle &= 0 \text{ pour tout } z \in \text{Im}(A) \\ \Leftrightarrow \langle b - Ax, Ay \rangle &= 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^p \\ \Leftrightarrow \langle A^\top b - A^\top Ax, y \rangle &= 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^p \\ \Leftrightarrow A^\top b - A^\top Ax &= 0_{\mathbb{R}^p} \end{aligned}$$

Enfin, Il est clair que  $\text{Ker}(A) \subseteq \text{Ker}(A^\top A)$ . Soit  $x \in \text{Ker}(A^\top A)$ , alors  $A^\top Ax = 0$ , donc  $\langle A^\top Ax, x \rangle = 0$ , donc  $\langle Ax, Ax \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\|Ax\|^2 = 0$ . On a donc  $Ax = 0$ , c'est-à-dire  $x \in \text{Ker}(A)$ .

**Exercice 1.15.** Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit  $E_A = \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ . Que vaut  $\dim(E_A)$  ?

**Solution 1.15.** Montrons que  $\dim(E_A) = n \text{rg}(A)$ . Chaque colonne de  $AM$  est dans l'image de  $A$  et donc

$$E_A \subset \left\{ X = \left( X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_n \right), X_1, \dots, X_n \in \text{Im}(A) \right\},$$

qui est de dimension  $n \text{rg}(A)$ . Montrons que l'on a égalité des ensembles. Soit  $X_1, \dots, X_n \in \text{Im}(A)$ , Alors il existe  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^n$  tel que  $AY_i = X_i$  pour tout  $i \leq n$ . On pose

$$M = \left( Y_1 \mid Y_2 \mid \cdots \mid Y_n \right)$$

On a alors

$$AM = \left( AY_1 \mid \cdots \mid AY_n \right) = \left( X_1 \mid \cdots \mid X_n \right).$$

On a donc bien

$$E_A = \left\{ X = \left( X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_n \right), X_1, \dots, X_n \in \text{Im}(A) \right\}$$

et finalement  $\dim(E_A) = n \text{rg}(A)$ .

**Exercice 1.16.** Soit  $n \geq 2$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $P(A)$  est inversible. Montrer que  $P$  est constant.

**Solution 1.16.** Si  $P$  est non constant, il admet une racine  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On écrit  $\lambda = re^{i\theta}$  et on pose la matrice réelle, par blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A_1 = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On vérifie que les valeurs propres de  $A_1$  sont  $re^{i\theta}$  et  $re^{-i\theta}$ . Alors les valeurs propres de  $P(A_1)$  sont  $P(re^{i\theta}) = 0$  et  $P(re^{-i\theta})$  qui admet donc un noyau non nul et finalement

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & P(0) \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

**Exercice 1.17.** Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de dimension 4 de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

1. On suppose que

$$E = \text{Vect}(e^x) + \text{Vect}(e^{-x}) + G \text{ où } G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ et } G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Montrer que  $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$ .

2. On suppose de plus la propriété suivante :

$$E = F_1 + F_2 \text{ avec } \dim F_1 = \dim F_2 = 2, F_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) \text{ et } F_2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Montrer que  $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$ .

**Solution 1.17.**

1. Soit  $f \in E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $g \in G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + g(x).$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ , la seule partie non bornée de  $f$  est  $\lambda_1 e^x$  mais  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , donc  $\lambda_1 = 0$  (sinon  $f(x) \sim \lambda_1 e^x$  qui n'est pas de carré intégrable). Maintenant,  $x \mapsto e^{-x} \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , donc

$$g(x) = f(x) - \lambda_2 e^{-x} \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),$$

mais  $g \in G$  et  $G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}$  donc  $f(x) = \lambda_2 e^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $\lambda_2$ , ceci n'est pas de carré intégrable en  $-\infty$ , donc nécessairement  $\lambda_2 = 0$  et donc  $f = 0$ .

2. Montrons que  $x \mapsto e^x \in F_1$ . On a  $x \mapsto e^x \in E = F_1 + F_2$  donc il existe  $(f_1, f_2) \in F_1 \times F_2$  tel que  $e^x = f_1(x) + f_2(x)$ . On a donc

$$f_2(x) = e^x - f_1(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}),$$

et alors  $f_2 = 0$  (par propriété de  $F_2$ ), donc  $e^x \in F_1$ . Comme  $F_1$  est de dimension 2, notons  $h$  une fonction tel que  $F_1 = \text{Vect}(e^x, h)$ . Comme  $h \in E = \text{Vect}(e^x) + \text{Vect}(e^{-x}) + G$ , on peut choisir  $h \in \text{Vect}(e^{-x}) + G$  (quitte à lui ajouter un multiple de  $e^x$ ). Soit  $f \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

alors  $f \in F_1$  (pour la même raison que  $e^x$ , comme  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}_-$ , elle ne peut pas avoir de composante dans  $F_2$ ) et donc il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$f(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 h(x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Comme on a choisi  $h \in \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}) + G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , on a  $\lambda_1 = 0$  (sinon  $f$  est non bornée en  $+\infty$ ), donc  $f \in \text{Vect}(h)$ , donc  $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \leq 1$ , mais  $h$  est dans cet espace (elle est dans  $F_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$  et dans  $\text{Vect}(e^{-x}) + G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ), d'où le résultat souhaité.

**Exercice 1.18.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit  $[A, B] = AB - BA$ ,  $f_0(A, B) = B$  et pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$f_{k+1}(A, B) = [A, f_k(A, B)].$$

1. Montrer qu'il est possible d'écrire  $f_k(A, B) = \sum_{j=0}^k c_{k,j} A^j B A^{k-j}$  et calculer les  $c_{k,j}$ .
2. Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , on note  $\|A\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ . À quelle condition sur  $\|A\|$  a-t-on que pour tout  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f_k(A, B) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$  ?
3. Trouver un contre-exemple si  $\|A\| = 1/2$ .

**Solution 1.18.**

1. On raisonne par récurrence. On a tout d'abord  $f_0(A, B) = c_{0,0} B$  avec  $c_{0,0} = 1$ . Ensuite on suppose que l'on a  $f_k(A, B) = \sum_{j=0}^k c_{k,j} A^j B A^{k-j}$ , alors

$$\begin{aligned} f_{k+1}(A, B) &= \sum_{j=0}^k c_{k,j} A^{j+1} B A^{k-j} - \sum_{j=0}^k c_{k,j} A^j B A^{k+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} c_{k,j-1} A^j B A^{k+1-j} - \sum_{j=0}^k c_{k,j} A^j B A^{k+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} c_{k+1,j} A^j B A^{k+1-j}. \end{aligned}$$

Ce qui est bien la forme recherché avec les relations de récurrence

$$c_{k+1,0} = c_{k,0}, \quad c_{k+1,k+1} = -c_{k,k} \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad c_{k+1,j} = c_{k,j-1} - c_{k,j}.$$

On reconnaît le triangle de Pascal et on a alors  $c_{k,j} = (-1)^{k-j} \binom{k}{j}$ .

2. Commençons par considérer le cas où  $A$  est diagonale  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On a

$$[A, B]_{ij} = (AB - BA)_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) B_{ij}.$$

et alors

$$\max_{i,j} |[A, B]_{ij}| \leq \left( \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \right) \left( \max_{i,j} |B_{ij}| \right) \leq 2 \left( \max_i |\lambda_i| \right) \left( \max_{i,j} |B_{ij}| \right).$$

Par récurrence immédiate on obtient que

$$\max_{i,j} |f_k(A, B)_{ij}| \leq \left( 2 \max_i |\lambda_i| \right)^k \max_{i,j} |B_{ij}|.$$

Une condition suffisante serait alors  $2 \max_i |\lambda_i| < 1$ . Considérons maintenant le cas général avec  $A$  est symétrique. Elle est diagonalisable dans une base orthonormée et on écrit

$$A = UDU^*$$

avec  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et on note également  $\tilde{B} = U^*BU$  et alors

$$U^* f_k(A, B)U = \sum_{j=0}^k c_{k,j} D^j \tilde{B} D^{k-j} = f_k(D, \tilde{B}).$$

et donc  $f_k(A, B) \rightarrow 0$  si et seulement si  $f_k(D, \tilde{B}) \rightarrow 0$  et on a donc la même condition suffisante  $2 \|A\| = 2 \max_i |\lambda_i| < 1$ . Remarquer que cette condition n'est pas nécessaire car strictement plus faible que  $\max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| < 1$ . Par exemple pour  $A = \lambda \text{Id}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a  $[A, B] = 0$  pour tout  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donc  $f_k(A, B) = 0$  dès que  $k \geq 1$ .

3. On pose les matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Et donc pour tout  $k$ ,  $f_k(A, B) = B$  qui ne converge pas vers 0.

**Exercice 1.19.** Quelles sont les valeurs de  $\alpha > 0$  telles que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , il existe une famille de vecteurs  $(X_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in (\mathbb{R}^n)^p$  telle que  $\|X_k\| = \alpha k$  et  $\|X_i - X_j\| = |i - j|$  pour tout  $(i, j, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^3$  ?

**Solution 1.19.** On a

$$\langle X_i, X_j \rangle = -\frac{1}{2} (\|X_i - X_j\|^2 - \|X_i\|^2 - \|X_j\|^2) = -\frac{1}{2} ((i - j)^2 - \alpha^2 i^2 - \alpha^2 j^2) = ij + \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1)(i^2 + j^2)$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle X_i, X_j \rangle| \leq \|X_i\| \|X_j\| \leq \alpha^2 ij.$$

En particulier,

$$ij(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1)(i^2 + j^2) = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1)(i - j)^2 \leq 0,$$

donc si  $\alpha > 1$ , on a  $\frac{1}{2}(i - j)^2 \leq 0$  donc  $i = j$ , c'est-à-dire que  $p = 1$  est la seule valeur de  $p$  possible, donc on ne peut pas avoir  $\alpha > 1$ .

Si  $\alpha = 1$ ,  $p = 1$  marche toujours, et en prenant  $p \geq 2$ , on a pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  avec  $i < j$  égalité dans l'inégalité triangulaire

$$j = \alpha j = \|X_j\| \leq \|X_i\| + \|X_j - X_i\| = \alpha i + (j - i) = j,$$

donc  $X_i$  et  $X_j$  sont colinéaires. Ce cas colinéaire fournit justement un exemple de famille vérifiant l'énoncé pour n'importe quel  $p \in \mathbb{N}^*$ , en se fixant un vecteur  $e$  et en prenant  $X_j = je$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

De plus, étant donné  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(X_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  une famille de vecteurs vérifiant l'énoncé, on a  $p - 1 = \|X_1 - X_p\| \leq \|X_1\| + \|X_p\| = (p + 1)\alpha$  donc  $p \leq \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$  : si  $\alpha < 1$ , il n'y a qu'un nombre fini de  $p$  pour lesquels il existe une famille de vecteur vérifiant l'énoncé, donc on ne peut pas prendre  $\alpha < 1$  : la seule valeur de  $\alpha$  possible est 1.

**Exercice 1.20.** Soient  $p, q$  deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que s'ils commutent, alors  $pq$  est aussi un projecteur orthogonal.
2. Montrer que dans tous les cas, les valeurs propres de  $pq$  sont réelles et dans  $[0, 1]$ .
3. Soit  $\lambda \in [0, 1]$ , Déterminer deux projecteurs orthogonaux tel que  $\lambda$  soit valeur propre de  $pq$ .

**Solution 1.20.**

1. On a  $(pq)^* = q^*p^* = qp = pq$  et  $(pq)^2 = pqpq = p^2q^2 = pq$ .
2. On a  $p = p^*$  et si  $pq(x) = \lambda x$ , alors  $x \in \text{Im}(p)$  donc  $p(x) = x$  et

$$\lambda \|x\|^2 = \langle pq(x), x \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle = \langle q(x), x \rangle = \langle q^2(x), x \rangle = \langle q(x), q(x) \rangle = \|q(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$$

3. On prend  $p$  le projecteur orthogonal selon  $e_1$  et  $q$  le projecteur orthogonal selon  $Y$  avec  $\|Y\| = 1$  et  $\langle Y, e_1 \rangle = \sqrt{\lambda}$ .

**Exercice 1.21.** Soit  $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$ . On dit que  $A \geq B$  si  $A - B \in S_n^+(\mathbb{R})$ . On note  $\Phi : A \rightarrow A^\top A$ . Montrer que pour tout  $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\Phi(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda \Phi(A) + (1 - \lambda)\Phi(B).$$

**Solution 1.21.** On calcule

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda A + (1 - \lambda)B) &= (\lambda A^\top + (1 - \lambda)B^\top)(\lambda A + (1 - \lambda)B) \\ &= \lambda^2 A^\top A + \lambda(1 - \lambda)(A^\top B + B^\top A) + (1 - \lambda)^2 B^\top B \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\lambda \Phi(A) + (1 - \lambda)\Phi(B) - \Phi(\lambda A + (1 - \lambda)B) \\ &= \lambda(1 - \lambda)A^\top A + \lambda(1 - \lambda)B^\top B - \lambda(1 - \lambda)(A^\top B + B^\top A) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(A^\top A + B^\top B - A^\top B - B^\top A) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(A - B)^\top (A - B) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

**Exercice 1.22.** Soit  $D$  une matrice diagonale et  $E$  la matrice contenant un 1 en haut à droite et des 0 partout ailleurs.

1. Calculer  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $(D + E)^n = D^n + a_n E$ .
2. Déterminer un équivalent de  $a_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Solution 1.22.**

1. Pour  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  on a

$$DE = \lambda_1 E, \quad ED = \lambda_m E \quad \text{et} \quad E^2 = 0.$$

et donc

$$(D + E)^{n+1} = (D^n + a_n E)(D + E) = D^{n+1} + (a_n \lambda_m + \lambda_1^n) E.$$

On en déduit que  $a_{n+1} = \lambda_m a_n + \lambda_1^n$ . On calcule les premiers termes

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \lambda_m + \lambda_1, \quad a_3 = \lambda_m^2 + \lambda_1 \lambda_m + \lambda_1^2, \quad a_4 = \lambda_m^3 + \lambda_1 \lambda_m^2 + \lambda_1^2 \lambda_m + \lambda_1^3,$$

et par récurrence immédiate, on obtient la formule

$$a_{n+1} = \sum_{j=0}^n \lambda_1^{n-j} \lambda_m^j.$$

2. Si  $\lambda_1 = \lambda_m$ , on a directement  $a_n = n\lambda_m^{n-1}$ . Si  $|\lambda_m| > |\lambda_1|$ , on note  $x = \frac{\lambda_1}{\lambda_m} < 1$  et on a

$$a_n = \lambda_m^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} x^j \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\lambda_m^{n-1}}{1-x}.$$

et la même chose si  $|\lambda_1| > |\lambda_m|$ .

**Exercice 1.23.** Déterminer une famille de polynômes  $P_k$  de taille minimale telle qu'aucun d'entre eux n'est un monôme, et pour toute matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe un polynôme  $P_k$  dans cette famille tel que  $P_k(A)$  est inversible.

**Solution 1.23.**  $P(A)$  est inversible si aucune des racines de  $P$  n'est valeur propre de  $A$ . Une première idée est alors de poser

$$P_k = X - k \quad \text{pour } k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

Dans ce cas, soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Si pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $P_k(A) = A - kI$  n'est pas inversible alors  $A$  admet  $k = 1, \dots, n+1$  pour valeur propre de  $A$ . Ceci est impossible car  $A$  est de taille  $n$ . Conclusion la taille minimale de la famille de polynômes est inférieure à  $n+1$ . On peut cependant faire mieux en posant

$$Q_k = X^2 + k \quad \text{pour } k \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \rrbracket.$$

En effet si  $Q_k(A) = A^2 - kI$  n'est pas inversible alors  $A$  admet  $i\sqrt{k}$  ou  $-i\sqrt{k}$  pour valeur propre. Cependant comme  $A$  est réelle, si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre alors  $\bar{\lambda}$  aussi. Les complexes  $\{i\sqrt{k}, -i\sqrt{k}\}$  sont donc tous les deux valeurs propres. On obtient ainsi  $2 \times (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) > n$  valeurs propre de  $A$  et donc une absurdité. La taille minimale de la famille de polynômes est donc inférieure à  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ .

Ceci est optimal. Si on ne dispose que de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  polynômes, on peut construire

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \end{pmatrix}, \quad A_k \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ ou } GL_1(\mathbb{R})$$

et tel que pour tout  $k$ ,  $P_k(A_k)$  ne soit pas inversible.

**Exercice 1.24.**

1. Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré dans le plan. On suppose que  $\widehat{ACB}$  est aigu. Montrer que

$$AC^2 + BC^2 > AB^2.$$

2. Soient  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ . On définit les demi-droites  $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{R}^3$  comme suit :

$$l_1 = \{te_1, t \in \mathbb{R}_+^*\}, l_2 = \{te_2, t \in \mathbb{R}_+^*\}, l_3 = \{te_3, t \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

On suppose que  $e_1, e_2, e_3$  sont deux à deux orthogonaux. Montrer que pour tout  $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$  le triangle  $A_1A_2A_3$  est aigu.

3. Avec les notations de la question précédente on suppose que pour tout  $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$  le triangle  $A_1A_2A_3$  est aigu. Montrer que  $e_1, e_2, e_3$  sont deux à deux orthogonaux.

**Solution 1.24.**

1. C'est la formule d'Al-Kashi:

$$AB^2 = (\vec{AC} + \vec{CB})^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB}$$

2. On a

$$A_1A_2^2 = \|t_1e_1 + t_2e_2\|^2 = t_1^2 + t_2^2, \quad \text{et de même} \quad A_2A_3^2 = t_2^2 + t_3^2, \quad A_1A_3^2 = t_1^2 + t_3^2,$$

Comme la première question fournit une équivalence, on obtient que tous les angles du triangle sont bien aigus.

3. D'après 1), nous avons que

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in ]0, \infty[ \quad \|t_1e_1 - t_2e_2\|^2 + \|t_1e_1 - t_3e_3\|^2 > \|t_2e_2 - t_3e_3\|^2,$$

donc

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in ]0, \infty[ \quad 2t_1^2\|e_1\|^2 - 2t_1t_2\langle e_1|e_2 \rangle - 2t_1t_3\langle e_1|e_3 \rangle > -2t_2t_3\langle e_2|e_3 \rangle.$$

Dans la limite  $t_1 \rightarrow 0$ , il vient que

$$\langle e_2|e_3 \rangle \geq 0.$$

On prend  $t_1 = 1$  et on divise par  $t_2$ . Il vient

$$\forall t_2, t_3 \in ]0, \infty[ \quad \frac{2}{t_2}\|e_1\|^2 - 2\langle e_1|e_2 \rangle - 2\frac{t_3}{t_2}\langle e_1|e_3 \rangle > -2t_3\langle e_2|e_3 \rangle.$$

Dans la limite  $t_2 \rightarrow \infty$ , il vient que  $t_3 \rightarrow 0$  il vient que

$$\langle e_1|e_2 \rangle \leq 0.$$

Ensuite, on prend  $t_1 = 1$  et on divise par  $t_3$ . Il vient

$$\forall t_2, t_3 \in ]0, \infty[ \quad \frac{2}{t_3}\|e_1\|^2 - 2\frac{t_2}{t_3}\langle e_1|e_2 \rangle - 2\langle e_1|e_3 \rangle > -2t_2\langle e_2|e_3 \rangle.$$

Dans la limite  $t_2 \rightarrow 0$ , il vient que  $t_3 \rightarrow \infty$  il vient que

$$\langle e_1|e_3 \rangle \leq 0.$$

En utilisant que les autres angles sont aigus et des arguments similaire on obtient 6 autres inégalités pour les produits scalaire entre  $e_1, e_2$  et  $e_3$  qui donnent que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

(Autre méthode, plus géométrique) : Supposons que  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas orthogonaux. Prenons  $A_3 = t_3 e_3$ . À  $A_1$  et  $A_2$  fixés, l'angle  $\widehat{A_1 A_3 A_2}$  est une fonction continue de  $t_3$ , à valeurs dans  $[0, \pi/2]$ , donc en prenant  $t_3 = 0$ , on en déduit que l'angle formé par  $e_1$  et  $e_2$  est aigu (strictement, car ils ne sont pas orthogonaux). Fixons  $A_1$ , alors la perpendiculaire à l'axe engendré par  $e_1$  qui coupe cet axe en  $A_1$  dans le plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$  contenant l'origine intersecte l'axe engendré par  $e_2$  (cette perpendiculaire et l'axe sont coplanaires, et ils ne sont pas parallèles car les deux axes ne sont pas perpendiculaires). En prenant un point  $A_2$  plus loin sur l'axe engendré par  $e_2$  que ce point d'intersection, on construit un angle  $\widehat{O A_1 A_2}$  strictement obtus, donc par continuité, il existe un  $t_3$  assez petit tel que en prenant  $A_3 = t_3 e_3$ , l'angle  $\widehat{A_3 A_1 A_2}$  est strictement obtus, ce qui contredit l'hypothèse.

**Exercice 1.25.** Trouver l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles qu'il existe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\|A^n x\| \rightarrow +\infty$ .

**Solution 1.25.** La matrice  $A$ , vue comme matrice complexe, est trigonalisable.

Si son polynôme caractéristique est à racines simples, elle est même diagonalisable, auquel cas il existe  $x \in \mathbb{C}^2$  tel que  $\|A^n x\| \rightarrow +\infty$  si et seulement si une de ses valeurs propres (au moins) a un module  $> 1$  (en prenant le vecteur propre associé). Avec  $x' = \operatorname{Re}(x)$  ou  $\Im(x)$ , on obtient  $x' \in \mathbb{R}^2$  et  $\|A^n x'\| \rightarrow +\infty$ . Inversement, si toutes les valeurs propres sont de module  $\leq 1$ , alors la norme de  $A^n x$  reste bornée (en notant  $\lambda_i$  les valeurs propres et en décomposant  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2$  sur la base  $(e_1, e_2)$  de vecteurs propres, on a  $\|A^n x\| \leq |a_1| |\lambda_1|^n \|e_1\| + |a_2| |\lambda_2|^n \|e_2\| \leq |a_1| \|e_1\| + |a_2| \|e_2\|$ ).

Si le polynôme caractéristique a une racine double,  $A$  est de la forme

$$P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$$

où  $\alpha$  est la valeur propre, et on peut montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}\beta \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc en décomposant  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2$  sur la base  $(e_1, e_2)$  associée à  $P$ ,  $A^n x = (a_1 \alpha^n + a_2 n \alpha^{n-1} \beta) e_1 + a_2 \alpha^n e_2$ .

- Si  $\beta = 0$ , alors  $A = \alpha I$ , donc  $A$  diagonale (et diagonalisable) et le raisonnement précédent conclut qu'il faut  $|\alpha| > 1$ ,
- Si  $|\alpha| > 1$ , alors  $x = e_1$  vérifie  $\|A^n x\| \rightarrow +\infty$ ,
- Si  $|\alpha| < 1$ , alors  $\|A^n x\| \rightarrow 0$  pour tout  $x$ ,
- Si  $|\alpha| = 1$  et  $\beta \neq 0$ , alors en prenant  $x = e_2$ ,

$$\begin{aligned} \|A^n x\| &= \|n a_2 \alpha^{n-1} \beta e_1 + a_2 \alpha^n e_2\| \\ &\geq n |a_2| |\beta| \|e_1\| - |a_2| \|e_2\| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

On conclut donc que les matrices  $A$  vérifiant l'énoncé sont soit les matrices diagonalisables ayant au moins une valeur propre (complexe) de module  $> 1$ , soit les matrices non diagonalisables ayant une valeur propre (complexe) de module  $\geq 1$ .

## Chapitre 2

# Analyse

**Exercice 2.1.** Soit  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  qui satisfait l'équation

$$y' = -\sin(y), \quad y(0) = 1.$$

Montrer que la limite suivante existe et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^t < \infty.$$

**Solution 2.1.** Tout d'abord puisque  $y \in [0, 1]$ ,  $\sin y \geq 0$  et donc  $y$  est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite  $\ell \in [0, 1]$ . On a aussi que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(y(t)) = -\sin(\ell)$$

par continuité du sinus. Supposons  $\ell > 0$ . Alors

$$y(t) = \int_0^t y'(s) ds \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -t \sin(\ell)$$

et donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$  ce qui est absurde. Conclusion  $\ell = 0$ .

On note maintenant  $g(t) = e^t y(t)$  alors

$$g'(t) = e^t(y(t) + y'(t)) = e^t(y(t) - \sin y(t)) \geq 0$$

car  $\sin u \leq u$  pour tout  $u \in [0, 1]$ . La fonction est donc croissante et sa limite existe donc dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . De plus on peut écrire

$$g(t) = 1 + \int_0^t g'(s) ds = 1 + \int_0^t e^s(y(s) - \sin y(s)) ds.$$

Il s'agit de montrer que l'intégrale converge pour  $t \rightarrow \infty$ . Pour cela on considère une variante de l'exercice en posant  $g_\eta(t) = e^{\eta t} y(t)$  avec  $\eta \in ]0, 1[$ . Par le même calcul on a

$$g'_\eta(t) = e^{\eta t}(\eta y(t) - \sin y(t)).$$

Pour  $t \rightarrow \infty$ , puisque  $y(t) \rightarrow 0$  on a

$$g'_\eta(t) = e^{\eta t}(\eta y(t) - y(t) + o_{t \rightarrow \infty}(y(t))) = e^{\eta t} y(t) (\eta - 1 + o_{t \rightarrow \infty}(1)).$$

Comme  $\eta < 1$ , il existe donc  $C$  tel que  $g'(t) \leq 0$  pour tout  $t \geq C$ . La fonction  $g_\eta$  est donc décroissante à partir d'un certain rang et elle atteint donc un maximum. En notant  $K_\eta = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} g_\eta(t)$  on a alors que

$$y(t) \leq K_\eta e^{-\eta t}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On considère de nouveau le terme dans l'intégrale et on fait un développement limité du sinus

$$e^s(y(s) - \sin y(s)) = e^s \left( y(s) - y(s) + \frac{y(s)^3}{6} + o_{s \rightarrow \infty}(y(s)^3) \right) = e^s y(s)^3 (1 + o_{s \rightarrow \infty}(1)).$$

Finalement

$$|e^s(y(s) - \sin y(s))| \leq K_\eta^3 e^{(1-3\eta)s} (1 + o(1))^3.$$

Cela est vrai pour tout  $0 < \eta < 1$ , en particulier pour  $\eta = \frac{1}{2}$ , on a une majoration par  $Ce^{-\frac{1}{2}s}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . On a donc bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 1 + \int_0^\infty e^s(y(s) - \sin y(s)) ds < \infty.$$

(Deuxième méthode, "à la physicienne") On a que  $y(t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  car sinon la solution serait  $y = 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On peut alors réécrire l'équation différentielle ainsi

$$\frac{y'(t)}{\sin(y(t))} = -1.$$

$t \rightarrow y(t)$  est strictement décroissante sur  $[0, t]$  et on peut faire le changement de variable  $u = y(t)$  et obtenir

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{\sin(y(s))} ds = - \int_{y(t)}^1 \frac{du}{\sin u} = -t.$$

Pour  $u \rightarrow 0$ , on a

$$\frac{1}{\sin(u)} = \frac{1}{u(1 - u^2/6 + o(u^2))} = \frac{1}{u} (1 + u^2/6 + o(u^2)) = \frac{1}{u} + \frac{u}{6} + o(u).$$

Ainsi

$$\int_{y(t)}^1 \frac{du}{\sin u} = \int_{y(t)}^1 \left( \frac{1}{u} + \frac{u}{6} + o(u) \right) du = -\ln(y(t)) + \int_{y(t)}^1 \left( \frac{u}{6} + o(u) \right) du.$$

L'intégrale de droite est bien intégrable lorsque  $y(t) \rightarrow 0$  et notons  $I$  cette limite. On a alors

$$t = \int_{y(t)}^1 \frac{du}{\sin u} = -\ln(y(t)) + I + o_{t \rightarrow \infty}(1).$$

Finalement  $y(t) = e^{-t+I+o(1)}$  et on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t e^{-t+I+o_{t \rightarrow \infty}(1)} = e^I.$$

**Exercice 2.2.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$  et  $c > 0$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $|a_{n+1} - a_n| \leq ca_n^2$ . Montrer qu'il existe  $d > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \geq \frac{d}{n}$ .

**Solution 2.2.** On considère la suite  $u_n = \frac{1}{ca_n}$ . (Ce choix est motivé par l'équation différentielle  $y' = -cy^2$  qui a pour solution  $y = \frac{1}{cx}$ .) Alors

$$|u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{c} \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{ca_{n+1}a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

De plus

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right| = \frac{|a_{n+1} - a_n|}{a_n} \leq ca_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 1 + \varepsilon$$

et donc par récurrence immédiate

$$u_n \leq u_N + (n - N)(1 + \varepsilon)$$

et finalement

$$a_n = \frac{1}{cu_n} \geq \frac{1}{c(u_N + (1 + \varepsilon)(n - N))} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{c(1 + \varepsilon)n}.$$

Pour  $d' < \frac{1}{c + \varepsilon}$  et  $n$  suffisamment grand on a donc bien

$$a_n \geq \frac{d'}{n}.$$

Il est possible de choisir ensuite  $d < d'$  suffisamment petit pour que cette inégalité soit vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(Méthode 2) Montrons l'inégalité par récurrence. On a

$$a_{n+1} \geq a_n - |a_{n+1} - a_n| \geq a_n - ca_n^2$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $a_n < \frac{1}{2c}$ . La fonction  $x \mapsto x - cx^2$  est croissante sur  $] -\infty, \frac{1}{2c}]$ , donc si on suppose  $a_n \geq \frac{d}{n}$  on a

$$a_{n+1} \geq \frac{d}{n} - c \frac{d^2}{n^2}.$$

Pour terminer la preuve par récurrence il suffirait que

$$\frac{d}{n} - c \frac{d^2}{n^2} \geq \frac{d}{n+1}.$$

On a

$$\frac{d}{n} - c \frac{d^2}{n^2} = d \left( \frac{1}{n} - \frac{cd}{n^2} \right)$$

et

$$\frac{d}{n+1} = d \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Donc si  $cd < 1$  l'inégalité est bien vérifiée pour  $n$  suffisamment grand. Il existe donc  $N' \geq N$  tel que  $a_n \geq \frac{d}{n}$  pour tout  $n \geq N'$  et on peut choisir  $d$  suffisamment petit tel que ce soit vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 2.3.** Soit  $a_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $a_{n+1} = \sin(a_n)$  pour tout  $n \geq 0$ . La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

converge-t-elle?

**Solution 2.3.** Par récurrence immédiate on a  $a_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$  pour tout  $n$  et  $a_{n+1} \leq a_n$  car  $\sin(x) \leq x$  sur  $\mathbb{R}_+$ . La suite est décroissante, minorée et donc convergente. On note  $\ell$  cette limite et puisque  $\sin$  est continue on a alors  $\ell = \sin \ell$  et on en déduit que  $\ell = 0$ . Donc  $\lim a_n = 0$  et on peut écrire un développement limité

$$a_{n+1} = \sin a_n = a_n - \frac{1}{6}a_n^3 + o(a_n^3),$$

d'où

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{6} + o(1)\right) a_n^3.$$

Avant de continuer sur ce problème nous allons résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' = -\frac{1}{6}y^3.$$

On a

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{6},$$

donc

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}t + C.$$

Motivé par cette solution, on pose  $b_n = \frac{1}{a_n^2}$ , de sorte que

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)}{a_{n+1}^2 a_n^2} = \frac{a_n(a_{n+1} + a_n)}{a_{n+1}^2} \left(\frac{1}{6} + o(1)\right).$$

Puisque  $a_{n+1} = a_n + o(a_n)$  on a

$$\frac{a_n(a_{n+1} + a_n)}{a_{n+1}^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2a_n^2}{a_n^2} = 2$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}$$

Finalement

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3}n \quad \text{et donc} \quad a_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}$$

La série ne converge donc pas.

**Exercice 2.4.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  avec  $f(x) = 0$  pour tout  $x \notin [0, 1]$ . On pose pour tout  $y \in \mathbb{R}$

$$g(y) = \int_0^1 |y - x|f(x)dx.$$

Montrer que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $g''(y) = 2f(y)$ . À quelle condition a-t-on  $g$  bornée ?

**Solution 2.4.** On découpe l'intégrale en deux parties

$$g(y) = \int_y^1 (y-x)f(x)dx + \int_0^y (x-y)f(x)dx$$

et on sépare les termes

$$g(y) = y \int_y^1 f(x)dx - \int_y^1 xf(x)dx + \int_0^y xf(x)dx - y \int_0^y f(x)dx.$$

On peut alors dériver

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_y^1 f(x)dx - yf(y) + yf(y) + yf(y) - \int_0^y f(x)dx - yf(y) \\ &= \int_y^1 f(x)dx - \int_0^y f(x)dx \end{aligned}$$

et donc

$$g''(y) = 2f(y)$$

Montrons que  $g$  est bornée si et seulement si  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ . En effet sur l'intervalle  $y \in [1, +\infty[$  on a

$$g(y) = y \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx$$

qui est une fonction affine et est donc bornée ssi  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ . Pour  $y \in ]-\infty, 1]$  on a

$$g(y) = -y \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf(x)dx$$

et la conclusion reste la même.

**Exercice 2.5.** Trouver les fonctions  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt.$$

**Solution 2.5.** On considère le régime  $n \rightarrow +\infty$  et on fait un développement limité au deuxième ordre de  $f$  autour de  $x$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \left( f(x) + f'(x)(y-x) + f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} + o((y-x)^2) \right) dy \\ &= f(x) + 0 + \frac{f''(x)}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

Par identification des termes du DL, on en déduit que  $f''(x) = 0$  et donc que  $f$  est de la forme  $f(x) = ax + b$ . On peut vérifier que ceci est bien une solution.

**Exercice 2.6.**

1. Trouver l'ensemble des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  intégrables (continues) telles que

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt = 1.$$

2. Que dire si on remplace  $[0, 1]$  par  $[0, A]$  avec  $A > 1$  ?  $A < 1$  ? (En gardant les intégrales = 1 ; on ne demande plus de fournir toutes les solutions)

**Solution 2.6.** Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions  $\sqrt{f}$  et  $1/\sqrt{f}$

$$1 = \left( \int_0^1 \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = 1.$$

On a donc le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, les fonctions  $\sqrt{f}$  et  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  sont donc colinéaires. Il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in [0, 1]$

$$\sqrt{f(x)} = \frac{a}{\sqrt{f(x)}}, \quad \text{donc } f(x) = a.$$

De plus  $\int_0^1 f = a = 1$ . La fonction  $f$  est donc constante égale à 1.

Il n'y a aucune solution pour  $A > 1$  car l'inégalité précédente donne

$$A = \left( \int_0^A \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^A f(x) dx \int_0^A \frac{1}{f(x)} dx = 1.$$

Il y a par contre une infinité de solutions pour  $A < 1$ . On présente ici un exemple. Pour  $a \in ]0, \frac{1}{A}]$ , on considère la fonction affine

$$f_a(x) = a + 2 \left( \frac{1}{A^2} - \frac{a}{A} \right) x$$

Alors

$$\int_0^A f_a(x) dx = aA + \left( \frac{1}{A^2} - \frac{a}{A} \right) A^2 = 1.$$

Par ailleurs, la fonction  $\phi : a \mapsto \int_0^A \frac{1}{f_a(x)} dx$  est continue sur  $]0, \frac{1}{A}]$ , vérifie  $\phi(\frac{1}{A}) = A^2 < 1$  et  $\lim_{a \rightarrow 0} \phi(a) = \infty$ . Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un  $a$  tel  $\phi(a) = 1$  et l'énoncé est alors vérifié.

**Exercice 2.7.** Trouver l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}(f(x+y) + f(x-y)).$$

**Solution 2.7.** Tout d'abord, avec  $x = y = 0$  on a  $f(0)^2 = f(0)$  et donc  $f(0) \in \{0, 1\}$ . Si il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \neq 0$ , alors

$$f(x)f(-y) = \frac{1}{2}(f(x-y) + f(x+y)) = f(x)f(y)$$

et donc  $f(y) = f(-y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$  ( $f$  est paire). Ensuite, en dérivant deux fois par rapport à  $y$ ,

$$f(x)f''(y) = \frac{1}{2}(f''(x+y) + f''(x-y))$$

puis en prenant  $y = 0$

$$f(x)f''(0) = f''(x) \tag{2.1}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, donc on sait que l'espace des solutions est de dimension 2, engendré par deux solutions de la forme  $x \mapsto ce^{\omega x}$  pour  $\omega \in \mathbb{C}$ .

Faisons une disjonction de cas suivant la valeur de  $f(0)$  et de  $f''(0)$ .

- Si  $f(0) = 0$ , alors  $f''(0) = 0$  d'après (2.1), donc on doit résoudre  $f'' = 0$ , autrement dit  $f$  est affine, égale à 0 en zéro, donc linéaire, et paire donc  $f = 0$ .
- Si  $f(0) \neq 0$  et  $f''(0) = 0$ , alors de même  $f$  est affine, égale à 1 en zéro, paire, donc  $f = 1$ .
- Si  $f(0) \neq 0$  et  $f''(0) > 0$ , les solutions sont  $x \mapsto \frac{1}{2} \left( e^{\sqrt{f''(0)}x} + e^{-\sqrt{f''(0)}x} \right)$ , autrement dit  $x \mapsto \text{ch}(\sqrt{f''(0)}x)$ .
- Si  $f(0) \neq 0$  et  $f''(0) < 0$ , les solutions sont  $x \mapsto \frac{1}{2} \left( e^{i\sqrt{-f''(0)}x} + e^{-i\sqrt{-f''(0)}x} \right)$ , autrement dit  $x \mapsto \cos(\sqrt{-f''(0)}x)$ .

Les seules solutions possibles sont donc  $f = 0$ ,  $f = 1$ ,  $f = \text{ch}(\omega x)$  et  $f = \cos(\omega x)$ . Celles ci sont bien solutions puisque (en développant leurs expressions avec les exponentielles)

$$\begin{aligned} \cos(\omega x) \cos(\omega y) &= \frac{1}{2} (\cos(\omega(x+y)) + \cos(\omega(x-y))) \\ \text{ch}(\omega x) \text{ch}(\omega y) &= \frac{1}{2} (\text{ch}(\omega(x+y)) + \text{ch}(\omega(x-y))) \end{aligned}$$

(Autre méthode) En prenant  $y = 0$ ,  $f(x)f(0) = f(x)$ , donc soit  $f$  est identiquement nulle, soit  $f(0) = 1$ . On fait ensuite un D.L. d'ordre 2 quand  $y \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} f(x)(f(0) + yf'(0) + y^2 f''(0)/2 + O(y^3)) \\ = \frac{1}{2}(f(x) + yf'(x) + y^2 f''(x)/2 + f(x) - yf'(x) + y^2 f''(x)/2 + O(y^3)) \end{aligned}$$

et alors

$$yf'(0) + \frac{y^2}{2}(f(x)f''(0) - f''(x)) = O(y^3).$$

Finalement  $f'(0) = 0$  et  $f(x)f''(0) = f''(x)$ , et on retombe donc sur l'équation différentielle. Le reste de l'analyse se fait de la même manière.

**Exercice 2.8.** Trouver toutes les fonctions  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f(x) = \frac{n}{2} \int_{f(x) - \frac{1}{n}}^{f(x) + \frac{1}{n}} f(t) dt.$$

**Solution 2.8.** Faisons un DL autour de  $f(x)$  : en notant  $M = \sup_{t \in \mathbb{R}: |t - f(x)| \leq 1} |f'(t)|$  (qui est fini car  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ):

$$f(f(x) + u) = f(f(x)) + R(u)$$

où  $|R(u)| \leq M|u|$ . Par conséquent,

$$\int_{f(x) - \frac{1}{n}}^{f(x) + \frac{1}{n}} f(t) dt = \frac{2}{n} f(f(x)) + R_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

où  $R_2(u) \leq Mu^2/2$ . En prenant  $n \rightarrow +\infty$ , on a donc

$$f(x) = f(f(x)) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc  $f(x) = f(f(x))$  pour tout  $x$ , donc  $f(x) = x$  pour tout  $x \in f(\mathbb{R})$ . Comme  $f$  est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle  $(a, b)$  (qui peut être ouvert ou fermé en  $a$  et  $b$ , et  $a$  et  $b$  peuvent être infinis ou finis). Montrons que c'est soit tout  $\mathbb{R}$ , soit un singleton.

Si c'est un singleton  $\{a\}$ , cela signifie  $f(x) = a$ , ce qui est bien solution quel que soit  $a$ .

Sinon, posons  $a = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  et supposons  $a > -\infty$ . Il existe  $b > a$  tel que  $]a, b[ \subset f(\mathbb{R})$ , et pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f(x) = x$ , donc  $f'(x) = 1$ . Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc en  $a$ , on a aussi  $f'(a) = 1$ . Un D.L. au voisinage de  $a$  donne  $f(a - \varepsilon) = a - \varepsilon + o(\varepsilon^2)$ , donc  $f$  prend des valeurs strictement inférieures à  $a$ , ce qui contredit l'hypothèse  $a > -\infty$ . En raisonnant de même pour  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ , on en déduit  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  et donc  $f(x) = x$  pour tout  $x$ .

**Exercice 2.9.** Soit  $f$  une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui tend vers 0 en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , telle que la famille  $(f, x \mapsto f(x+1), x \mapsto f(x+2))$  est liée. Montrez que  $f = 0$ .

**Solution 2.9.** Supposons qu'il existe  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  (non tous nuls) tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda_0 f(x) + \lambda_1 f(x+1) + \lambda_2 f(x+2) = 0.$$

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , alors on a directement  $f = 0$  et la même chose si  $\lambda_0 = \lambda_2 = 0$  ou  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ .

Si  $\lambda_2 = 0$  et  $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$ , alors  $f(x+1) = \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) f(x)$  et par récurrence immédiate

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x+k) = \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^k f(x)$$

S'il existe  $x$  tel que  $f(x) \neq 0$ , on obtient une suite qui ne converge pas vers 0 en  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Absurde, donc  $f = 0$ . Le raisonnement est le même si  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_0, \lambda_2 \neq 0$  ou  $\lambda_0 = 0$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ .

Si  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} f(x+1) \\ f(x+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0/\lambda_2 & -\lambda_1/\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(x+1) \end{pmatrix}$$

Notons  $A$  cette matrice. Si elle a deux racines distinctes, alors  $A$  est diagonalisable (son polynôme annulateur est scindé à racines simples), et on peut écrire

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x+k) = a\alpha_1^k + b\alpha_2^k$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  les valeurs propres de  $A$ . Comme précédemment, si  $f \neq 0$  on obtient une suite qui ne converge pas vers 0 en  $+\infty$  ou  $-\infty$  ce qui est absurde.

Ne reste que le cas où les deux valeurs propres sont égales, auquel cas  $A$  est trigonalisable :

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}$  est la seule valeur propre et  $\beta \in \mathbb{C}$ . Comme  $\det(A) = \lambda_0/\lambda_2 = \alpha^2$ , on a  $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = 0$ , ce qui correspond à un cas déjà traité, donc on peut supposer  $\alpha \neq 0$ . On peut alors calculer les puissances de  $A$  : par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}\beta \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2.2}$$

et par ailleurs

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-2}\beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc de même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^{-n} = P \begin{pmatrix} \alpha^{-n} & -n\alpha^{-n-1}\beta \\ 0 & \alpha^{-n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Autrement dit, l'équation (2.2) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . En notant  $(e_1, e_2)$  la base dans laquelle  $A$  est trigonale, si  $X = a_1e_1 + a_2e_2$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$A^n X = \alpha^n(a_1 + a_2n\beta/\alpha)e_1 + \alpha^n a_2 e_2.$$

Par conséquent,  $A^n X \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  implique  $a_2 = 0$  (via la coordonnée selon  $e_2$ ) puis  $a_1 = 0$  (via celle selon  $e_1$ ), autrement dit  $X = 0$ , ce qui implique  $f = 0$ .

Remarque : Plutôt que de raisonner avec des matrices il est aussi possible de définir les suites  $u_n = f(n+x)$  et  $v_n = f(x-n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Et on a une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$\lambda_0 u_n + \lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 u_{n+2} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 v_{n+2} + \lambda_1 v_{n+1} + \lambda_2 v_n = 0.$$

Il s'agit ensuite de considérer les racines des polynômes associés et leurs relations ainsi que les conditions initiales pour  $u_n$  et  $v_n$ . Les calculs sont les mêmes que pour les matrices.

**Exercice 2.10.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x_{n,N} \in \mathbb{R}$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $N \in \mathbb{N}$ ) tels que

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,N} = \alpha.$$

Montrer qu'il existe une suite  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs entières telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,N_n} = \alpha.$$

**Solution 2.10.** D'après l'énoncé, il existe une suite  $(C_k)_{k \geq 0}$  tel que

$$\forall n \geq C_k \quad |x_{n,k} - \alpha| < 2^{-k}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer  $C_k$  à valeurs entières, croissante et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} C_k = +\infty$ . À  $n$  fixé, soit  $k_n$  l'unique entier tel que  $C_{k_n} \leq n < C_{k_n+1}$ . On pose alors  $N_n = C_{k_n}$ , de sorte que

$$|x_{n,N_n} - \alpha| = |x_{n,C_{k_n}} - \alpha| < 2^{-k_n}.$$

De plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$  car pour tout  $n \geq C_k$ ,  $k_n \geq k$ . On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n,N_n} = \alpha.$$

**Exercice 2.11.** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que  $u_1 > 0$  et  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 2$ . Supposons que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

diverge.

1. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(u_1 + \dots + u_n)^2}$$

converge.

2. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{u_1 + \dots + u_n}$$

diverge.

3. Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que pour toute suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  de réels qui satisfait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 < +\infty$$

la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

converge. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$$

converge.

**Solution 2.11.** On note  $S_n = u_1 + \dots + u_n$ .

1. Pour tout  $n \geq 2$  on a  $S_n \geq S_{n-1}$  et donc

$$\frac{u_n}{S_n^2} \leq \frac{u_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

On obtient donc une suite télescopique, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{u_1} + \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_N} \leq \frac{1}{u_1} + \frac{1}{S_1} < +\infty.$$

La série est donc convergente. (Remarque : En faisant une analogie  $y \leftrightarrow S_n$  et  $y' \leftrightarrow u_n$ , on peut également associer la série à l'intégrale  $\sum \frac{u_n}{S_n^2} \leftrightarrow \int \frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{y}$ . Ceci donne une motivation pour poser et analyser la suite  $\frac{1}{S_n}$ .)

2. Fixons  $M \geq 1$ . Alors pour  $N > M$ , puisque  $S_n \leq S_N$

$$\sum_{n=M}^N \frac{u_n}{S_n} \geq \sum_{n=M}^N \frac{u_n}{S_N} = \frac{1}{S_N} (S_N - S_M) = 1 - \frac{S_M}{S_N}$$

et comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  diverge, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour  $N \geq N_0$ ,  $\frac{S_M}{S_N} \leq \frac{1}{2}$  et donc

$$\sum_{n=M}^N \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{2}.$$

On peut donc trouver une suite d'entier  $M_1 < M_2 < \dots$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=M_k}^{M_{k+1}-1} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$\sum_{n=1}^{M_\ell} \frac{u_n}{S_n} \geq \sum_{n=M_1}^{M_2-1} \frac{u_n}{S_n} + \dots + \sum_{n=M_{\ell-1}}^{M_\ell-1} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

La série est donc divergente.

(Autre méthode) Par la comparaison série-intégrale : Soit  $n \geq 2$ , pour tout  $x \in [S_{n-1}, S_n]$ ,  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{S_{n-1}}$  et donc

$$\frac{u_n}{S_{n-1}} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x} dx = \ln S_n - \ln S_{n-1}.$$

On a alors que

$$\sum_{n=2}^N \frac{u_n}{S_{n-1}} \geq \ln S_N - \ln S_1$$

et donc que la série

$$\sum_{n=2}^N \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

diverge. Il reste à comparer cette série avec celle de l'énoncé. On peut distinguer deux cas :

(A) si  $u_n > S_{n-1}$ , alors

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{u_n}{S_{n-1} + u_n} \geq \frac{1}{2},$$

(B) si  $u_n \leq S_{n-1}$ , alors

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{u_n}{S_{n-1} + u_n} \geq \frac{1}{2} \frac{u_n}{S_{n-1}}.$$

On sépare la série en deux parties

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n} = \sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{u_n}{S_n} + \sum_{n \in \mathcal{B}} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{2} \times |\mathcal{A}| + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{B}} \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

Si  $|\mathcal{A}| = \infty$  alors la série diverge. Sinon, il existe  $n_0 \geq 2$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $n \in \mathcal{B}$  alors

$$\sum_{\mathcal{B}} \frac{u_n}{S_{n-1}} \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

qui diverge également. (Même remarque que précédemment : on peut faire l'analogie de la série et l'intégrale  $\sum \frac{u_n}{S_n} \leftrightarrow \int \frac{y'}{y} = \ln y$ . Ceci donne une motivation pour poser et analyser la suite  $\ln S_n$ .)

3. On raisonne par l'absurde et on suppose que la série de terme général  $x_n^2$  diverge. On pose alors  $y_n = \frac{x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . D'après la question 1, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}$$

est convergente et par la question 2 la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

est divergente. Absurde.

**Exercice 2.12.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = 0$  pour  $|x| > 3$ . Montrer que

$$\left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right)^4 \leq 4 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right).$$

**Solution 2.12.** Par l'inégalité triangulaire,

$$f^2(x) = \int_{-4}^x (f^2(y))' dy = 2 \int_{-4}^x f(y) f'(y) dy \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| |f'(y)| dy,$$

donc si

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f^2(x) = M^2$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$M^2 \leq 2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Exercice 2.13.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , positive, telle que  $f''(x)$  soit bornée. Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)|^2 \leq C f(x).$$

**Solution 2.13.** Puisque  $f$  est positive, on peut écrire pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  la formule de Taylor Lagrange avec reste intégrale

$$0 \leq f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + (y-x)^2 \int_0^1 (1-t)f''(ty + (1-t)y) dt$$

et donc

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) + (y-x)f'(x) + (y-x)^2 \frac{M}{2}$$

avec

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en  $y$ . Puisque celui ci est positif, son discriminant est négatif et on a

$$(f'(x))^2 - 2f(x)M \leq 0.$$

(Autre méthode) Soit  $x \in \mathbb{R}$  et supposons que  $f'(x) < 0$ . On a pour tout  $t \geq 0$

$$f''(x+t) \leq M$$

donc

$$f'(x+t) \leq f'(x) + Mt$$

et donc

$$f(x+t) \leq f(x) + tf'(x) + \frac{1}{2}Mt^2$$

On choisit  $t = -\frac{f'(x)}{M}$  et on a alors

$$0 \leq f(x+t) \leq f(x) - \frac{f'(x)^2}{2M}$$

ce qui donne  $f'(x)^2 \leq 2Mf(x)$ . Si  $f'(x) > 0$  on fait le même raisonnement mais en considérant  $t \leq 0$ .

**Exercice 2.14.** Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$y_n = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$$

satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**Solution 2.14.** On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + y_n.$$

Les premiers termes sont donnés par

$$x_1 = \frac{1}{2}x_0 + y_0, \quad x_2 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + y_1, \quad x_3 = \frac{1}{8}x_0 + \frac{1}{4}y_0 + \frac{1}{2}y_1 + y_2$$

et par récurrence immédiate on montre que

$$x_n = \frac{1}{2^n}x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1-k}}y_k.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ , il existe  $M$  tel que pour tout  $k \geq M$ ,  $|y_k| \leq \varepsilon$ . On a donc pour tout  $n \geq M+1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1-k}}y_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{1}{2^{n-1-k}}y_k + \sum_{k=M}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1-k}}y_k \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^M 2^{k+1}y_k \right| + \sum_{k=M}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1-k}}|y_k| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=1}^M 2^{k+1}y_k \right| + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1-M} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$  et le deuxième terme est borné par  $\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\varepsilon$ . Il existe donc  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1-k}} y_k \right| \leq 3\varepsilon.$$

(Autre méthode) Il existe  $M$  tels que pour  $n \geq M$ ,

$$\frac{1}{2}x_n - \varepsilon < x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n + \varepsilon.$$

Montrons par récurrence que pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2^j}x_N - 2\varepsilon < x_{N+j} < \frac{1}{2^j}x_N + 2\varepsilon.$$

Ceci est vrai pour  $j = 1$ . Pour l'hérédité on écrit

$$x_{N+j+1} < \frac{1}{2}x_{N+j} + \varepsilon < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^j}x_N + 2\varepsilon \right) + \varepsilon = \frac{1}{2^{j+1}}x_N + 2\varepsilon$$

ce qui donne la première inégalité. On a également,

$$x_{N+j+1} > \frac{1}{2}x_{N+j} - \varepsilon > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^j}x_N - 2\varepsilon \right) - \varepsilon = \frac{1}{2^{j+1}}x_N - 2\varepsilon.$$

Prenons alors  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\frac{|x_N|}{2^{j_0}} < \varepsilon,$$

alors pour  $n \geq N + j_0$ ,

$$|x_n| < 3\varepsilon.$$

**Exercice 2.15.** Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

**Solution 2.15.** On remarque que

$$4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2} - 7 = 4(x_n - 1) + 2(x_{n-1} - 1) + x_{n-2} - 1 = 4\tilde{x}_n + 2\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-2}$$

où  $\tilde{x}_n = x_n - 1$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4\tilde{x}_n + 2\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-2}) = 0.$$

et il faut démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0.$$

Commençons par considérer une variante plus simple de l'exercice où pour tout  $n \geq 2$

$$4\tilde{x}_n + 2\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-2} = 0.$$

On résout alors l'équation associée

$$4q^2 + 2q + 1 = 0$$

qui admet deux racines

$$q_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$$

Les suites solutions de la relation de récurrence d'ordre 2 sont de la forme

$$\tilde{x}_n = \alpha q_+^n + \beta q_-^n$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Ici puisque  $|q_+| = |q_-| = \sqrt{\frac{1+3}{16}} = \frac{1}{2} < 1$  on bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0.$$

Revenons à l'énoncé initiale et soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition, il existe  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,

$$|4\tilde{x}_n + 2\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-2}| \leq \varepsilon.$$

et donc par l'inégalité triangulaire

$$\forall n \geq N \quad |\tilde{x}_n| \leq \frac{1}{2}|\tilde{x}_{n-1}| + \frac{1}{4}|\tilde{x}_{n-2}| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Puisque  $1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , il existe  $q \in ]0, 1[$  tel que  $q^2 > \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}$ . On montre maintenant qu'il existe  $C$  tel que pour  $j \geq 0$

$$|\tilde{x}_{N+j}| \leq Cq^j + \varepsilon \tag{2.3}$$

On raisonne par récurrence. Quitte à choisir  $C$  suffisamment grand ceci est vrai pour  $j = 0$  et  $j = 1$ . Pour l'hérédité

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_{N+j+1}| &\leq \frac{1}{2}|\tilde{x}_{N+j}| + \frac{1}{4}|\tilde{x}_{N+j-1}| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{1}{2}(Cq^j + \varepsilon) + \frac{1}{4}(Cq^{j-1} + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq Cq^{j-1} \left( \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} \right) + \varepsilon \\ &\leq Cq^{j+1} + \varepsilon \end{aligned}$$

Puisque  $|q| < 1$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} q^j = 0$  et il existe donc  $J \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N + J$ ,

$$|\tilde{x}_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

**Exercice 2.16.** Soit un réel  $\beta > 1/2$ .

1. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \leq \frac{2\beta}{2\beta - 1}.$$

2. Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |\sigma - n^2|)^{\beta}} \leq C.$$

**Solution 2.16.**

1. Par comparaison somme-intégrale on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{2\beta}} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\beta}} = 1 + \frac{1}{2\beta-1} = \frac{2\beta}{2\beta-1}.$$

2. Si  $\sigma \leq 1$ , alors  $|\sigma - n^2| = n^2 - \sigma$  et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |\sigma - n^2|)^\beta} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} = C,$$

avec la question précédente. Supposons maintenant  $\sigma > 1$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{(1+|x^2-\sigma|)^\beta}$  est croissante sur l'intervalle  $] -\infty, \sqrt{\sigma}]$  et décroissante sur  $[\sqrt{\sigma}, +\infty[$ . Donc par comparaison somme-intégrale on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |n^2 - \sigma|)^\beta} &\leq \sum_{n=1}^{[\sqrt{\sigma}]-1} \frac{1}{(1 + |n^2 - \sigma|)^\beta} + \sum_{n=[\sqrt{\sigma}]}^{[\sqrt{\sigma}]+1} \frac{1}{(1 + |n^2 - \sigma|)^\beta} + \sum_{n=[\sqrt{\sigma}]+2}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |n^2 - \sigma|)^\beta} \\ &\leq \int_1^{[\sqrt{\sigma}]} \frac{dx}{(1 + |x^2 - \sigma|)^\beta} + \int_{[\sqrt{\sigma}]+1}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + |x^2 - \sigma|)^\beta} + 2 \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + |x^2 - \sigma|)^\beta} + 2 \end{aligned}$$

L'intégrale est toujours bien définie. On réalise alors le changement de variable  $s = \frac{x^2}{\sigma}$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + |x^2 - \sigma|)^\beta} &= \int_{\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\sqrt{\sigma} ds}{\sqrt{s}(1 + \sigma|s - 1|)^\beta} \\ &= \int_{\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s(\frac{1}{\sigma} + |s - 1|)}(1 + \sigma|s - 1|)^{\beta-\frac{1}{2}}} \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s|s - 1|}(1 + |s - 1|)^{\beta-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

car  $\sigma \geq 1$ . L'intégrande est intégrable en 0, 1 et  $+\infty$ , donc cette intégrale est finie et ne dépend plus de  $\sigma$ .

**Exercice 2.17.** Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}.$$

**Solution 2.17.** On pose

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) e^{-x^2} dx.$$

Alors

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

et par dérivation sous l'intégrale

$$f'(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) x e^{-x^2} dx$$

où on utilise que  $|\sin(xt)xe^{-x^2}| \leq |x|e^{-x^2}$  qui est bien intégrable. Par intégration par parties,

$$f'(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cos(xt) e^{-x^2} dx = -\frac{t}{2} f(t).$$

Il reste à donc résoudre l'équation différentielle linéaire suivante

$$f'(t) = -\frac{t}{2} f(t), \quad f(0) = \sqrt{\pi}.$$

On pose  $g(t) = f(t)e^{t^2/4}$ , et auquel cas

$$g'(t) = (f'(t) + \frac{t}{2} f(t)) e^{t^2/4} = 0,$$

Donc  $g$  est constante et  $g(0) = \sqrt{\pi}$  et finalement  $f(t) = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$ .

**Exercice 2.18.** Soient  $a < b$  deux réels.

1. Montrer que pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^0([a, b])$  telle que  $\varphi''(x) > 0$  et  $|\varphi'(x)| \geq 1$ , pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

2. Montrer que pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^0([a, b])$  telle que  $\varphi''(x) \geq 1$  et pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{\lambda}}.$$

**Solution 2.18.**

1. On écrit

$$\cos(\lambda\varphi(x)) = \frac{1}{\lambda\varphi'(x)} \frac{d}{dx} (\sin(\lambda\varphi(x)))$$

et donc par intégration par parties

$$\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx = \left[ \frac{\sin(\lambda\varphi(x))}{\lambda\varphi'(x)} \right]_a^b - \int_a^b \sin(\lambda\varphi(x)) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\lambda\varphi'(x)} \right) dx.$$

Puisque  $|\varphi'(x)| \geq 1 \geq |\sin(\lambda\varphi(x))|$  on a

$$\left| \left[ \frac{\sin(\lambda\varphi(x))}{\lambda\varphi'(x)} \right]_a^b \right| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Grâce aux hypothèses  $\varphi''(x) > 0$  et  $|\varphi'(x)| \geq 1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin(\lambda\varphi(x)) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\lambda\varphi'(x)} \right) dx \right| &= \left| \int_a^b \sin(\lambda\varphi(x)) \frac{\varphi''(x)}{\lambda(\varphi'(x))^2} dx \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{\varphi''(x)}{\lambda(\varphi'(x))^2} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{\lambda\varphi'(x)} \right]_a^b \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

On peut alors conclure

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} = \frac{4}{\lambda}.$$

2. Supposons qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ . Pour  $\delta > 0$  à choisir, on décompose l'intégrale en trois parties.

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx &= \int_a^{\max(c-\delta, a)} \cos(\lambda\varphi(x)) dx \\ &\quad + \int_{\max(c-\delta, a)}^{\min(c+\delta, b)} \cos(\lambda\varphi(x)) dx \\ &\quad + \int_{\min(c+\delta, b)}^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi'' \geq 1$ , on a

$$\forall x \in ]a, b[ \quad |\varphi'(x)| \geq |x - c|.$$

et donc que  $|\varphi'(x)| \geq \delta$  pour tout  $x$  tel que  $|x - c| \geq \delta$ . On peut appliquer la question 1 à  $\varphi(x)/\delta$  pour obtenir que

$$I_1 = \int_a^{\max(c-\delta, a)} \cos\left(\delta\lambda \frac{\varphi(x)}{\delta}\right) dx \leq \frac{4}{\delta\lambda}.$$

tout  $\lambda > 0$ . Par le même raisonnement on a  $I_3 \leq \frac{4}{\delta\lambda}$ . On a aussi directement

$$I_2 \leq \int_{\max(c-\delta, a)}^{\min(c+\delta, b)} |\cos(\lambda\varphi(x))| dx \leq 2\delta$$

Finalement on a

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{8}{\delta\lambda} + 2\delta.$$

Il reste à choisir  $\delta$  qui minimise le membre de droite, c'est à dire poser  $\delta = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$  et on obtient bien

$$\left| \int_a^b \cos(\lambda\varphi(x)) dx \right| \leq \frac{4}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{\sqrt{\lambda}} = \frac{8}{\sqrt{\lambda}}.$$

Ceci termine le cas où il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ . Pour le cas général on définit  $I_2$  comme l'intégrale sur l'intervalle  $\{x : |\varphi'(x)| \leq \delta\}$  et le reste de la preuve ne change pas.

**Exercice 2.19.**

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $[-\pi, \pi]$  :

$$x''(t) - x(t) = \cos(2t).$$

2. Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que  $f(t) = 0$  si  $|t| \geq C$ . Montrer qu'il existe une solution à l'équation

$$x''(t) - x(t) = f(t)$$

telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ .

**Solution 2.19.** \_

1. On commence par chercher une solution particulière de la forme  $A \cos(2t)$ .

$$-4A \cos(2t) - A \cos(2t) = \cos(2t)$$

et donc  $x_p(t) = -\frac{1}{5} \cos(2t)$  est une solution. Les solutions de l'équation homogène

$$x_h''(t) - x_h(t) = 0$$

sont données par  $H = \{Be^t + Ce^{-t}, B, C \in \mathbb{R}\}$ . L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{ -\frac{1}{5} \cos(2t) + Be^t + Ce^{-t}, B, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Il existe une solution particulière à l'équation

$$y_p''(t) - y_p(t) = f(t).$$

L'astuce de l'exercice est de ne pas chercher à calculer cette solution sur l'intervalle. Par contre,  $y_p$  satisfait  $y_p'' - y_p = 0$  sur  $[C, \infty[$  et donc il existe  $\alpha_+, \beta_+ \in \mathbb{R}$  tels que

$$y_p(t) = \alpha_+ e^t + \beta_+ e^{-t}$$

pour tout  $t \in [C, \infty[$ . De même il existe  $\alpha_-, \beta_- \in \mathbb{R}$  tels que

$$y_p(t) = \alpha_- e^t + \beta_- e^{-t}$$

pour tout  $t \in ]-\infty, C]$ . On peut lui ajouter une solution homogène : pour tout  $B, C \in \mathbb{R}$

$$y(t) = y_p(t) + Be^t + Ce^{-t}$$

est également solution de l'équation différentielle. On choisit alors  $B = -\alpha_+$  et  $C = -\beta_-$  pour obtenir

$$y(t) = \begin{cases} (\alpha_- - \alpha_+)e^t & \text{si } t \in ]-\infty, -C] \\ y_p(t) - \alpha_- e^t - \beta_- e^{-t} & \text{si } t \in [-C, C] \\ (\beta_+ - \beta_-)e^{-t} & \text{si } t \in [C, \infty[ \end{cases}$$

et cette fonction satisfait bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0.$$

**Exercice 2.20.** Soit  $\gamma \in (0, 1]$ . Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs. On suppose que

$$\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}.$$

Montrer qu'il existe  $D > 0$  tel que

$$\forall n \geq 1 \quad x_n \leq D n^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Que se passe-t-il pour  $\gamma = 0$  ?

**Solution 2.20.** On raisonne par récurrence. Pour  $n = 1$  il faut que  $x_1 \leq D$ . Pour l'hérédité, supposons  $x_n \leq Dn^{\frac{1}{\gamma}}$  et alors

$$x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma} \leq Dn^{\frac{1}{\gamma}} + D^{1-\gamma}n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

On pourrait alors conclure si il existe  $D \geq x_1$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$Dn^{\frac{1}{\gamma}} + D^{1-\gamma}n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \leq D(n+1)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Puisque  $x \rightarrow x^{\frac{1}{\gamma}}$  est convexe, on a

$$(n+1)^{\frac{1}{\gamma}} \geq n^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma}n^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

et donc

$$D(n+1)^{\frac{1}{\gamma}} - Dn^{\frac{1}{\gamma}} \geq \frac{D}{\gamma}n^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Il suffit donc de choisir  $D$  tel que  $\gamma D^{-\gamma} \geq 1$ . Finalement on pose

$$D = 1 + x_1 + \gamma^{\frac{1}{\gamma}}.$$

et la preuve par récurrence fonctionne avec ce choix ci. Finalement pour le cas  $\gamma = 0$  on a  $x_{n+1} \leq 2x_n$  et donc directement  $x_n \leq 2^n x_1$ .

**Exercice 2.21.** Soit  $p > 2$  un nombre impair. Montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{p}} \right| = \sqrt{p}.$$

**Solution 2.21.** On écrit

$$\left| \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{p}} \right|^2 = \sum_{k_1=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k_1^2}{p}} \sum_{k_2=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i k_2^2}{p}} = \sum_{k_1, k_2=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(k_1^2 - k_2^2)} = \sum_{k_1, k_2=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(k_1 - k_2)(k_1 + k_2)}$$

Puisque  $e^{\frac{2\pi i}{p} \times pk} = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on peut considérer  $(k_1 - k_2)(k_1 + k_2) \pmod{p}$ . On fait le changement d'indice  $\ell = k_1 - k_2 \pmod{p}$  et  $u = k_1 + k_2 \pmod{p}$ . On a

$$2k_1 = \ell + u \pmod{p} \quad \text{et} \quad 2k_2 = u - \ell \pmod{p}$$

et donc

$$k_1 = 2^{-1}(\ell + u) \pmod{p} \quad \text{et} \quad k_2 = 2^{-1}(u - \ell) \pmod{p}$$

où on a utilisé que  $p$  est impair et donc que  $2^{-1} \pmod{p}$  existe. Finalement ce changement d'indice est bien une bijection de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$  et donc

$$\left| \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{p}} \right|^2 = \sum_{\ell=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}\ell u}$$

Par sommation de séries géométrique

$$\sum_{u=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}\ell u} = \begin{cases} p & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et finalement

$$\left| \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{p}} \right|^2 = p.$$

**Exercice 2.22.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  avec  $f'' \geq 0$  et telle qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f''(x_0) > 0$ . On note

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\} \quad \text{et} \quad C = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que pour tout  $X \in A$  et  $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\{X + \lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C \neq \emptyset$ .

**Solution 2.22.** (Remarque : Pour cet exercice il était très fortement conseillé de commencer par faire un dessin.)

Soient  $X = (x_1, x_2) \in A$  et  $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . L'objectif est de montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$g(\lambda) = f(x_1 + \lambda e_1) - (x_2 + \lambda e_2) = 0.$$

Comme  $(x_1, x_2) \in A$ , on a  $x_2 \geq f(x_1)$  donc  $g(0) \leq 0$ . Par convexité on a  $f(x_1 + \lambda e_1) \geq f(x_1) + \lambda e_1 f'(x_1)$  et donc

$$g(\lambda) \geq f(x_1) - x_2 + \lambda(e_1 f'(x_1) - e_2).$$

Si  $e_1 f'(x_1) - e_2 \neq 0$ , alors en prenant  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  en fonction de son signe,  $g(\lambda) \rightarrow +\infty$ , donc on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires.

Si  $e_1 f'(x_1) - e_2 = 0$ , si  $e_1 = 0$  on conclut car  $g(\lambda) = f(x_1) - (x_2 + \lambda e_2)$  et  $e_2 \neq 0$  donc cette fonction est positive quelque part.

Reste le cas  $e_1 f'(x_1) - e_2 = 0$  et  $e_1 \neq 0$ . Montrons que si  $g$  ne s'annule pas, alors que  $f'$  est constante. En effet, soit  $y \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_0$  tel que  $x_1 + \lambda_0 e_1 = y$ , alors  $g(\lambda_0 + \lambda) = f(y + \lambda e_1) - (x_2 + \lambda_0 e_2 + \lambda e_2)$ . Par convexité, on a encore  $f(y + \lambda e_1) \geq f(y) + \lambda e_1 f'(y)$ , et comme  $g(\lambda) < 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on doit avoir  $(e_1 f'(y) - e_2) = 0$  donc  $\frac{e_2}{e_1} = f'(y)$  et ce pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Donc  $f'$  est constante, mais c'est en contradiction avec  $f''(x_0) > 0$ .

**Exercice 2.23.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer un équivalent quand  $t \rightarrow +\infty$  de

$$A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt) x^{n-2} dx.$$

**Solution 2.23.** On vérifie que l'intégrale est bien définie pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t > 0$ . Si  $n \geq 2$ , la fonction est continue sur  $[0, 1]$  et est donc bien intégrable. Si  $n = 0$  ou  $n = 1$ , on a

$$\sin^2(xt) x^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2 t^2}{x^2} = t^2, \quad \sin^2(xt) x^{-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2 t^2}{x^1} = xt^2.$$

Dans les cas on obtient une limite finie. La fonction est donc prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$  et donc intégrable. On calcule maintenant l'équivalent en  $t \rightarrow \infty$ .

Pour  $n = 0$ , par changement de variable  $y = xt$ ,

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(xt)}{x^2} dx = t \int_0^t \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy,$$

or  $\int_0^{+\infty} \sin^2(y) y^{-2} dy < +\infty$  et donc

$$A_0(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy.$$

Ce changement de variable ne marche plus pour  $n \geq 1$  car alors  $y \rightarrow \sin^2(y) y^{n-2}$  n'est pas intégrable près de  $+\infty$ .

Pour  $n = 1$ ,  $(x, t) \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  en  $t$ , continue et intégrable sur  $]0, 1]$  en  $x$ , est dérivable par rapport à  $t$  de dérivée  $(x, t) \mapsto 2 \sin(xt) \cos(xt)$ . Cette dérivée partielle est continue

sur  $[0, 1]$  en  $x$ , continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  en  $t$ , et dominée par 2 pour tout  $t > 0$  et  $x \in [0, 1]$ , ce qui est intégrable sur  $[0, 1]$ . On peut donc dériver  $A_1$  sous l'intégrale :

$$\frac{dA_1}{dt}(t) = \int_0^1 2 \cos(xt) \sin(xt) dx = \int_0^1 \sin(2tx) dx = \frac{1}{2t}(1 - \cos(2t)).$$

Par conséquent, on obtient

$$A_1(t) = A_1(1) + \frac{\ln t}{2} + \int_1^t \frac{\cos(2s)}{2s} ds.$$

De plus, par intégration par parties on a

$$\int_1^t \frac{\cos(2s)}{2s} ds = \left[ \frac{\sin(2s)}{4s} \right]_1^t + \int_1^t \frac{\sin(2s)}{4s^2} ds = O(1),$$

et donc

$$A_1(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{2}.$$

Pour  $n \geq 2$ , comme  $\sin^2(tx) = \frac{1 - \cos(2tx)}{2}$ , on a

$$A_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{n-2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2tx) x^{n-2} dx.$$

Si  $n = 2$ , on a directement

$$A_2(t) = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{\sin(2tx)}{4t} \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{2(n-1)}.$$

Si  $n \geq 3$ , par intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2tx) x^{n-2} dx \right| &= \left| \frac{1}{2t} [\sin(2tx) x^{n-2}]_0^1 - \frac{n-2}{2t} \int_0^1 \sin(2tx) x^{n-3} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2t} + \frac{n-2}{2t} \int_0^1 1 dx. \end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  et alors comme précédemment on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_n(t) = \frac{1}{2(n-1)}$$

En conclusion

$$A_n(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} t \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy & \text{si } n = 0 \\ \frac{\ln(t)}{2} & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2(n-1)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

**Exercice 2.24.** Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy.$$

1. Montrer que  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

2. Montrer que que  $|f^{(k)}(x)| \leq k!$
3. Quels sont les  $(x, k)$  tel que  $|f^{(k)}(x)| = k!$  ?
4. Déterminer une formule explicite pour  $f^{(k)}(x)$ . On pourra utiliser  $\cos(xy) = \operatorname{Re}(e^{ixy})$ .
5. En déduire que  $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(1+x^2)^{k/2}}$ .

**Solution 2.24.**

1. Pour  $x = 0$ , on a directement  $f(0) = 1 = \frac{1}{1+0^2}$ . Pour  $x \neq 0$ , par intégration par parties on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} \partial_y \left[ \frac{\sin(xy)}{x} \right] dy = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(xy) dy$$

et de même

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(xy) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} \partial_y \left[ -\frac{\cos(xy)}{x} \right] dy = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy.$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy = \frac{1}{1+x^2}.$$

(Autre méthode : on écrit  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  et on intègre les exponentielles.)

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la dérivée partielle  $k$ -ème de  $(x, y) \mapsto e^{-y} \cos(xy)$  par rapport à  $x$  est bien définie, continue en les deux variables, et dominée par  $y \mapsto e^{-y} y^k$ , qui est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc on peut dériver sous l'intégrale :

$$f^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^k (\cos)^{(k)}(xy) dy$$

et donc

$$|f^{(k)}(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} y^k dy = k!$$

où la dernière égalité se montre facilement par récurrence.

3. On n'a égalité que si  $x = 0$  et  $k$  est pair. En effet, si  $(\cos)^{(k)}(xy) < 1$  en un  $y \geq 0$  quelconque, par comparaison on a

$$|f^{(k)}(x)| < \int_0^{+\infty} e^{-y} y^k dy = k!$$

4. On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy = \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)y} dy \right)$$

donc

$$f^{(k)}(x) = \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} (iy)^k e^{(-1+ix)y} dy \right)$$

et par intégration par parties, si  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} (iy)^k e^{(-1+ix)y} dy \right) &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{-1+ix} (iy)^k \partial_y (e^{(-1+ix)y}) dy \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{-ik}{-1+ix} \int_0^{+\infty} (iy)^{k-1} e^{(-1+ix)y} dy \right) \end{aligned}$$

et donc par récurrence

$$f^{(k)}(x) = \operatorname{Re} \left( \left( \frac{i}{1-ix} \right)^k \right) k!.$$

5. On a

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{|1-ix|^k} \leq \frac{k!}{(1+x^2)^{k/2}}.$$

**Exercice 2.25.** Soit  $a > 0$ . Montrer que

$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a} \cos(ty) dt$$

admet une limite finie quand  $R \rightarrow +\infty$  pour  $y > 0$ . On note  $f_\infty(y)$  cette limite. Déterminer un équivalent de  $f_\infty(y)$  quand  $y \rightarrow 0$ .

**Solution 2.25.** Par intégration par parties,

$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a} \partial_t \left[ \frac{\sin(ty)}{y} \right] dt = \frac{1}{y} \left( \frac{\sin(Ry)}{R^a} - \sin(y) + a \int_1^R \frac{1}{t^{a+1}} \sin(ty) dt \right)$$

et donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f_R(y) = \frac{1}{y} \left( -\sin(y) + a \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}} \sin(ty) dt \right)$$

car l'intégrale converge.

On calcule maintenant l'équivalent pour  $y \rightarrow 0$ . On a d'une part

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(y)}{y} = -1$$

et d'autre part, avec le changement de variable  $z = ty$ , on a

$$a \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}} \sin(ty) dt = ay^a \int_y^{+\infty} \frac{1}{z^{a+1}} \sin(z) dz.$$

Pour le cas  $a \in ]0, 1[$ ,  $z \rightarrow \frac{1}{z^{a+1}} \sin(z)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et on a alors

$$f_\infty(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} ay^{a-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^{a+1}} \sin(z) dz.$$

Pour le cas  $a = 1$ , avec la formule de Taylor Lagrange, on a

$$\sin(z) = z + \int_0^z (z-t)(-\sin(t)) dt = z + z^2 g(z)$$

avec  $g$  une fonction telle que  $|g(z)| \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $z$  et alors

$$\begin{aligned} \int_y^{+\infty} \frac{\sin(z)}{z^2} dz &= \int_y^1 \frac{\sin(z)}{z^2} dz + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(z)}{z^2} dz \\ &= \int_y^1 \frac{1}{z} + g(z) dz + O(1) \\ &= -\ln y + O(1) \end{aligned}$$

et donc

$$f_\infty(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

Pour le cas  $a > 1$ , par le même calcul on a

$$\int_y^{+\infty} \frac{\sin(z)}{z^{a+1}} dz = \int_y^1 \frac{1}{z^a} + \frac{g(z)}{z^{a-1}} dz + O(1) = \frac{1}{(a-1)y^{a-1}} + o\left(\frac{1}{y^{a-1}}\right) + O(1)$$

Et finalement

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_\infty(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( -\frac{\sin(y)}{y} + ay^{a-1} \int_y^{+\infty} \frac{1}{z^{a+1}} \sin(z) dz \right) = \frac{a}{(a-1)} - 1.$$

**Exercice 2.26.** Le but de l'exercice est de construire une solution non nulle pour l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) + f(x) = \frac{-f(x+1)}{1+x^2}. \quad (2.4)$$

1. Pour  $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , résoudre l'équation  $f' + f = S$ .
2. Soit  $x_0 > 0$ . On définit une suite de fonction sur  $[x_0, +\infty[$  par

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1)e^t}{1+t^2} dt.$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Montrer que cette suite est bien définie sur  $[x_0, +\infty[$ .
- (b) Montrer que si  $x_0$  est suffisamment grand,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  est définie et vérifie l'équation (2.4). Déterminer son comportement quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Solution 2.26.**

1. On cherche une solution sous la forme  $f(x) = g(x)e^{-x}$ , ce qui donne  $g'(x)e^{-x} = S(x)$  ou encore

$$g(x) = C + \int_0^x S(t)e^t dt$$

et donc

$$f(x) = Ce^{-x} + e^{-x} \int_0^x S(t)e^t dt.$$

2. (a) On montre par récurrence que  $x \rightarrow e^x f_n(x)$  est uniformément bornée sur  $[x_0, +\infty[$ . On note

$$\|e^x f\|_\infty = \sup_{x \in [x_0, \infty[} |e^x f(x)|.$$

Pour  $n = 0$  on a

$$\|e^x f_0\|_\infty = 1$$

Pour  $n \geq 0$ , on suppose  $\|e^x f_n\|_\infty < \infty$ . Pour  $x \geq x_0 > 0$  on a

$$|e^x f_{n+1}(x)| = \left| \int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1)e^t}{1+t^2} dt \right| \leq e^{-1} \|e^x f_n\|_\infty \int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

car  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Et donc  $\|e^x f_{n+1}\|_\infty < \infty$ .

- (b) Il est possible de prendre  $x_0$  tel que

$$e^{-1} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{1}{2},$$

et alors

$$\|e^x f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|e^x f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|e^x f_0\|_\infty = \frac{1}{2^n}$$

par récurrence immédiate. La série

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

est alors bien définie sur  $[x_0, +\infty[$ . Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$f'_{n+1}(x) = -f_{n+1}(x) - \frac{f_n(1+x)}{(1+x^2)}$$

et donc

$$\|e^x f'_{n+1}\|_\infty \leq \|e^x f_{n+1}\|_\infty + \|e^x f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La série des  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc uniformément convergente, donc  $g$  est dérivable sur  $[x_0, +\infty[$  de dérivée  $g'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n(x)$ . On voit alors que  $g$  vérifie l'équation (2.4) sur son domaine de définition. On a par ailleurs démontré dans la question précédente que si  $n \geq 1$  et  $x \geq x_0$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} e^{-x} e^{-1} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

et donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x})$  tandis que  $f_0 = e^{-x}$  donc on a bien  $g(x) = e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x})$ .

**Exercice 2.27.**

1. Soient  $J$  un sous ensemble fini de  $\mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  de rayon de convergence  $+\infty$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N} \setminus J$ ,  $f^{(i)}(0) = 0$  et pour tout  $j \in J$ ,  $f^{(j)}(1) = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .
2. Est-ce toujours vrai si  $J$  est infini ?

**Solution 2.27.**

1. Pour  $i \in \mathbb{N} \setminus J$  on a  $0 = f^{(i)}(0) = i!a_i$ , donc

$$f(x) = \sum_{j \in J} a_j x^j$$

et  $J$  est un ensemble fini. On prend  $j_0 = \max J$ , alors

$$0 = f^{(j_0)}(1) = j_0!a_{j_0}$$

et donc en descendant  $J$  on a  $a_j = 0$  pour tout  $j \in J$ , donc pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , et donc  $f = 0$ .

2. Non, on peut proposer le contre exemple suivant. On pose  $f(x) = \sin(\pi x)$  et  $J = \{\text{entiers impairs}\}$ , on a alors bien les propriétés demandées.

**Exercice 2.28.** Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $a < b$  tels que  $f'(x) \geq 1$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

1. Montrer que  $\int_{\mathbb{R}} f \geq \frac{(b-a)^2}{2}$ .
2. Existe-t-il une fonction pour laquelle on a l'égalité ?
3. Montrer qu'il existe une suite de telles fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \frac{(b-a)^2}{2}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Solution 2.28.**

1. On a  $f \geq 0$  donc  $f(a) \geq 0$  et donc  $f(x) \geq x - a$  pour  $x \in [a, b]$ , et alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b (x - a) dx = \frac{(b - a)^2}{2}.$$

2. Si c'est le cas, alors il faut que  $f(x) = x - a$  pour tout  $x \in [a, b]$  et 0 ailleurs, sinon l'intégrale de  $f$  serait strictement plus grande que celle de cette fonction, qui est exactement  $\frac{(b-a)^2}{2}$ . Cela implique  $f = 0$  dans  $] -\infty, a]$ , donc comme  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , cela implique  $f'(a) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $f' \geq 1$  sur  $[a, b]$ . Il y a également un problème de continuité en  $b$ , avec  $f(b^-) = b - a$  et  $f(b^+) = 0$ .

3. Pour construire un exemple explicite sur  $a = 0, b = 1$ , on peut par exemple procéder comme suit. Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit  $f_\varepsilon$  par

- $f_\varepsilon(x) = 0$  pour  $x \in ] -\infty, -2\varepsilon]$ ,
- $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\varepsilon}(x + 2\varepsilon)^2$  pour  $x \in ] -2\varepsilon, 0]$ , de sorte que  $f_\varepsilon(0) = \varepsilon, f'_\varepsilon(0) = 1$  et  $f_\varepsilon(-2\varepsilon) = f'_\varepsilon(-2\varepsilon) = 0$ ,
- $f_\varepsilon(x) = \varepsilon + x$  pour  $x \in [0, 1]$ ,
- $f_\varepsilon(x) = \alpha(1 + \cos(\frac{x-1}{\varepsilon} + \beta))$  sur  $]1, y[$ , où  $\alpha, \beta, y$  sont choisis de sorte que  $f_\varepsilon(1) = 1 + \varepsilon, f'_\varepsilon(1) = 1, f_\varepsilon(y) = f'_\varepsilon(y) = 0$  et  $1 < y \leq 1 + 2\pi\varepsilon$ ,
- $f_\varepsilon(x) = 0$  sur  $[y, +\infty[$ .

Par périodicité du cos, on peut supposer sans perte de généralité que  $\beta \in [-\pi, \pi]$ . On prend  $y$  comme le premier point où le cos vaut  $-1$ , donc  $\frac{y-1}{\varepsilon} + \beta = \pi$ , c'est-à-dire  $y = 1 + (\pi - b)\varepsilon$ , qui est bien dans  $[1, 1 + 2\pi\varepsilon]$ . Ce choix assure immédiatement le recollement de  $f_\varepsilon$  et  $f'_\varepsilon$  en  $y$  (sauf si  $\beta = \pi$ , qui impliquerait  $y = 1$ , mais c'est impossible car cela impliquerait  $f_\varepsilon(1) = 0$ ). Cherchons une solution avec  $\cos(\beta) > 0$ . Forcément  $a > 0$ . Les autres contraintes sont alors

$$\begin{cases} \alpha(1 + \cos(\beta)) = 1 + \varepsilon \\ -\frac{\alpha}{\varepsilon} \sin(\beta) = 1 \end{cases} \quad \text{ce qui est équivalent (car } \cos(\beta) > 0) \text{ à } \begin{cases} \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2} = 1 + \varepsilon \\ \sin(\beta) = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \end{cases}$$

La fonction  $\alpha \mapsto \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2}$  est strictement croissante sur  $[\varepsilon, +\infty[$ , vaut  $\varepsilon$  en  $\varepsilon$  et tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , donc comme  $\varepsilon < 1 + \varepsilon$ , par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, il existe un unique  $\alpha^* > \varepsilon$  tel que  $\alpha^* + \sqrt{(\alpha^*)^2 - \varepsilon^2} = 1 + \varepsilon$ . On prend alors  $\beta = \arcsin(-\varepsilon/\alpha^*)$ , qui est dans  $] \arcsin(-1), 0 ] = ] -\pi/2, 0 ]$ , donc vérifie bien  $\cos(\beta) > 0$ .

**Exercice 2.29.** Soit

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \sin(yr)}{(1+r)^2} dr.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer qu'elle est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ .
3. Montrer que  $x \rightarrow f(x, x)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
4. (Bonus) Est-elle  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ?

**Solution 2.29.**

1. L'intégrande est continu en  $x, y$ , et dominé par  $r \mapsto \frac{1}{(1+r)^2}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre,  $f$  est continue en  $x$  et  $y$ .
2. Par intégration par parties, pour  $x \neq 0$ , en posant

$$\begin{cases} u'(r) = \cos(xr) \\ v(r) = \frac{\sin(yr)}{(1+r)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u(r) = \frac{\sin(xr)}{x} \\ v'(r) = y \frac{\cos(yr)}{(1+r)^2} - \frac{2 \sin(yr)}{(1+r)^3} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \sin(yr)}{(1+r)^2} dr &= \frac{1}{x} \left[ \frac{\sin(xr) \sin(yr)}{(1+r)^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{y}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xr) \cos(yr)}{(1+r)^2} \\ &\quad + \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xr) \sin(yr)}{(1+r)^3} \\ &= -\frac{y}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xr) \cos(yr)}{(1+r)^2} + \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xr) \sin(yr)}{(1+r)^3}, \end{aligned}$$

et avec une seconde intégration par parties sur la première intégrale de cette dernière ligne, en posant

$$\begin{cases} u'(r) = \sin(xr) \\ v(r) = \frac{\cos(yr)}{(1+r)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u(r) = -\frac{\cos(xr)}{x} \\ v'(r) = -y \frac{\sin(yr)}{(1+r)^2} - \frac{2 \cos(yr)}{(1+r)^3} \end{cases}$$

il vient

$$\begin{aligned} -\frac{y}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xr) \cos(yr)}{(1+r)^2} &= \frac{y}{x^2} \left[ \frac{\cos(xr) \cos(yr)}{(1+r)^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{y^2}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \sin(yr)}{(1+r)^2} \\ &\quad + \frac{2y}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \cos(yr)}{(1+r)^3} \\ &= -\frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} f(x, y) + \frac{2y}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \cos(yr)}{(1+r)^3}, \end{aligned}$$

donc

$$(x^2 - y^2)f(x, y) = -y + 2x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xr) \sin(yr)}{(1+r)^3} + 2y \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xr) \cos(yr)}{(1+r)^3}.$$

Cette relation se prolonge par continuité en  $x = 0$ . Chacun des intégrandes est continu et intégrable en  $r$ , dérivable en  $x$  et  $y$ , de dérivées partielles continues en  $r$ ,  $x$  et  $y$  et dominé par  $r \mapsto \frac{r}{(1+r)^3}$ , qui est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc les deux intégrales sont dérivables en  $x$  et  $y$  (et ce pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ). En multipliant par  $\frac{1}{x^2 - y^2}$ , qui est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ , on obtient donc que  $f$  est égale à une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ , d'où le résultat.

3. Par linéarisation du produit de fonctions trigonométrique puis intégration par parties, pour  $x \neq 0$ , en posant

$$\begin{cases} u'(r) = \sin(2xr) \\ v(r) = \frac{1}{(1+r)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u(r) = -\frac{\cos(2xr)}{2x} \\ v'(r) = -\frac{2}{(1+r)^3} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x, x) &= -\frac{1}{4x} \int_0^{+\infty} \frac{\partial_r(\cos(2xr))}{(1+r)^2} dr \\ &= \left[ -\frac{1}{4x} \frac{\cos(2xr)}{(1+r)^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xr)}{(1+r)^3} dr \end{aligned}$$

et donc pour tout  $x \neq 0$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  en prolongeant par continuité,

$$xf(x, x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xr)}{(1+r)^3} dr.$$

Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on peut dériver sous l'intégrale pour tout  $x$ , donc  $xf(x, x)$  est égale à une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc en multipliant par  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , qui est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , on a montré que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

4. (Bonus) Idée de la preuve : Calculer  $\partial_y \left[ \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f(x, y) \right]$  puis prendre  $y = x + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il apparaît un problème dans la convergence de  $\partial_y f$ .

**Exercice 2.30.** On définit la fonction Rev par  $\text{Rev}(0) = 0$  et si  $P \neq 0$  est tel que  $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X]$  avec  $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,

$$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k.$$

1. Rev est-elle linéaire ? Inversible ?

2. Montrer qu'elle est inversible dans  $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X], P(0) \neq 0\}$ .

3. Déterminer les  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$ .

**Solution 2.30.**

1.  $\text{Rev}$  n'est pas linéaire. Par exemple, on a  $\text{Rev}(X) \neq \text{Rev}(X^2 + X) - \text{Rev}(X^2)$  par exemple. Elle n'est pas inversible non plus, comme par exemple  $\text{Rev}(X^2) = \text{Rev}(X) = 1$ .

2. Les contre exemples précédents fonctionnaient à cause du changement de degré. Ici on a  $\forall P \in \mathcal{Q}, \text{deg}(\text{Rev}(P)) = \text{deg}(P)$  et alors

$$\text{Rev}(\text{Rev}(P)) = \text{Rev}\left(\sum_{k=0}^{\text{deg } P} a_{\text{deg } P - k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{\text{deg } P} a_{\text{deg } P - (\text{deg } P - k)} x^k = \sum_{k=0}^{\text{deg } P} a_k x^k = P$$

ce qui implique la bijectivité.

3. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  avec

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

et  $a_n \neq 0$ . On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

et alors

$$\text{Rev}(P') = \sum_{k=0}^{n-1} ((n-1-k)+1) a_{(n-1-k)+1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_{n-k} x^k.$$

On a également

$$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k$$

et donc

$$(\text{Rev}(P))' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{n-k-1} x^k.$$

On a donc l'égalité  $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$(n-k) a_{n-k} = (k+1) a_{n-k-1}.$$

Pour  $j = n - k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , cela donne

$$j a_j = (n - j + 1) a_{j-1}$$

donc

$$a_j = \frac{(n - j + 1)}{j} a_{j-1}.$$

Par récurrence,  $a_j = a_0 \binom{n}{j}$  donc  $P = a_0(1 + X)^n$  par la formule du binôme de Newton, et ces polynômes vérifient en effet la relation. Remarques : en général, si  $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $\text{Rev}(P) = X^n P(1/X)$ . On en déduit que si  $P = a_0(1 + X)^n$ , alors  $P = \text{Rev}(P)$  et  $P' = \text{Rev}(P')$ , ce qui rend immédiat la vérification que ces  $P$  vérifient la question.

**Exercice 2.31.** On définit l'espace

$$\mathcal{W}_2 = \{f \in \mathcal{C}^\infty([1, +\infty[, \mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{N}, \|x^{2+j} f^{(j)}(x)\|_{L^\infty([1, +\infty[)} < +\infty\}.$$

Pour  $f \in \mathcal{W}_2$ , on pose

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt.$$

Montrer que  $g \in \mathcal{W}_2$ .

**Solution 2.31.** Comme  $f \in \mathcal{W}_2$ , il existe  $K > 0$  tel que  $|f(x)| \leq Kx^{-2}$  pour tout  $x \geq 1$ , et donc

$$|g(x)| \leq K \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^2} dt \leq K \frac{e^x}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt \leq \frac{K}{x^2}.$$

De plus, par intégration par partie en prenant

$$\begin{cases} u'(t) = e^{x-t} \\ v(t) = f(t) \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) = -e^{x-t} \\ v'(t) = f'(t) \end{cases}$$

on obtient

$$g(x) = [-e^{x-t} f(t)]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{x-t} f'(t) dt = f(x) + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f'(t) dt$$

et donc

$$g'(x) = f'(x) + e^x \left( -e^{-x} f'(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} f'(t) dt \right) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f'(t) dt$$

En prenant  $K > 0$  tel que  $f'(x) \leq Kx^{-3}$  pour tout  $x \geq 1$ , on a

$$\left| \int_x^{+\infty} e^{x-t} f'(t) dt \right| \leq K \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^3} dt \leq K \frac{e^x}{x^3} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt \leq \frac{K}{x^3},$$

donc  $|g'(x)| \leq \frac{K}{x^3}$ . On continue ainsi puisque par induction  $g^{(j)}(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f^{(j)}(t) dt$ .

(Autre méthode) On fait le changement de variable  $u = t - x$ , de sorte que

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f(x+u) du.$$

La fonction  $(x, u) \in [1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-u} f(x+u)$  est continue en  $u$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x$ , de dérivée  $j$ -ème selon  $x$  égale à  $e^{-u} f^{(j)}(x+u)$ , qui est continue en  $u$  et dominée par

$$u \mapsto \|f^{(j)}\|_{L^\infty([1, +\infty[)} e^{-u} \leq \|x \mapsto x^{2+j} f^{(j)}(x)\|_{L^\infty([1, +\infty[)} e^{-u},$$

qui est intégrable. On peut donc dériver sous l'intégrale autant de fois qu'on veut, ce qui montre que  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de dérivée  $j$ -ème  $g^{(j)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f^{(j)}(x+u) du$ , et donc

$$\begin{aligned} |g^{(j)}(x)| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{(x+u)^{2+j} |f(x+u)|}{(x+u)^{2+j}} e^{-u} du \\ &\leq \frac{\|y \mapsto y^{2+j} f^{(j)}(y)\|_{L^\infty([1, +\infty[)}}{x^{2+j}} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{\|x \mapsto x^{2+j} f^{(j)}(x)\|_{L^\infty([1, +\infty[)}}{x^{2+j}}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.32.** Soit  $A \in \mathbb{R}$ . On définit

$$X_A := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f(x) \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ et} \\ \exists g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}_+ f(x) = g(x)g(x+A) \text{ avec } g(x) \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty\}.$$

1. Montrer que si  $f > 0$  et  $|f(x) - 1| \leq \frac{K}{(1+x)^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , alors  $f \in X_A$  pour tout  $A > 0$ .
2. Décrire  $X_0$ .
3. Si  $f(0) < 0$ , montrer qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $f \notin X_\varepsilon$  si  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ .

**Solution 2.32.**

1. Analyse: Supposons  $f \in X_A$ , il existe alors une fonction  $g$  telle que  $f(x) = g(x)g(x+A)$ . On a également  $f(x+A) = g(x+A)g(x+2A)$  et donc si  $f(x+A) \neq 0$ ,

$$g(x) = \frac{f(x)}{g(x+A)} = \frac{f(x)}{f(x+A)}g(x+2A).$$

On peut itérer cette relation

$$g(x+2A) = \frac{f(x+2A)}{f(x+3A)}g(x+4A), \quad \text{donc} \quad g(x) = \frac{f(x)}{f(x+A)} \frac{f(x+2A)}{f(x+3A)}g(x+4A)$$

Par récurrence immédiate on a alors

$$g(x) = \left( \prod_{k=0}^n \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \right) g(x+2nA)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . On considère la limite  $n \rightarrow \infty$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x+2nA) = 1$  et il reste à montrer que la limite du produit est bien également définie. Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$  on a

$$|f(x+kA) - 1| \leq \frac{C}{k^2} < \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\ln \prod_{k=0}^n \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} = \sum_{k=0}^{k_0} \ln \left( \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \right) + \sum_{k=k_0+1}^n \ln \left( \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \right).$$

Le premier terme est une constante (et borné car  $f > 0$ ) et pour deuxième terme, puisque  $|\ln(1+x)| \leq 2|x|$  sur  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  on a

$$\sum_{k=k_0+1}^n \left| \ln \left( \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \right) \right| \leq 2C \sum_{k=k_0+1}^n \left( \frac{1}{(2k)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$$

qui est bien sommable pour  $n \rightarrow \infty$ . On pose alors

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=0}^n \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)}.$$

Synthèse : Vérifions qu'un tel  $g$  convient. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} g(x)g(x+A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=0}^n \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \prod_{k=0}^n \frac{f(x+(2k+1)A)}{f(x+(2k+2)A)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x+(2n+2)A)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ensuite, en reprenant les calculs précédents on a pour tout  $x$  suffisamment grand

$$|\ln g(x)| \leq 2C \sum_{k \geq x} \left( \frac{1}{(2k)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\ln g(x)| = 0$  car la série est sommable. Enfin en notant  $h_k(x) = \ln \left( \frac{f(x+2kA)}{f(x+(2k+1)A)} \right)$  on

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|h_k\|_{\infty} \leq 2C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2k)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} \right) < \infty.$$

La fonction  $\ln g(x)$  est continue comme limite de fonctions continues uniformément convergente.

- Il s'agit des fonctions continues positives de limite 1 en  $+\infty$  : si  $f$  est une telle fonction, on peut prendre  $g = \sqrt{f}$ , et réciproquement toute fonction de la forme  $f = g^2$  avec  $g$  continue et  $g \rightarrow 1$  en  $+\infty$  est continue, positive et tend vers 1 en  $+\infty$ .
- Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) < 0$ . Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  telle pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X_{\varepsilon_n}$ , et notons  $g_n$  les fonctions associées, de sorte que  $f(x) = g_n(x)g_n(x + \varepsilon_n)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 > f(0) = g_n(0)g_n(\varepsilon_n)$ , donc  $g_n(0)$  et  $g_n(\varepsilon_n)$  n'ont pas le même signe. Par le théorème des valeurs intermédiaire,  $g_n$  s'annule donc quelque part dans  $[0, \varepsilon_n]$ , disons en  $\nu_n$ , et alors  $f(\nu_n) = 0$ . On construit ainsi une suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\nu_n \rightarrow 0$  telle que  $f(\nu_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $f(0) = 0$  par continuité de  $f$ , ce qui est une contradiction.

**Exercice 2.33.** Pour  $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  continue, on définit

$$F(g)(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} g(x+t) dx.$$

- Montrer que  $F(g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  est continue, bornée et que  $\int_{\mathbb{R}} [F(g)](t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$ .
- Montrer que  $F(g)$  est dérivable deux fois et calculer sa dérivée seconde.
- Question bonus : montrer que si de plus  $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ,  $g \neq 0$  et  $g$  décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  et croissante sur  $\mathbb{R}_-$ , alors  $\|F(g)\|_{\infty} < \|g\|_{\infty}$ .

**Solution 2.33.**

- Avec le changement de variable  $x-t$ , l'intégrande est continu en  $x$  et  $t$ , dominé par  $x \mapsto g(x)$ , qui est continue et intégrable, donc l'intégrale est une fonction continue de  $t$ . Pour la même raison, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$F(g)(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g(x+t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

et donc  $t \rightarrow F(g)(t)$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$ . Enfin, comme  $g$  et  $\exp$  sont des fonctions continues positives, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F(g)(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} g(x+t) dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x+t) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \left( \int_{\mathbb{R}} g(u) du \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}} g(u) du \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(u) du \end{aligned}$$

2. On fait le changement de variable  $y = x + t$ ,

$$\begin{aligned} 2F(g)(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|y-t|} g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^t e^{y-t} g(y) dy + \int_t^{+\infty} e^{t-y} g(y) dy \\ &= e^{-t} \int_{-\infty}^t e^y g(y) dy + e^t \int_t^{+\infty} e^{-y} g(y) dy. \end{aligned}$$

Tout est dérivable, et on a alors

$$\begin{aligned} 2F(g)'(t) &= e^{-t} \left( - \int_{-\infty}^t e^y g(y) dy + e^t g(t) \right) + e^t \left( \int_t^{+\infty} e^{-y} g(y) dy - e^{-t} g(t) \right) \\ &= -e^{-t} \int_{-\infty}^t e^y g(y) dy + e^t \int_t^{+\infty} e^{-y} g(y) dy. \end{aligned}$$

Ceci est encore une fois dérivable et de dérivée

$$\begin{aligned} 2F(g)''(t) &= -e^{-t} \left( - \int_{-\infty}^t e^y g(y) dy + e^t g(t) \right) + e^t \left( \int_t^{+\infty} e^{-y} g(y) dy - e^{-t} g(t) \right) \\ &= \int_{-\infty}^t e^{y-t} g(y) dy + \int_t^{+\infty} e^{t-y} g(y) dy - 2g(t) \\ &= 2F(g)(t) - 2g(t). \end{aligned}$$

On a donc  $F(g)'' = F(g) - g$ .

3. Question bonus : soit  $\varepsilon \in ]0, \|g\|_{\infty}[$  (il en existe un car  $g \neq 0$  donc  $\|g\|_{\infty} \neq 0$ ). Soit  $M$  l'ensemble des points où  $g \geq \|g\|_{\infty} - \varepsilon$ . C'est un intervalle qui contient 0 au vu des propriétés de croissance/décroissance de  $g$ , et il est borné car  $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  et

$$\int_{\mathbb{R}} g \geq \int_M g \geq (\|g\|_{\infty} - \varepsilon) \text{Diam}(M).$$

On a donc

$$\begin{aligned} |F(g)|(t) &\leq \frac{\|g\|_{\infty} \int_M e^{-|x|} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx} + \frac{(\|g\|_{\infty} - \varepsilon) \int_{\mathbb{R} \setminus M} e^{-|x|} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx} \\ &= \|g\|_{\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx} - \varepsilon \frac{\int_{\mathbb{R} \setminus M} e^{-|x|} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx} < \|g\|_{\infty}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.34.** Soit  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que  $|h(x)| \leq \frac{1}{1+|x|}$  et  $|h'(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right|^2 dx dy < +\infty.$$

**Solution 2.34.** On sépare l'intégrale en deux zones:  $|x - y| \leq 1$  et  $|x - y| \geq 1$ . Pour  $|x - y| \leq 1$ , on a

$$|h(x) - h(y)| \leq \left| \int_x^y h'(t) dt \right| \leq |x - y| \sup_{t \in [x, y]} |h'(t)| \leq 4 \frac{|x - y|}{1 + x^2}$$

car

$$\sup_{t \in [x, y]} |h'(t)| \leq \sup_{t \in [x-1, x+1]} |h'(t)| \leq \sup_{t \in [x-1, x+1]} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{4}{1+x^2}.$$

Par le changement de variable  $z_1 = x - y, z_2 = x + y$  on a

$$\int_{|x-y| \leq 1} \left( \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right)^2 dx dy \leq 8 \int_{z_1 \in [-1, 1]} \int_{z_2 \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{1+z_2^2} \right)^2 dz_1 dz_2 < \infty$$

Maintenant, pour  $|x - y| \geq 1$ , on a

$$\left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right| \lesssim \frac{1}{1 + |x - y|} \left( \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |y|} \right).$$

Avec le changement de variable  $z = x - y$  et en conservant  $x$  comme deuxième variable, on a

$$\int_{|x-y| \geq 1} \left( \frac{1}{1 + |x - y|} \frac{1}{1 + |x|} \right)^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |z|)^2} \frac{1}{(1 + |x|)^2} dx dz < +\infty$$

et on estime de même le terme en  $\frac{1}{1+|x-y|} \frac{1}{1+|y|}$ .

**Exercice 2.35.** Soit  $\langle x \rangle = \sqrt{1 + x^2}$ . On définit la fonction

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\langle x \rangle \langle ax \rangle} dx.$$

1. Montrer qu'elle est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que  $\frac{f(a)}{\ln(a)}$  est bornée pour  $a \in ]0, \frac{1}{2}]$ .
3. Que dire de  $f(a)$  quand  $a \rightarrow +\infty$  ?

**Solution 2.35.**

1. Pour  $a > 0$  ce qui est dans l'intégrale décroît comme  $\frac{1}{x^2}$  en  $+\infty$  donc est intégrable.
2. La fonction est continue en  $a$ , il reste donc à considérer la limite  $a \rightarrow 0$ . On a toujours

$$\frac{1}{\langle x \rangle} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\langle x \rangle} \leq 1$$

On estime

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 \frac{1}{\langle x \rangle \langle ax \rangle} dx + \int_1^{1/a} \frac{1}{\langle x \rangle \langle ax \rangle} dx + \int_{1/a}^{+\infty} \frac{1}{\langle x \rangle \langle ax \rangle} dx \\ &\leq \int_0^1 1 dx + \int_1^{1/a} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{a} \int_{1/a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &= 1 + \ln \frac{1}{a} + 1. \end{aligned}$$

Et donc  $\frac{f(a)}{\ln a} = -1 + o_{a \rightarrow 0^+}(1)$

3. Pour  $a \rightarrow +\infty$ , on estime de la même manière

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^{1/a} \frac{1}{\langle x \rangle \langle ax \rangle} dx + \int_{1/a}^{+\infty} \frac{1}{\langle x \rangle \langle ax \rangle} dx \\ &\leq \int_0^{1/a} 1 dx + \frac{1}{a} \int_{1/a}^{+\infty} \frac{dx}{x \langle x \rangle} \\ &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \left( \int_{1/a}^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{a} + \frac{\ln(a)}{a} + 1. \end{aligned}$$

**Exercice 2.36.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que  $f, f'$  et  $f''$  sont bornées.

1. Montrer que  $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$  converge uniformément vers  $f'(x)$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\frac{f((1+\varepsilon)x)-f(x)}{\varepsilon}$  converge localement vers une limite à déterminer.
3. Cette convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$ , (toujours sous la condition  $f, f'$  et  $f''$  bornées) ?

**Solution 2.36.**

1. On a

$$\left| \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} - f'(x) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} (f'(t) - f'(x)) dt \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \int_x^t |f''(s)| ds \leq \varepsilon \|f''\|_\infty$$

et donc la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

2. Pour  $x = 0$  la fraction est identiquement nulle. Si  $x \neq 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f((1+\varepsilon)x)-f(x)}{\varepsilon} = x \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon x)-f(x)}{x\varepsilon} = x f'(x)$$

par définition de la dérivée en  $x$ .

3. Prenons comme contre exemple  $f(x) = \sin(x)$ . Alors  $f, f'$  et  $f''$  sont bornées mais on a

$$\frac{\sin(x+\varepsilon x)-\sin(x)}{\varepsilon} = \sin(x) \frac{\cos(\varepsilon x)-1}{\varepsilon} + \cos(x) \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon}.$$

Cette expression ne converge pas pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $x = \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Exercice 2.37.** Une particule se déplace sur l'axe réel selon le mouvement  $x'(t) = \lambda x(t)$  pour un  $\lambda > 0$ . On commence à  $x(0) = 0$ . De plus, on se donne  $T \in \mathbb{N}$  et aux temps  $t = n$  pour  $n \leq T, n \neq 0$ , on tire une pièce équilibrée. Sur pile, alors  $x(n^+) = x(n^-) + n$  et sur face,  $x(n^+) = x(n^-) - n$ .

1. Montrer que si  $\lambda > 0$  est suffisamment grand, alors pour tout  $T \in \mathbb{N}$ ,  $x(t)$  a toujours le même signe sur  $[0, T]$ .
2. Déterminer  $\lambda^* > 0$  tel que si  $\lambda > \lambda^*$ ,  $x(t)$  a toujours le même signe (pour tout  $T$ ) et si  $\lambda < \lambda^*$ , il existe  $T \in \mathbb{N}$  tel que la probabilité de changer de signe est non nulle.
3. Que se passe-t-il si  $\lambda = \lambda^*$  ?

4. Déterminer  $Var(x(n^+))$ . (Indication : on pourra montrer que le problème est linéaire en les variables aléatoire des sauts).

**Solution 2.37.**

1. Sur l'intervalle  $[0, 1[$  on a  $x(t) = 0$ . Sur l'intervalle  $[1, 2[$  on résout  $x'(t) = \lambda x(t)$ , donc

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad \text{et} \quad x(1) = Ae^{\lambda}$$

et donc  $x(t) = x(1)e^{\lambda(t-1)}$ . De la même manière pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut résoudre  $x'(t) = \lambda x(t)$  sur  $[n, n+1[$  et on obtient

$$\forall u \in [0, 1[, \quad x(n+u) = x(n)e^{\lambda u}.$$

Et finalement après le  $n+1$  ième saut on a

$$x(n+1) = x(n)e^{\lambda} + (n+1)X_{n+1}, \quad \text{où} \quad X_{n+1} = \pm 1.$$

Par récurrence on montre alors la formule suivante

$$x(n) = \sum_{k=1}^n kX_k e^{\lambda(n-k)}.$$

En effet  $x(1) = X_1$  et pour tout  $n$

$$x(n+1) = e^{\lambda} \left( \sum_{k=1}^n kX_k e^{\lambda(n-k)} \right) + (n+1)X_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} kX_k e^{\lambda(n+1-k)}.$$

On s'intéresse au changement de signe. Supposons que le premier saut est positif  $x(1) = 1$  (le problème est symétrique et le cas  $x(1) = -1$  peut être traité de la même manière). Alors

$$x(n) = \sum_{k=1}^n kX_k e^{\lambda(n-k)} = e^{\lambda(n-1)} \left( 1 + \sum_{k=2}^n kX_k e^{-\lambda(k-1)} \right) > e^{\lambda(n-1)} \left( 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k e^{-\lambda(k-1)} \right)$$

Ce qui correspond au cas où tous les sauts suivants sont négatifs. La série du dernier terme est sommable. Du plus

$$\sum_{k=2}^{\infty} k e^{-\lambda(k-1)} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) e^{-\lambda k}$$

qui converge vers 0 pour  $\lambda \rightarrow \infty$ . Pour  $\lambda$  suffisamment grand, on a alors que  $x(n) > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et donc  $x(t) > 0$  pour tout  $t \geq 1$ .

2. La série précédente est strictement monotone en  $\lambda$ . Il existe donc un unique  $\lambda^*$  tel que

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty} k e^{-\lambda^*(k-1)} = 0.$$

Ans pour  $\lambda > \lambda_*$  on ne change jamais de signe. Et si maintenant  $\lambda < \lambda_*$ , alors il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $1 - \sum_{k=1}^{N_0} k e^{-k\lambda} < 0$ . Cela veut donc dire que pour  $X_1 = 1$  et  $X_2 = X_3 = \dots = X_{N_0} = -1$  la fonction devient négative, et cela arrive avec une probabilité non nulle. Remarquez aussi qu'il est possible de calculer  $\lambda^*$  en utilisant que

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} = \frac{d}{dy} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} y^k \right] = \frac{1}{(1-y)^2}$$

et de résoudre  $1 - (g(y) - y) = 0$  puis de poser  $\lambda^* = -\ln y$ .

3. Pour n'importe quel  $N_0 \in \mathbb{N}$  on a  $1 - \sum_{k=1}^{N_0} k e^{-k\lambda^*} > 0$  donc on ne peut pas changer de signe après  $N_0$  étapes. Donc on ne change jamais de signe.
4. Comme les variables  $X_i$  sont indépendantes et que  $\text{Var}(X_i) = 1$ , on a donc

$$\text{Var}(x(n)) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(kX_k e^{\lambda(n-k)}) = \sum_{i=1}^n k^2 e^{2\lambda(n-k)}.$$

**Exercice 2.38.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On tire au hasard un point  $A$  dans  $[0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N}{N}]$  uniformément.

On regarde la fonction  $t \rightarrow x(t)$  définie sur  $t \in [0, 1]$  par  $x(0) = 1$ ,  $x'(t) = -1$  pour  $t \in [0, A]$ ,  $x'(t) = x(t)$  pour  $t \in [A, 1]$ .

1. Montrer qu'on a toujours  $x(t) \geq 0$ .
2. Calculer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[x(1)]$ .
3. (Bonus) Si maintenant on tire deux points  $A_1, A_2$  uniformément dans  $[0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N}{N}]$ , et on prend  $t \rightarrow x(t)$  définie sur  $t \in [0, 1]$  par  $x(0) = 1$ ,  $x'(t) = -1$  pour  $t \in [0, \min(A_1, A_2)]$ ,  $x'(t) = x(t)$  pour  $t \in [\min(A_1, A_2), \max(A_1, A_2)]$  et  $x'(t) = -1$  pour  $t \in [\max(A_1, A_2), 1]$ . Calculer  $\mathbb{E}[x(1)]$ .

**Solution 2.38.**

1. Sur  $[0, A]$  on a  $x(t) = 1 - t$  et comme  $A \leq 1$ ,  $x \geq 0$  sur cet intervalle. Ensuite  $x'(t) \geq 0$  donc on a bien toujours  $x(t) \geq 0$ .
2. On a  $x(A) = 1 - A$  et donc  $x(1) = x(A)e^{1-A} = (1 - A)e^{1-A}$ . Donc

$$\mathbb{E}[x(1)] = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) e^{1-\frac{k}{N}} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{k}{N} e^{-\frac{k}{N}} \rightarrow \int_0^1 x e^{-x} dx$$

quand  $N \rightarrow +\infty$ , et on calcule  $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$ .

**Exercice 2.39.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$  tels que  $\sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| < 1$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i u_{n+i}.$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Question bonus :** Que peut-il se passer si  $\sum_i |\alpha_i| = 1$  ?

**Solution 2.39.** Posons  $M_n = \max(|u_n|, \dots, |u_{n+k-1}|)$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$|u_{n+k}| \leq M_n \sum_i |\alpha_i| \leq M_n,$$

donc la suite  $(M_n)_n$  est décroissante, et par récurrence  $u_{n+k+j} \leq M_n \sum_i |\alpha_i|$  pour tout  $j \geq 0$ . En particulier,  $M_{n+k} \leq M_n \sum_i |\alpha_i|$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_{kn} \leq M_0 (\sum_i |\alpha_i|)^n \rightarrow 0$ . Comme  $(M_n)_n$  est décroissante positive, on a également  $M_n \rightarrow 0$  et donc  $u_n \rightarrow 0$ .

Pour ce qui se passe quand  $\sum_i |\alpha_i| = 1$ , la suite reste bornée (par le même raisonnement). Elle peut diverger ou converger, et sa limite n'est pas forcément unique.

- Si  $\sum_i \alpha_i = 1$ , alors n'importe quelle suite constante marche, il n'y a donc pas unicité de la limite.
- Si tous les  $\alpha_i$  sont  $> 0$ , alors la suite converge. Si  $k = 1$ , c'est immédiat (la suite est constante). Sinon,  $u_{n+k}$  est un barycentre à coefficients dans  $[\min_i \alpha_i, \max_i \alpha_i]$  des  $u_{n+i}$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , et se trouve donc dans un segment inclus dans  $[\min_i u_{n+i}, \max_i u_{n+i}]$  de longueur au plus  $1 - 2 \min_i \alpha_i$  fois la longueur du segment initial (le max est ramené vers le bas par le fait que le plus petit  $u_{n+i}$  a un poids au moins  $\min_i \alpha_i$ , et de même pour le min) : c'est contractant, pour la même raison que quand  $\sum_i |\alpha_i| < 1$ .
- Sans la positivité : si  $k = 1$  et  $\alpha_0 = -1$  par exemple, alors la suite diverge (sauf si elle est nulle).
- Si  $|\alpha_i| > 0$  pour tout  $i$ , l'argument avec les barycentres ne marche pas forcément. Par exemple, si  $u_n$  suite à coefficients  $\alpha_i > 0$ , alors  $v_n = (-1)^n u_n$  est une suite à coefficients  $(-1)^i \alpha_i$  (à un signe près), donc si  $\lim_n u_n \neq 0$ ,  $(v_n)_n$  diverge.

## Chapitre 3

# Probabilité

**Exercice 3.1.** Soit  $X$  de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ , pour un réel  $\lambda > 0$ .

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

2. (Version 2) Montrer que,

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) = O_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \right).$$

**Solution 3.1.** 1. On calcule la fonction génératrice

$$\mathbb{E}[s^X] = \sum_k s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

pour  $s < 0$ . Par l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire  $Z = s^X$  on a alors

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) = \mathbb{P}(s^X \geq s^{2\lambda}) \leq \frac{\mathbb{E}[s^X]}{s^{2\lambda}} = \left(\frac{e^{s-1}}{s^2}\right)^\lambda.$$

Ceci qui donne l'énoncé en choisissant  $s = 2$ .

2. (Version 2) Avec la formule des probabilités totales on a

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) = \left( \sum_{k \geq 2\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda}.$$

On étudie alors la suite  $a_k = \frac{\lambda^k}{k!}$ . Pour tout  $k \geq 2\lambda$ , on a

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\lambda}{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

En notant  $k_0 = \lceil 2\lambda \rceil$ , on a alors  $a_{k_0+n} \leq 2^{-n} a_{k_0}$  et donc

$$\sum_{k \geq 2\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \sum_{n \geq 0} a_{k_0} 2^{-n} = 2a_{k_0}.$$

On estime maintenant  $a_{k_0}$  avec la formule de Stirling. Par définition on a  $2\lambda - 1 \leq k_0 \leq 2\lambda$ , et donc

$$a_{k_0} = \frac{\lambda^{k_0}}{k_0!} \sim \left(\frac{\lambda}{k_0}\right)^{k_0} \frac{e^{k_0}}{\sqrt{2\pi k_0}} \leq \left(\frac{\lambda}{2\lambda-1}\right)^{2\lambda-1} \frac{e^{2\lambda}}{\sqrt{2\pi(2\lambda-1)}} \sim \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda}}\right)^{2\lambda} \left(\frac{e}{2}\right)^{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}}.$$

On peut conclure en utilisant que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda}}\right)^{2\lambda} = e$ .

**Exercice 3.2.** Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des variables aléatoires bornées i.i.d., et  $\lambda \in ]0, 1[$ . On pose

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - \lambda)u_n + X_n$$

Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $f$  avec  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = 0$  telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\lambda u_n - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq f(\lambda)$$

**Solution 3.2.** On note  $x = \mathbb{E}(X)$  et  $e_n = \mathbb{E}(u_n)$ . On a alors

$$e_{n+1} = (1 - \lambda)e_n + x$$

Donc

$$e_n = x \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda)^k = \frac{x}{\lambda} (1 - (1 - \lambda)^n).$$

Pour la variance on note  $v = \text{Var}(X)$  et  $v_n = \text{Var}(u_n)$ . On a

$$v_{n+1} = (1 - \lambda)^2 v_n + v$$

et alors

$$v_n = v \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda)^k = \frac{v}{2\lambda + \lambda^2} (1 - (1 - \lambda)^{2n}).$$

Finalement avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}(|u_n - e_n| \geq \varepsilon') \leq \frac{v_n}{(\varepsilon')^2}$$

et donc

$$\mathbb{P}(|\lambda u_n - x + x(1 - \lambda)^n| \geq \lambda \varepsilon') \leq \frac{v_n}{(\varepsilon')^2}.$$

Il reste à choisir  $\varepsilon'$  correctement. Pour  $n$  suffisamment grand  $x(1 - \lambda)^n < \lambda \varepsilon'$  et donc par l'inégalité triangulaire,

$$\mathbb{P}(|\lambda u_n - x| \geq 2\lambda \varepsilon') \leq \mathbb{P}(|\lambda u_n - x + x(1 - \lambda)^n| \geq \lambda \varepsilon')$$

Avec  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$  on a alors

$$\mathbb{P}(|\lambda u_n - x| \geq \varepsilon) \leq \frac{v_n}{\varepsilon^2} = \frac{4\lambda^2 v}{\varepsilon^2 (2\lambda + \lambda^2)} (1 - (1 - \lambda)^{2n}) \leq \frac{2\lambda v}{\varepsilon^2}.$$

**Exercice 3.3.** Soit  $f$  une fonction convexe avec  $f'' \geq 2a$  et  $X$  une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer

$$\mathbb{E}(f(X)) - f(\mathbb{E}(X)) \geq a \text{Var}(X).$$

**Solution 3.3.** Par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ , il existe  $c \in [x, y]$  tel que

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + f''(c) \frac{(y - x)^2}{2},$$

et donc

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) + a(y - x)^2.$$

(Cette inégalité pouvait aussi se montrer avec la formule de Taylor reste intégral). On écrit alors avec  $x = \mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) - f(\mathbb{E}(X)) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = k) (f(k) - f(x)) \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = k) (f'(x)(k - x) + a(k - x)^2) \\ &= f'(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = k)(k - x) + a \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = k)(k - x)^2 \\ &= f'(x) \mathbb{E}(X - x) + a \mathbb{E}(X - x)^2 \\ &= a \text{Var}(X) \end{aligned}$$

**Exercice 3.4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$X_n = \left| \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{\sqrt{3n}}{2} \right\} \right|.$$

Estimer  $X_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Solution 3.4.** La partie la plus difficile de l'exercice est de remarquer que cela se réécrit sous la forme probabiliste

$$\frac{X_n}{3^n} = \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{3n}{4} \right)$$

avec  $x_i$  des variables i.i.d. uniformes sur  $\{-1, 0, 1\}$ . Par la loi des grands nombres, on a la convergence en probabilité pour  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \mathbb{E}(x_i^2) = \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{3n}{4} \right) = 1.$$

On en conclut que

$$X_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n.$$

**Exercice 3.5.** Soit  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tirée aléatoirement parmi les  $n!$  permutations possibles avec une loi uniforme.

1. Donner la loi de la longueur du cycle de  $\sigma$  contenant 1 (par exemple si  $\sigma = (142)(35)$ , la longueur est 3).

2. Calculer l'espérance du nombre de cycles de  $\sigma$ .

**Solution 3.5.** On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sigma(1) = 1) &= \frac{1}{n} \\ \mathbb{P}(\sigma(1) \neq 1, \sigma^2(1) = 1) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} \\ \mathbb{P}(\sigma(1), \sigma^2(1) \neq 1, \sigma^3(1) = 1) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n} \\ &\dots\end{aligned}$$

Donc on a toujours

$$\mathbb{P}(\text{longueur du cycle} = k) = \frac{1}{n}.$$

On note  $N_n$  la moyenne du nombre de cycles. On peut proposer la relation de récurrence suivante

$$N_n = \underbrace{\frac{1}{n} \times (1 + N_{n-1})}_{\sigma(1)=1} + \underbrace{\frac{n-1}{n} \times N_{n-1}}_{\sigma(1) \neq 1}$$

En effet si  $\sigma(1) = 1$  cela forme un cycle et sur le reste, la permutation est indépendante. Si  $\sigma(1) = k \neq 1$ , alors on en posant  $\tilde{\sigma} = (1k)\sigma$  on se ramène au cas précédent mais il ne faut pas compter le cycle du point fixe en 1. Avec la relation de récurrence

$$N_n = \frac{1}{n} + N_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

**Exercice 3.6.** Soit  $M \in S_3(\mathbb{R})$  dont les entrées sont aléatoires avec  $(M_{ij})_{i \leq j}$  indépendantes qui suivent une loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . On note  $\lambda_1(M)$  sa plus grande valeur propre. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe  $c, C > 0$  tels que pour  $k$  suffisamment grand,

$$c(1-p)^k \leq \mathbb{P}(\lambda_1(M) \geq k) \leq C(1-p)^{k/3}.$$

1. Montrer que  $\lambda_1(M) \geq M_{11}$ .
2. Montrer que  $\lambda_1(M)^2 \leq \text{Tr}(M^2)$ .
3. Conclure

**Solution 3.6.** 1) On utilise que

$$\lambda_1(M) = \sup_{\|v\|=1} \langle v, Mv \rangle \geq \langle e_1, Me_1 \rangle = M_{11}$$

où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique.

2) On a directement que

$$\text{Tr}(M^2) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(M)^2 \geq \lambda_1(M)^2.$$

3) Avec la première inégalité on a

$$\mathbb{P}(\lambda_1(M) \geq k) \geq \mathbb{P}(M_{11} \geq k) = (1-p)^{k-1}.$$

Avec la deuxième inégalité on a

$$\mathbb{P}(\lambda_1(M) \geq k) \leq \mathbb{P}(\text{Tr}(M^2) \geq k^2) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^2 \geq k^2\right)$$

On remarque que

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^2 \geq k^2 \right\} \subset \bigcup_{i,j=1}^3 \left\{ M_{ij}^2 \geq \frac{k^2}{9} \right\}$$

alors

$$\mathbb{P}(\lambda_1(M) \geq k) \leq \sum_{i,j} \mathbb{P}\left(\left\{M_{ij}^2 \geq \frac{k^2}{9}\right\}\right) = \sum_{i,j} \left\{M_{ij} \geq \frac{k}{3}\right\} = 9(1-p)^{k/3}.$$

**Exercice 3.7.** On note  $S_{2n}$  l'ensemble des permutations sur  $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ . Calculer la moyenne

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (|\sigma(1) - \sigma(2)| + |\sigma(3) - \sigma(4)| + \dots + |\sigma(2n-1) - \sigma(2n)|).$$

**Solution 3.7.** Notons  $M_n$  cette moyenne. On peut séparer la somme en  $n$  sommes

$$M_n = \frac{1}{(2n)!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} |\sigma(1) - \sigma(2)| + \frac{1}{(2n)!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} |\sigma(3) - \sigma(4)| + \dots,$$

mais toutes ces sommes sont égales (on le voit en composant  $\sigma$  par une permutation qui permute 1 avec  $2k-1$  et 2 avec  $2k$  et laisse le reste inchangé, pour un  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  : cela définit une bijection de  $S_{2n}$ , qui transforme la première somme en la  $k$ -ième). Ainsi,

$$\begin{aligned} M_n &= n \frac{1}{(2n)!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} |\sigma(1) - \sigma(2)| \\ &= n \frac{1}{(2n)!} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} |i - j| \text{Card}\{\sigma \in S_{2n} : \sigma(1) = i, \sigma(2) = j\} \\ &= n \frac{(2n-2)!}{(2n)!} \sum_{i=1}^{2n} \left( \sum_{1 \leq j < i} (i-j) + \sum_{i < j \leq 2n} (j-i) \right) \\ &= \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n} \left( \sum_{k=1}^{i-1} k + \sum_{\ell=1}^{2n-i} \ell \right) \\ &= \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{i(i-1)}{2} + \frac{(2n-i)(2n-i+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n} (i^2 - (2n+1)i + n(2n+1)) \\ &= \frac{1}{2(2n-1)} \left( \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - (2n+1) \frac{2n(2n+1)}{2} + 2n^2(2n+1) \right) \\ &= \frac{n(2n+1)}{6(2n-1)} (4n+1 - 3(2n+1) + 6n) \\ &= \frac{n(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

(Autre méthode) L'idée est de retirer les valeurs absolues et de considérer les signes devant chaque terme

$$|\sigma(1) - \sigma(2)| + \cdots + |\sigma(2n-1) - \sigma(2n)| = \sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_k k$$

avec  $\varepsilon_k = \pm 1$  le signe devant le nombre  $k$ . Puisque

$$|k - i| = \begin{cases} -k + i & \text{si } k < i \\ k - i & \text{si } k > i \end{cases} \quad \text{on a } \varepsilon_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k < i \\ 1 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Toutes les permutations sont équiprobable, le nombre  $i$  apparaît de manière uniforme parmi les valeurs différentes de  $k$  et on peut alors estimer la probabilité

$$\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \frac{|\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, i < k\}|}{|\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, i \neq k\}|} = \frac{k-1}{2n-1}$$

et

$$\mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{|\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, i > k\}|}{|\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, i \neq k\}|} = \frac{2n-k}{2n-1}$$

On a alors

$$\mathbb{E}(\varepsilon_k) = \frac{k-1}{2n-1} - \frac{2n-k}{2n-1} = \frac{2(k-n)-1}{2n-1}$$

Finalement

$$M_n = \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_k k \right) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{E}(\varepsilon_k) k = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2(k-n)-1)k}{2n-1}.$$

Il reste à calculer cette somme en faisant apparaître des multiples de  $\sum k$  et  $\sum k^2$

**Exercice 3.8.** On joue à pile ou face et on note  $p$  la probabilité d'avoir "Face",  $q = 1 - p$  la probabilité d'avoir "Pile" et l'évènement

$$A_n = \{ \text{"Il n'y a pas eu 2 résultats "Face" de suite lors de } n \text{ lancers} \}.$$

Donner un équivalent de  $\mathbb{P}(A_n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Solution 3.8.** On pose

$$\begin{aligned} a_n &= \mathbb{P}(A_n \cap \{ \text{dernière pièce est face} \}), \\ b_n &= \mathbb{P}(A_n \cap \{ \text{dernière pièce est pile} \}). \end{aligned}$$

En considérant les quatre cas possibles lors du lancer de la  $(n+1)$ -ème pièce (avec leurs probabilités respectives), on voit que

$$\begin{cases} a_{n+1} = p \times b_n, \\ b_{n+1} = (1-p) \times b_n + (1-p)a_n. \end{cases}$$

On écrit la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} 0 & p \\ (1-p) & (1-p) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(A_n) = a_n + b_n = (1, 1) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (1, 1)M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

avec  $a_1 = p$  et  $b_1 = 1 - p$ . Pour calculer  $M^{n-1}$ , on diagonalise cette matrice en écrivant son polynôme caractéristique

$$X^2 - (1 - p)X - p(1 - p) = 0,$$

et donc avec  $\Delta = (1 - p)^2 + 4p(1 - p) = (1 + 3p)(1 - p) > 0$ ,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 - p \pm \sqrt{(1 + 3p)(1 - p)}}{2}.$$

avec  $\lambda_-, \lambda_+$  les valeurs propres de  $M$ . Celles ci sont distinctes, donc la matrice est diagonalisable, et on a alors

$$(1, 1)M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \alpha\lambda_+^{n-1} + \beta\lambda_-^{n-1}$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  qui peuvent être déterminés avec les conditions initiales. On a donc

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_1) = 1 = \alpha + \beta \\ \mathbb{P}(A_2) = 1 - p^2 = \alpha\lambda_+ + \beta\lambda_- = (\alpha + \beta)\frac{1-p}{2} + (\alpha - \beta)\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases},$$

donc  $\alpha = -\beta$  et  $1 - p^2 = \frac{1-p}{2} + \alpha\sqrt{\Delta}$ , c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( (1 - p)(1 + p) - \frac{1 - p}{2} \right) = \frac{(1 - p)(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{(1 + 3p)(1 - p)}} > 0$$

et enfin  $|\lambda_+| > |\lambda_-|$  donc  $\mathbb{P}(A_n) \sim \alpha\lambda_+^{n-1}$ .

Remarque: au lieu de chercher à calculer  $M^n$ , on aurait aussi pu écrire une relation de récurrence d'ordre 2

$$b_{n+1} = (1 - p) \times b_n + (1 - p)p \times b_{n-1}.$$

puis utiliser l'équation caractéristique. Les calculs avec cette approche sont complètement similaires.

**Exercice 3.9.** Considérons deux joueurs de tennis étant du même niveau (chaque jeu est gagné avec probabilité 1/2) :

1. Quelle est la probabilité qu'ils atteignent le tie-break (6-6) ?
2. Calculer  $\sum_{k < n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$ .

**Solution 3.9.** 1- Sur les 12 premiers jeux, il faut que 6 soient gagnés par le premier joueur et 6 soient gagnés par le deuxième joueur. On a donc

$$\mathbb{P}(\text{tie-break}) = \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{6}.$$

2- On remarque pour  $k < n$  que si une manche se joue en  $n$  points,

$$\binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \mathbb{P}(\text{Score : le joueur 1} = n, \text{ joueur 2} = k)$$

Donc

$$\sum_{k < n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \mathbb{P}(\text{joueur 1 gagne}) = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 3.10.** Soit  $N$  une variable aléatoire de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . On lance  $N$  pile ou face équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de faces ?

**Solution 3.10.** On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k \text{ faces}) &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(\{N = n\} \cap \{k \text{ faces}\}) \\ &= \sum_{n \geq k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \times \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n \geq k} \frac{(\lambda/2)^n}{k!(n-k)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n \geq k} \frac{(\lambda/2)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda/2}, \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(\text{nombre pair de faces}) = \sum_k \frac{(\lambda/2)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda/2} = \cosh(\lambda/2) e^{-\lambda/2} = \frac{1 + e^{-\lambda}}{2}.$$

(Autre méthode) Si on a tiré  $N = n \geq 1$  pièces, par symétrie du premier lancer, on a toujours une chance sur 2 qu'il y ait un nombre pair de faces. Et si  $N = 0$ , alors le nombre de face est nul donc pair. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{nb pair de faces}) &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(N = 0)) \\ &= \frac{1 + \mathbb{P}(N = 0)}{2} = \frac{1 + e^{-\lambda}}{2}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.11.** Montrer qu'il existe  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$  tels que

$$\text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n A_n)^2) \geq \text{Tr}(A_1^2) + \dots + \text{Tr}(A_n^2).$$

**Solution 3.11.** On a

$$\text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n A_n)^2) = \sum_i \text{Tr}(A_i^2) + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \text{Tr}(A_i A_j).$$

En faisant la moyenne,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n A_n)^2) = \sum_i \text{Tr}(A_i^2),$$

donc il existe au moins un  $\varepsilon$  tel que  $\text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n A_n)^2) \geq \sum_i \text{Tr}(A_i^2)$ .

(Autre preuve) c'est immédiat pour  $n = 1$ , puis par récurrence,

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \cdots + \varepsilon_n A_{n+1})^2) &= \text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \cdots + \varepsilon_n A_n)^2) + \text{Tr}(A_{n+1}^2) \\ &\quad + 2\varepsilon_{n+1} \text{Tr}((\varepsilon_1 A_1 + \cdots + \varepsilon_n A_n)A_{n+1}) \end{aligned}$$

et on peut choisir  $\varepsilon_{n+1}$  de tel sorte que dernier terme soit positif. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure.

**Exercice 3.12.** Soient  $Y, Z$  deux variables aléatoires sur  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Montrer que  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes si et seulement si pour tout polynômes  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\mathbb{E}(P(Y)Q(Z)) = \mathbb{E}(P(Y))\mathbb{E}(Q(Z)).$$

Est-ce toujours vrai si on suppose  $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  ?

**Solution 3.12.** Le sens direct se déduit immédiatement de l'indépendance de  $Y$  et  $Z$ , qui implique celle de  $P(Y)$  et  $Q(Z)$ .

Pour la réciproque, on note  $L_0, \dots, L_n$  les polynômes de Lagrange de degré  $n$  tel que  $L_i(j) = 1_{i=j}$  pour tout  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Soit  $k, \ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on choisit  $P = L_k, Q = L_\ell$  et alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k, Z = \ell) &= \mathbb{E}(1_{Y=k}1_{Z=\ell}) = \mathbb{E}(L_k(Y)L_\ell(Z)) = \mathbb{E}(L_k(Y))\mathbb{E}(L_\ell(Z)) \text{ par hypothèse} \\ &= \mathbb{E}(1_{Y=k})\mathbb{E}(1_{Z=\ell}) = \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = \ell) \end{aligned}$$

Cette égalité est vrai pour tout  $k, \ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ , les variables  $Y, Z$  sont donc bien indépendantes.

Dans le cas  $n = 1$ , la propriété  $\mathbb{E}(P(Y)Q(Z)) = \mathbb{E}(P(Y))\mathbb{E}(Q(Z))$  est toujours vérifiée car les polynômes sont constants, mais il existe  $Y$  et  $Z$  non indépendants (par exemple  $Y = Z$  avec  $Y$  suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ ). Dans un cas plus général, on peut voir le problème comme un système linéaire et compter le nombre d'équations et le nombre d'inconnues.

**Exercice 3.13.** Soit  $X$  une v.a. sur  $\mathbb{N}$  de carré intégrable et  $t > 0$ . Montrer que pour tout  $c > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t) \leq \frac{\text{Var}(X) + c^2}{(t + c)^2}.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X) + t^2}.$$

**Solution 3.13.** Par l'inégalité de Markov, pour tout  $c, t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t) &= \mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] + c \geq t + c) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + c)^2]}{(t + c)^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X) + c^2}{(t + c)^2} =: f(c). \end{aligned}$$

Il s'agit alors de choisir le meilleur  $c$  possible, on cherche donc le minimum de la fonction  $f$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{2c}{(t + c)^2} - (\text{Var}(X) + c^2) \frac{2}{(t + c)^3} \\ &= \frac{2(c^2 + tc - \text{Var}(X) - c^2)}{(t + c)^3} \\ &= \frac{2(tc - \text{Var}(X))}{(t + c)^3}. \end{aligned}$$

On a alors  $f'(c) = 0$  si  $c = \text{Var}(X)/t$ , dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t) &= \frac{\text{Var}(X)(1 + \frac{\text{Var}(X)}{t^2})}{(t + \frac{\text{Var}(X)}{t})^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{t^2(1 + \frac{\text{Var}(X)}{t^2})} = \frac{\text{Var}(X)}{t^2 + \text{Var}(X)} \end{aligned}$$

ce qui est ce qu'on voulait démontrer.

**Exercice 3.14.** Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A_0, A_1, \dots, A_d$  des v.a. indépendantes telles que  $A_k$  est de loi géométrique de paramètre  $e^{-k}$ , et soit  $P$  le polynôme  $P = \sum_{k=0}^d A_k X^k$  (vu comme polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$ ). On tire aléatoirement une racine de  $P$  et selon une loi uniforme (avec multiplicité) et l'on note  $R$  cette racine

1. Calculer  $\mathbb{E}[R]$ .
2. (Optionnel) Soit  $p \in (0, 1)$ . Supposons maintenant que le degré  $d = D$  est une variable aléatoire, indépendante des  $A_i$  et telle que  $\mathbb{P}(D = d) = c(1 - e^{-d})p^d$  lorsque  $d \geq 1$ , pour un  $c > 0$  à déterminer. Que devient  $\mathbb{E}[R]$  ?

**Solution 3.14.** 1. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  les racines de  $P$ . Conditionnellement au polynôme  $P$ , on a

$$\mathbb{E}_{\text{Tirage}}[R] = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \lambda_i = \frac{1}{d} \frac{A_{d-1}}{A_d}$$

où on a reconnu une relation coefficients-racines. En prenant l'espérance sur le polynôme  $P$  on a alors

$$\mathbb{E}[R] = \frac{1}{d} \mathbb{E} \left[ \frac{A_{d-1}}{A_d} \right] = \frac{1}{d} \mathbb{E}[A_{d-1}] \mathbb{E} \left[ \frac{1}{A_d} \right]$$

par indépendance. Puis on calcule  $\mathbb{E}[A_{d-1}] = \frac{1}{p_{d-1}} = e^{d-1}$  et

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{A_d} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_d (1 - p_d)^{n-1} = \frac{p_d}{1 - p_d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - p_d)^n = -\frac{p_d}{1 - p_d} \log p_d = d \frac{e^{-d}}{1 - e^{-d}}.$$

Finalement

$$\mathbb{E}[R] = \frac{e^{d-1}}{d} \times \frac{de^{-d}}{1 - e^{-d}} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-d}}$$

2. Dans le cas où le degré  $d = D$  est aléatoire on a

$$\mathbb{E}[R] = e^{-1} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 - e^{-D}} \right] = e^{-1} \sum_{d \geq 1} \frac{c(1 - e^{-d})p^d}{1 - e^{-d}} = ce^{-1} \frac{p}{1 - p}.$$

Il est aussi possible de calculer cette constante  $c$  en utilisant

$$1 = \sum_d \mathbb{P}(D = d) = c \left( \sum_{d \geq 1} p^d - \sum_{d \geq 1} \left(\frac{p}{e}\right)^d \right) = c \left( \frac{p}{1 - p} - \frac{p/e}{1 - p/e} \right)$$

**Exercice 3.15.** Une urne contient  $n$  boules, dont 3 rouges. On tire des boules sans remise jusqu'à avoir tiré 2 boules rouges. Combien de boules reste-t-il dans l'urne en espérance ? Et si on s'arrête à la première boule ?

(Version générale) Une urne contient  $n$  boules, dont  $r$  rouges. Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , notons  $N_k$  le nombre de boules tirées au moment où on tire la  $k$ -ème boule rouge. Calculer  $\mathbb{E}[N_k]$ .

**Solution 3.15.** On commence par la preuve de la version facile.

- Remarquons que le problème du tirage est équivalent à trier les boules sur un axe uniformément au hasard. Les tirages en séquence reviennent alors à parcourir les boules sur cet axe. Avec cette image, on voit que quand on parcourt cet axe dans l'autre sens, le problème de tirer des boules de l'urne jusqu'à obtenir la  $k$ -ème rouge revient exactement au même que de tirer les boules qui *resteront* dans l'urne, sans remise, jusqu'au moment où on tire la  $(r - k + 1)$ -ème boule rouge, qu'on remet alors avec celles qui seront retirées de l'urne.

Autrement dit, pour tout  $k$ ,  $N_k \stackrel{\text{(loi)}}{=} 1 + (n + N_{r+1-k})$ .

En particulier, dans notre problème où  $r = 3$  et  $k = 2$ ,  $N_2 \stackrel{\text{(loi)}}{=} 1 + (n - N_2)$ , donc

$$\mathbb{E}[N_2] = \mathbb{E}[(n + 1) - N_2]$$

et donc  $\mathbb{E}[N_2] = \frac{n+1}{2}$ , donc il en reste  $\frac{n-1}{2}$ .

Ensuite, pour déterminer  $N_1$ , conditionnons par rapport à  $N_2 = i$ , autrement dit la deuxième boule rouge est fixée en position  $i$ . On a donc un tri aléatoire de  $i - 1$  boules, dont une seule rouge, avant cette  $i$ -ème boule, et on cherche la position de la première boule rouge. Autrement dit, c'est exactement le même problème que si on cherchait le nombre de boules tirées lorsqu'on rencontre la  $(k' = 1)$ -ème (et seule) boule rouge d'une urne contenant  $n' = i - 1$  boules dont  $r' = 1$  rouge. En notant  $N'_1$  ce nombre, on a comme précédemment  $N'_1 \stackrel{\text{(loi)}}{=} 1 + (i - 1) - N'_1$ , donc  $\mathbb{E}[N'_1] = \frac{i}{2}$ , d'où

$$\mathbb{E}[N_1 | N_2 = i] = \mathbb{E}[N'_1] = \frac{i}{2}$$

et donc

$$\mathbb{E}[N_1] = \mathbb{E}\left[\frac{N_2}{2}\right] = \frac{n+1}{4}.$$

Il en reste donc  $\frac{3n-1}{4}$

Ce même raisonnement récursif s'applique tant que  $r + 1$  est une puissance de 2, auquel cas  $\mathbb{E}[N_k] = \frac{k}{r+1}(n + 1)$ .

**Alternativement, calcul direct pour  $N_1$  :** pour tout  $i$  entre 1 et  $n - 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = i) &= \frac{n-3}{n} \frac{n-4}{n-1} \cdots \underbrace{\frac{n-3-(i-2)}{n-(i-2)}}_{(i-1) \text{ boules pas rouges}} \frac{3}{n-(i-1)} \\ &= \frac{3(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \sum_{i=1}^{n-2} i \mathbb{P}(N = i) \\
&= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-2} i(n-i)(n-1-i) \\
&= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left( \sum_{i=1}^{n-2} i^3 - (2n-1) \sum_{i=1}^{n-2} i^2 + n(n-1) \sum_{i=1}^{n-2} i \right) \\
&= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left( \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{4} - (2n-1) \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} \right. \\
&\quad \left. + n(n-1) \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \\
&= \frac{3(n-1)(n-2)}{4} - \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n} + \frac{3(n-1)}{2} \\
&= \frac{3n}{4} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2n} - 2n + 4 - \frac{3}{2n} + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{n+1}{4}
\end{aligned}$$

- **Solution générale :** prenons une nouvelle représentation du problème : ce problème de tirage est équivalent à placer les boules sur un cercle (permutées uniformément au hasard), et à choisir un point de départ uniformément au hasard et indépendamment de la permutation des boules parmi les positions des  $n$  boules, et enfin de parcourir les boules dans le sens horaire à partir de ce point de départ.

Attention, même si le choix de la position du point de départ est indépendant de la permutation des boules, des corrélations peuvent apparaître : notamment, l'arc entre deux boules rouges qui contient le point de départ va être de plus grande longueur que la moyenne (vu qu'à permutation des boules fixées contenant un arc de longueur  $L$ , le point de départ a une probabilité  $L/n$  d'être dans cet arc).

Avec cette visualisation, étant donné une configuration (arcs + position initiale), on peut permuter les arcs **qui ne contiennent pas le point de départ** sans changer la loi du tirage (à point de départ fixé et longueur de l'axe contenant le point de départ fixé, ce qui se passe ailleurs est un nouveau tirage uniforme). Cela montre que pour tout  $k \in \{2, \dots, r\}$ ,  $N_k - N_{k-1} \stackrel{(\text{loi})}{=} N_2 - N_1$ .

Comme choisir la permutation des boules donne la même loi qu'on les tire toutes en même temps ou une par une selon l'ordre qui nous arrange (tant que cet ordre est fixé à l'avance), obtenir l'arc contenant la position initiale revient à tirer des boules jusqu'à trouver une rouge (parcours dans le sens horaire de la première moitié de l'arc), puis à tirer des boules jusqu'à trouver une deuxième rouge (parcours dans le sens *anti*-horaire pour la deuxième moitié de l'arc). Accessoirement, cela montre aussi que

$$n - N_r + 1 \stackrel{(\text{loi})}{=} N_2 - N_1,$$

et le premier terme est aussi égal en loi à  $N_1$  (montré en début de solution), donc

$$\begin{aligned} n+1 &= \mathbb{E}[(n+1) - N_r + N_r] = \mathbb{E}[N_1 + N_r] \\ &= \mathbb{E}[2N_1 + (N_r - N_1)] \\ &= 2\mathbb{E}[N_1] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^r (N_k - N_{k-1})\right] \\ &= 2\mathbb{E}[N_1] + (r-1)\mathbb{E}[N_2 - N_1] \\ &= 2\mathbb{E}[N_1] + (r-1)\mathbb{E}[N_1] = (r+1)\mathbb{E}[N_1], \end{aligned}$$

d'où  $\mathbb{E}[N_1] = \frac{n+1}{r+1}$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_k] &= \mathbb{E}\left[N_1 + \sum_{j=2}^k (N_j - N_{j-1})\right] \\ &= (1 + (k-1))\mathbb{E}[N_1] = \frac{k(n+1)}{r+1} \end{aligned}$$

Rédigeons ces raisonnements plus formellement. Notons  $B_i$  la couleur de la boule placée en position  $i$  sur le cercle (numérotées de 1 à  $n$ , l'origine est en 1). Soit  $b \in \{\text{pas R}, \text{R}\}^n$  (avec  $b_1 = b_2 = \dots = b_{N_1} = \text{pas R}$  et  $b_{N_1} = \text{R}$ ), et regardons ce qui se passe après avoir tiré les  $N_1$  premières boules. Comme les boules sont mélangées uniformément,

$$\mathbb{P}(B_n = \text{R} | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}) = \mathbb{P}(B_{N_1+1} = \text{R} | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1})$$

(Note : cela se résume aussi bien en  $\mathbb{P}(B_n = \text{R} | N_1)$ , mais le fait que les  $N_1$  premières boules ont déjà été tirées est moins visible dans ce cas) et de même, pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{n-j} = b_{N_1+j+1} | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}, B_n = b_{N_1+1}, \dots, B_{n-j+1} = b_{N_1+j}) \\ = \mathbb{P}(B_{N_1+1+j} = \text{R} | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}, B_{N_1+1} = b_{N_1+1}, \dots, B_{N_1+j} = b_{N_1+j}), \end{aligned}$$

d'où on en déduit que pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n = b_{N_1+1}, \dots, B_{n-j} = b_{N_1+1+j} | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}) \\ = \mathbb{P}(B_{N_1+1} = b_{N_1+1}, \dots, B_{N_1+1+j} = b_{N_1+1+j} | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}), \end{aligned}$$

et donc pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_r = n - j | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}) \\ = \mathbb{P}(N_2 = N_1 + 1 + j | N_1, B_1 = b_1, \dots, B_{N_1} = b_{N_1}), \end{aligned}$$

d'où quand on intègre par rapport à  $N_1 : n - N_r + 1 \stackrel{(\text{loi})}{=} N_2 - N_1$ .

Maintenant, montrons que  $N_k - N_{k-1}$  et  $N_2 - N_1$  ont la même loi pour tout  $k \in \{2, \dots, r\}$ . Pour cela, étant donné un tirage  $b \in \{\text{pas R}, \text{R}\}^n$ , on va construire une bijection  $f$  qui envoie une situation où  $N_2 - N_1 = \Delta$  sur une situation où  $N_k - N_{k-1} = \Delta$ .  $k = 2$  est trivial. Pour les autres, Si  $N_k - N_{k-1} = N_2 - N_1$ , il n'y a rien à faire. Si  $N_k - N_{k-1} \neq N_2 - N_1$ , on translate l'ensemble des boules de  $N_2$  à  $N_{k-1}$  inclus de  $(N_k - N_{k-1}) - (N_2 - N_1)$  dans le sens horaire, en mettant les boules non rouges dont on a pris la place dans les emplacements libérés, ce qui conclut la construction de la bijection.

Comme chaque configuration est équiprobable, on en déduit  $N_k - N_{k-1} \stackrel{(\text{loi})}{=} N_2 - N_1$ .

**Exercice 3.16.** Une urne contient  $n$  boules, dont une seule rouge. On tire, sans remise, des boules uniformément au hasard, l'une après l'autre. Quand on tire la boule rouge, on a une chance sur 2 de s'arrêter, et une sur deux de la remettre dans l'urne, remélanger, et poursuivre le tirage.

Combien de boules auront été tirées, en espérance, quand on s'arrête ?

**Solution 3.16.** Disons que les boules non rouges sont blanches. Notons  $K$  le nombre de fois que la boule rouge a été tirée avant d'être conservée (dernier tirage inclus).  $K$  suit la loi géométrique de paramètre  $1/2$ .

Pour  $k \geq 1$ , conditionnellement à  $K \geq k$ , notons  $B_k$  le nombre de boules blanches tirées au moment du  $k$ -ème tirage de la boule rouge (avec  $B_0 = 0$ ).

Pour tout  $j \geq k$ , conditionnellement à  $(B_{k-1} \text{ ET } K = j)$ ,  $B_k$  est uniforme dans  $\{B_{k-1}, \dots, n-1\}$  (plusieurs manières : avec calcul direct, via la loi hypergéométrique, ou en remarquant que l'ordre des boules étant uniforme, la position de la boule rouge parmi les  $n - B_{k-1}$  restant à tirer est uniforme). Par conséquent,

$$\mathbb{E}[B_k | B_{k-1}, K = j] = \frac{B_{k-1} + n - 1}{2}$$

et donc

$$\mathbb{E}[B_k | K = j] = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \mathbb{E}[B_{k-1} | K = j]$$

dont on déduit par récurrence  $\mathbb{E}[B_k | K = j] = (n-1)(1-2^{-k})$ .

Le nombre de boules tirées quand on s'arrête est alors  $N = 1 + B_K$ , ce qui a pour espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(K = k) \mathbb{E}[1 + B_k | K = k] \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} 2^{-k} (n-1) (1-2^{-k}) \\ &= 1 + (n-1) \left( \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} 2^{-k} - \frac{1}{4} \sum_{k \geq 0} 4^{-k} \right) \\ &= 1 + (n-1) \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1-1/4} \right) = \frac{2n+1}{3}. \end{aligned}$$

**Autre solution.** Définissons par récurrence  $E_n$  le nombre moyen de boules tirées quand l'urne contient  $n$  boules. Déjà,  $E_1 = 1$  (on s'arrête une fois la boule rouge tirée, et c'est la seule qui peut être tirée).

Pour la récurrence, étant donnée une urne avec  $n+1$  boules, on distingue selon le premier tirage :

- Avec probabilité  $1/(2(n+1))$ , on tire la rouge et on s'arrête. Une boule tirée au total.
- Avec probabilité  $1/(2(n+1))$ , on tire la rouge, on la remet, et on réessaie.  $E_{n+1}$  boules tirées en moyenne au total.
- Avec probabilité  $n/(n+1)$ , on tire une autre boule, et alors on est dans le problème de l'urne à  $n$  boules.  $1 + E_n$  boules tirées en moyenne au total.

On a donc

$$E_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)}E_{n+1} + \frac{n}{n+1}(E_n + 1)$$

donc

$$(2n+1)E_{n+1} = 2n+1 + 2nE_n \quad \text{ou encore} \quad E_{n+1} = 1 + \frac{2n}{2n+1}E_n.$$

En posant  $E_n = (2n+1)u_n$ , on trouve

$$(2n+3)u_{n+1} = 2nu_n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1-3u_n}{2n}$$

Donc on peut voir que  $u_n \rightarrow 1/3$  (rappel vers  $1/3$  de pas  $\rightarrow 0$ ). Effectivement,  $u_n = 1/3$  est une solution stationnaire et  $u_1 = E_1/3 = 1/3$ , donc  $E_n = \frac{2n+1}{3}$  pour tout  $n$ .

**Exercice 3.17.** Calculer l'espérance de la norme 1 d'un point pris uniformément dans l'hypercube  $[-n, n]^d$ , et en calculer un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$ . Faire le même exercice avec la norme infinie.

**Solution 3.17.** Un point est uniforme dans un hypercube  $[-n, n]^d$  si et seulement si ses coordonnées sont i.i.d. de loi uniforme dans  $[-n, n]$ . On a donc

$$\mathbb{E}[\|X\|_1] = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}[|X_i|] = d\mathbb{E}[|X_1|] = d \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n k = \frac{dn(n+1)}{2n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nd}{2}.$$

Pour la norme infinie,  $\|X\|_\infty = k$  si et seulement si  $X$  est sur le bord du cube centré en 0 passant par  $(k, 0, \dots, 0)$ . Il y a  $(2k+1)^d$  points sur ou dans ce cube, donc il y a  $(2k+1)^d - (2k-1)^d$  points sur le bord de ce cube (sauf si  $k=0$ , auquel cas il y a 1 point sur le bord du cube). On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|X\|_\infty] &= \frac{1}{(2n+1)^d} \left( 0 \times 1 + \sum_{k=1}^n k[(2k+1)^d - (2k-1)^d] \right) \\ &= \frac{1}{(2n+1)^d} \left( \sum_{k=1}^n k(2k+1)^d - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(2k+1)^d \right) \\ &= \frac{1}{(2n+1)^d} \left( n(2n+1)^d - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^d \right) \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{2k+1}{2n+1} \right)^d \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \left( \frac{k}{n} \right)^d + o(1) \right] \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n - n \int_0^1 x^d dx + o(n) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nd}{d+1}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.18.** On dit qu'une variable aléatoire est de Rademacher si elle prend les valeurs 1 et  $-1$  avec probabilité  $1/2$ .

1. Soit  $X$  une variable aléatoire de Rademacher. Montrer que

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}(e^{\gamma X}) \leq e^{\gamma^2}.$$

2. Soit  $(X_n)_{n=1}^{2025}$  une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes et  $(c_n)_{n=1}^{2025}$  une suite de réels (non triviale). On pose

$$Y = \sum_{n=1}^{2025} c_n X_n.$$

Montrer que pour tout  $t > 0$ ,

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq e^{t^2(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}.$$

3. Montrer que pour tout  $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(|Y| > \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{4(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}}$$

**Solution 3.18.** 1. En développant en série entière, on obtient

$$\frac{1}{2}(e^\gamma + e^{-\gamma}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-\gamma)^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\gamma^2)^n}{(2n)!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{(\gamma^2)^n}{n!} = e^{\gamma^2}.$$

(Autre méthode) On pose  $f(x) = \text{ch}(x) - e^{x^2}$  et on étudie la fonction. Pour  $|x| \geq 1$ , on a  $f(x) \leq e^{|x|} - e^{|x|^2} \leq 0$ . Il reste donc à considérer le cas  $|x| < 1$  et par parité, il suffit de regarder  $x \in [0, 1]$ . On calcule  $f'(x) = \text{sh}(x) - 2xe^{x^2} \leq \text{sh}(1)x - 2x$  car  $\text{sh}$  est convexe sur  $[0, 1]$  et  $e^{x^2} \geq 1$ , or  $\text{sh}(1) \leq e/2 < 2$  donc  $f'(x) \leq 0$  sur  $[0, 1]$ . On a donc  $f$  décroissante sur  $[0, 1]$ , donc majorée par  $f(0) = 0$ .

2. Par indépendance on a

$$\mathbb{E}(e^{tY}) = \prod_{n=1}^{2025} \mathbb{E}(e^{tc_n X_n}) \leq \prod_{n=1}^{2025} e^{t^2 c_n^2} = e^{t^2(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}.$$

3. Pour tout  $t > 0$ , par l'inégalité de Markov on a (inégalité de Chernoff)

$$\mathbb{P}(Y > \lambda) = \mathbb{P}(e^{tY} > e^{t\lambda}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tY})}{e^{t\lambda}} \leq e^{t^2(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2) - t\lambda}$$

où on a utilisé la question 2 pour finir. Il s'agit maintenant de choisir le meilleur  $t$  possible: le minimum du majorant est atteint pour

$$t_* = \frac{\lambda}{2(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(Y > \lambda) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{4(c_1^2 + \dots + c_{2025}^2)}}.$$

Pour finir, on écrit

$$\mathbb{P}(|Y| > \lambda) \leq \mathbb{P}(Y > \lambda) + \mathbb{P}(-Y > \lambda),$$

et le second terme est contrôlé comme le premier par symétrie.

**Exercice 3.19.** On note  $C(Z) = \mathbb{E}(Z^4) - 3\mathbb{E}(Z^2)^2$ .

1. Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ . Montrer que

$$C(X + Y) = C(X) + C(Y).$$

2. Soient  $(h_n)_{n=1}^N$  des variables aléatoires i.i.d. prenant les valeurs  $\pm 1$  avec probabilité  $1/2$ . Montrer que

$$\left( \sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^2 \leq \mathbb{E} \left( \left( \sum_{n=1}^N c_n h_n \right)^4 \right) \leq 3 \left( \sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^2.$$

**Solution 3.19.**

1. On calcule

$$\mathbb{E}((X + Y)^2) = \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2),$$

et donc

$$\mathbb{E}((X + Y)^2)^2 = \mathbb{E}(X^2)^2 + 2\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(Y^2)^2.$$

On a également

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X + Y)^4) &= \mathbb{E}(X^4) + 4\mathbb{E}(X^3Y) + 6\mathbb{E}(X^2Y^2) + 4\mathbb{E}(XY^3) + \mathbb{E}(Y^4) \\ &= \mathbb{E}(X^4) + 6\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(Y^4), \end{aligned}$$

donc finalement

$$\mathbb{E}((X + Y)^4) - 3\mathbb{E}((X + Y)^2)^2 = \mathbb{E}(X^4) - 3\mathbb{E}(X^2)^2 + \mathbb{E}(Y^4) - 3\mathbb{E}(Y^2)^2.$$

2. On a  $C(h_n) = 1 - 3 = -2$ , d'où

$$C \left( \sum_{n=1}^N c_n h_n \right) = \sum_{n=1}^N c_n^4 C(h_n) = -2 \sum_{n=1}^N c_n^4.$$

On a aussi

$$C \left( \sum_{n=1}^N c_n h_n \right) = \mathbb{E} \left( \left( \sum_{n=1}^N c_n h_n \right)^4 \right) - 3\mathbb{E} \left( \left( \sum_{n=1}^N c_n h_n \right)^2 \right)^2.$$

Comme les  $h_n$  sont d'espérance nulle, le dernier terme est le carré de la variance de la somme  $\sum_{n=1}^N c_n h_n$ . Comme les  $h_n$  (et donc les  $c_n h_n$ ) sont indépendants, la variance de la somme est la somme des variances, et comme  $\text{Var}(h_n) = 1$ , on a finalement

$$\mathbb{E} \left( \left( \sum_{n=1}^N c_n h_n \right)^4 \right) = 3 \left( \sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n^4.$$

Enfin, il suffit de remarquer que

$$\left( \sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^2 \geq \sum_{n=1}^N c_n^4 \geq 0$$

pour en déduire les inégalités de l'énoncé.

**Exercice 3.20.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On prend un point  $X = (x_1, x_2)$  aléatoirement dans la grille  $\llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket$  uniformément. On définit une fonction  $f$  sur  $\llbracket 0, N \rrbracket$  par  $f(0) = 0$  et pour  $x \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ ,

$$f(x+1) = f(x) + 1 + \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq x_1 \text{ et } x_2 \leq f(x_1) \text{ (c-à-d. si } X \text{ est sous la courbe de } f \text{ et } x \geq x_1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left( \frac{f(N)}{N} \right)$
2. On prend maintenant  $k$  points aléatoirement, on note  $P_k$  l'ensemble de ces points et on prend

$$f_k(x+1) = f_k(x) + 1 + \text{Card}\{(x_1, x_2) \in P_k, x \geq x_1 \text{ et } x_2 \leq f(x_1)\}.$$

Montrer qu'il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $k \geq 1$  et  $N \geq 1$ ,

$$C_1 \leq \frac{\mathbb{E}(f_k(N))}{kN} \leq C_2.$$

**Solution 3.20.**

1. Soit  $X = (x_1, x_2)$ . Si  $x_2 > x_1$  alors  $f(N) = N$  (ce qui arrive à  $x_1$  fixé pour  $N - x_1$  valeurs de  $x_2$ ). Si  $x_2 \leq x_1$  alors  $f(N) = x_1 + 2(N - x_1) = 2N - x_1$  (ce qui arrive pour  $x_1 + 1$  valeurs de  $x_2$ ). On a donc

$$\begin{aligned} (N+1)^2 \mathbb{E}(f(N)) &= \sum_{x_1=0}^N (N(N-x_1) + (2N-x_1)(x_1+1)) \\ &= \sum_{x_1=0}^N (N^2 + Nx_1 - x_1^2 + 2N - x_1) \\ &\sim N^3 + \frac{N^3}{2} - \frac{1}{3}N^3 \\ &\sim \frac{7}{6}N^3 \end{aligned}$$

quand  $N \rightarrow +\infty$  et donc  $\mathbb{E} \left( \frac{f(N)}{N} \right) \rightarrow \frac{7}{6}$  quand  $N \rightarrow +\infty$ .

2. Clairement,  $f_k(N) \leq (k+1)N$  dans toutes les configurations car le cardinal est majoré par  $k$ , donc  $\frac{1}{k} \mathbb{E} \left( \frac{f(N)}{N} \right) \leq 1 + 1/k \leq 2$ . Comptons maintenant en moyenne combien de points on a dans le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$

$$E = \left\{ (x, y) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2, y \leq x \leq \frac{N}{2} \right\}.$$

Notons  $X_1, \dots, X_k$  les points tirés au hasard, et  $\mathbf{1}_{X_i \in E}$  la variable aléatoire valant 1 si  $X_i \in E$  et 0 sinon. Comme les  $X_i$  sont i.i.d. uniformes sur  $\llbracket 0, N \rrbracket^2$ , les  $\mathbf{1}_{X_i \in E}$  sont aussi i.i.d., et

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_i \in E}) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_{X_i \in E} = 1) = \frac{|E|}{(N+1)^2} = \frac{(\lfloor N/2 \rfloor + 1)(\lfloor N/2 \rfloor + 2)}{2(N+1)^2} \geq \frac{1}{8}.$$

Par ailleurs, pour tout  $x \geq N/2$ , par construction,

$$f_k(x+1) \geq f_k(x) + 1 + \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{X_i \in E}$$

et  $f_k(\lfloor N/2 \rfloor) \geq \lfloor N/2 \rfloor$ , donc par récurrence  $f_k(N) \geq N + (N - \lfloor \frac{N}{2} \rfloor) \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{X_i \in E}$ . On a alors par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(f_k(N)) \geq N + \frac{N}{2} \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_i \in E}) \geq N + \frac{N}{2} \frac{k}{8}$$

et donc  $\mathbb{E}(\frac{f_k(N)}{kN}) \geq \frac{1}{16}$ .

**Exercice 3.21.** Soit  $p \in (0, 1)^d$  un vecteur de probabilité (c'est-à-dire  $\sum_{k=1}^d p_k = 1$ ) et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $N = (N_1, \dots, N_d)$  une v.a. de loi multinomiale de paramètre  $(n, p)$  construite ainsi : on réalise  $n$  expériences i.i.d., chacune pouvant avoir un résultat parmi  $d$  possibles. On note  $E_i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  le résultat de l'expérience  $i$ , et on suppose  $\mathbb{P}(E_i = k) = p_k$ . On note alors  $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{E_i=k}$  (le nombre de fois que le résultat  $k$  a été tiré).

1. Quel est le rang de la matrice de covariance de  $N$  ?
2. Encadrer son spectre privé de 0. (Les bornes sont-elles optimales ?)

(Indications : Quelle est la loi de  $N_k$  ? Son espérance ? Montrer que  $\text{Cov}(N_k, N_l) = n\sqrt{p_k}(\mathbf{1}_{k=l} - \sqrt{p_k}\sqrt{p_l})\sqrt{p_l}$ .)

**Solution 3.21.** 1. En notant  $\Gamma$  la matrice de variance-covariance de  $N$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l} &= \text{Cov} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{E_i=k}, \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{E_j=l} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Cov}(\mathbf{1}_{E_i=k}, \mathbf{1}_{E_i=l}) \quad (\text{les expériences sont indépendantes}) \\ &= np_k(\mathbf{1}_{k=l} - p_l) = n\sqrt{p_k}(\mathbf{1}_{k=l} - \sqrt{p_k}\sqrt{p_l})\sqrt{p_l} \end{aligned}$$

donc  $\Gamma = n \text{Diag}(\sqrt{p})(I - \sqrt{p}\sqrt{p}^\top) \text{Diag}(\sqrt{p})$ . La matrice  $I - \sqrt{p}\sqrt{p}^\top$  est la matrice de projection orthogonale sur  $\sqrt{p}^\perp$ , donc de rang  $d - 1$ , et comme les coefficients de  $p$  sont strictement positifs,  $\text{Diag}(\sqrt{p})$  est inversible, donc  $\Gamma$  est de rang  $d - 1$ .

2. Notons  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{d-1} \geq \lambda_d = 0$  les valeurs propres de  $\Gamma$ . (Note : justifier que le spectre est dans  $\mathbb{R}_+$ )

D'un côté,  $\|\Gamma\| \leq n \|\text{Diag}(\sqrt{p})\|^2 \|I - \sqrt{p}\sqrt{p}^\top\| = n\|p\|_\infty$ , donc  $\lambda_1 \leq n\|p\|_\infty$ .

De l'autre, notons déjà que  $\text{Ker}(\Gamma) = p^\perp$ , donc pour tout  $k < d$ , en notant  $x_k$  un vecteur propre non nul de  $\Gamma$  associé à  $\lambda_k$ ,  $x_k$  est orthogonal à  $p$ , et donc

$$(\Gamma x^k)_i = np_i x_i^k - np_i \langle p, x \rangle = np_i x_i^k,$$

donc  $\lambda_k \|x^k\| = \|\Gamma x^k\| \geq n(\inf_i |p_i|) \|x^k\|$ , et donc  $\lambda_{d-1} \geq n \inf_i p_i$  (cela permet aussi de déduire la majoration de  $\lambda_1$ ).

**BONUS :** en ce qui concerne l'optimalité de ces encadrements, prenons  $p_1 = p_2$  et  $x = (1, -1, 0, \dots, 0)$ , alors

$$\Gamma x = np_1 x$$

et donc il existe des  $p$  tels que l'encadrement précédent est optimal.

(Mais à  $p$  fixé, ce n'est pas forcément optimal)

**Autre approche sans l'identité avec les racines carrées :** cherchons le noyau de  $\Gamma$  :  $\Gamma x = 0$  implique que  $\text{Diag}(p)x - p\langle p, x \rangle = 0$ , donc  $x = \mathbf{1}\langle p, x \rangle$ , donc  $x$  proportionnel à  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$ , et  $\mathbf{1}$  est bien dans le noyau de  $\Gamma$ . Par conséquent,  $\text{Ker}(\Gamma) = \text{Vec}(\mathbf{1})$  et  $\Gamma$  est de rang  $d - 1$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Gamma$  associée au vecteur propre  $x$ , alors

$$\Gamma x = \lambda x = n(\text{Diag}(p)x - p\langle p, x \rangle)$$

donc pour tout  $k$ ,  $(p_k - \lambda/n)x_k = p_k\langle p, x \rangle$ . Par conséquent, si  $\lambda/n \notin \{p_k, 1 \leq k \leq d\}$ , alors

$$\langle p, x \rangle = \sum_k p_k x_k = \sum_k \frac{p_k^2}{p_k - \lambda/n} \langle p, x \rangle$$

et donc nécessairement

$$f(x) := \sum_k \frac{p_k^2}{p_k - \lambda/n} = 1.$$

Cette fonction est négative si  $\lambda/n > \|p\|_\infty$ , strictement croissante sur  $(-\infty, n \inf_i p_i)$ , égale à 1 en 0 et tend vers  $+\infty$  en  $n \inf_i p_i$ . Par conséquent, la seule valeur propre qui n'est pas dans  $[n \inf_i p_i, n\|p\|_\infty]$  est 0.

On peut aller plus loin : si  $p$  a  $k$  coordonnées égaux à  $q$ , alors  $nq$  est une valeur propre de multiplicité au moins  $k - 1$  (tous les  $x$  orthogonaux à  $\mathbf{1}$  mettant du poids seulement sur ces coordonnées). De plus, si on trie les valeurs des coordonnées de  $p$  par ordre croissant  $q_1 < \dots < q_N$  (pour  $N \leq d$ ), alors la fonction  $f$  vue précédemment forme une bijection continue strictement croissante de chaque  $(q_i, q_{i+1})$  dans  $\mathbb{R}$ , donc il existe  $\lambda_i \in (q_i, q_{i+1})$  tel que  $f(\lambda_i) = 1$ , qui définit un vecteur propre de  $\Gamma$  (via  $x_k = \frac{p_k}{p_k - \lambda_i/n}$ ). Cela permet de construire  $(N - 1)$  vecteurs propres de  $\Gamma$ , donc en ajoutant  $\mathbf{1}$  et les vecteurs propres associés aux  $q_i$  multiples, on a trouvé le spectre et les vecteurs propres de  $\Gamma$ .

Accessoirement, cela démontre que la borne inf (resp. sup) de l'encadrement du spectre n'est optimale que si le minimum (resp. le maximum) des  $p_i$  est atteint en plusieurs coordonnées.