

# Introduction aux Matrices Aléatoires

23 février 2026

Ce cours à été donné en janvier 2026 dans le cadre du M2 recherche en mathématique à Lyon, divisé en 4 séances pour un total 9h de cours. Il s’agit d’un survol des notions, questions et résultats principaux du domaine des matrices aléatoires. Les idées des preuves sont également mentionnées mais sans aborder les cas les plus généraux et les plus techniques.

Les références principales ont été les livres “Topics in Random Matrices” de Terence Tao, “Introduction to Random Matrices” d’Alice Guionnet, Ofer Zeitouni et Greg Anderson ainsi que les notes d’un cours d’Alice Guionnet donné à Mineapolis.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Densité des valeurs propres et loi du semi-cercle (1er cours, 2h)</b>	<b>2</b>
2.1	La loi du semi-cercle et la loi du disque . . . . .	2
2.2	Norme de matrices aléatoires . . . . .	3
2.3	Loi du semi-cercle via la méthode des moments. . . . .	5
<b>3</b>	<b>Matrices Gaussiennes (2ème et 3ème cours, 4h)</b>	<b>8</b>
3.1	La loi jointe des valeurs propres . . . . .	8
3.2	Tridiagonalisation . . . . .	11
3.3	Introduction au processus ponctuel déterminantal . . . . .	13
3.4	Polynôme de Hermite et loi du GUE . . . . .	15
3.5	Déterminant de Fredholm. . . . .	18
3.6	Statistique locale et loi de Tracy-Widom . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Méthode Perturbatives (4ème cours, 2h)</b>	<b>20</b>
4.1	Formule de la Résolvante . . . . .	20
4.2	Résolvante et la loi du semi-cercle. . . . .	21
4.3	Transition BBP . . . . .	23
4.4	Mouvement Brownien de Dyson . . . . .	25

<b>5</b>	<b>Grandes Déviations (fin du cours, 1h)</b>	<b>27</b>
5.1	Autour de la loi du GOE ou GUE . . . . .	27
5.2	Résultats Généraux de concentration de la mesure . . . . .	28

## 1 Introduction

Durant tout ce cours on considérait  $X$  une matrice de taille  $N \times N$  réelles, (avec  $N \gg 1$ ) dont les entrées sont aléatoires (iid). On pourra aussi supposer la matrice symétrique (ou hermitienne dans le cas complexe). On peut mentionner plusieurs motivations pour un tel modèle.

- Modélisation de système physique : Pour des systèmes complexes avec trop de paramètres qu'ils puissent être mesurés, il a été proposé des modèles simplifiés, linéaires et dont les paramètres sont aléatoires. Ça a été utilisé par exemple pour les gros noyaux atomiques ou pour des systèmes biologiques avec beaucoup d'espèce en interaction.
- Statistique : Historiquement la première apparition des matrices aléatoires a été pour des matrices de covariance.
- Mathématique : Modèle à la fois "simple" et très riche. Il est aussi "universel" dans le sens où des phénomènes maintenant bien compris en matrices aléatoires apparaissent également dans d'autres domaines des mathématiques.

## 2 Densité des valeurs propres et loi du semi-cercle (1er cours, 2h)

### 2.1 La loi du semi-cercle et la loi du disque

On supposera dans toute cette section que  $X$  est symétrique et que ses entrées  $(X_{ij})_{i \leq j}$  sont iid avec  $\mathbb{E}(X_{ij}) = 1$  (centré) et  $\mathbb{E}(X_{ij}^2) = 1$  (normalisé).

**Exercice 1.** Quelle est la taille typique que  $\|Xe_1\|$  pour  $N \gg 1$  ?

Réponse : On a directement par la loi des grands nombres

$$\|Xe_1\|^2 = \sum_{i=1}^N X_{i1}^2 \approx N\mathbb{E}(X_{ij}^2) = N.$$

Aussi on considérait plutôt la matrice  $M = \frac{1}{\sqrt{N}}X$  et on s'intéressera aux propriétés limites de  $M$  pour  $N \rightarrow \infty$ . Puisque  $M$  est réelle, symétrique on peut la diagonaliser. Soit  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$  les valeurs propres de  $M$ , on pose la mesure (de probabilité) spectrale associée

$$\mu_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}.$$

**Théorème 2.** (*Loi du Semi-Cercle*) Si  $X$  est symétrique et  $\mathbb{E}(|X_{ij}|^k) < \infty$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors

$$\mu_M \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu_{s-c} \text{ (faiblement)}$$

où  $\mu_{s-c} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} 1_{x \in [-2,2]} dx$ .

Ce résultat date de Wigner et a été démontré dans les années 50'. Sans l'hypothèse que  $X$  soit symétrique, les valeurs propres de  $M$  sont alors complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$  et on observe la loi du disque uniforme.

**Théorème 3.** (*Loi du Disque uniforme*) Pour  $X$  non hermitien, et  $\mathbb{E}(|X_{ij}|^k) < \infty$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors

$$\mu_M \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu_{Disque} \text{ (faiblement)}$$

où  $\mu_{Disque} = \frac{1}{\pi} 1_{|z| \leq 1} dz$  sur  $\mathbb{C}$ .

Ces théorèmes restent vrais avec des hypothèses de moment beaucoup plus faibles. Mais ici, on ne présentera la preuve que sous l'hypothèse des  $X_{ij}$  bornées. Il s'agit de démontrer que pour toute fonction test (régulière et bornée) on a

$$\frac{1}{N} \text{Tr}(f(M)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_M \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{s-c}$$

Voici la stratégie :

1. On démontrera cette convergence pour les fonctions  $f(x) = x^k$ . On pourra alors la généraliser aux polynômes puis aux fonctions régulières par approximation.
2. Malheureusement les fonctions  $x^k$  ne sont pas bornées sur  $\mathbb{R}$ . Il nous faudra donc également démontrer que  $\|M\| \leq C$  pour nous ramener à un intervalle  $[-C, C]$  et conclure.

## 2.2 Norme de matrices aléatoires

On rappelle que

$$\|M\| = \sup_{\|u\|=\|v\|=1} |\langle u, Mv \rangle|.$$

**Exercice 4.** Montrer qu'il existe  $c$  tel que  $\mathbb{P}(\langle u, Mv \rangle \geq \lambda) \leq C \exp(-cN\lambda^2)$  pour tout  $\|u\| = \|v\| = 1$ .

*Démonstration.* On a  $\langle u, Mv \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N u_i v_j X_{ij}$ . Si on oublie l'hypothèse que  $M$  soit symétrique on obtient ainsi une somme de variables indépendantes et centrées.

1er cas simple :  $X_{ij}$  gaussien. C'est un vecteur gaussien donc  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N u_i v_j X_{ij}$  suit une loi gaussienne de variance

$$\mathbb{E} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N u_i v_j X_{ij} \right)^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N u_i^2 v_j^2 \mathbb{E}(X_{ij}^2) = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N u_i^2 \right) \left( \sum_{j=1}^N v_j^2 \right) = 1.$$

2eme cas simple :  $X_{ij}$  bornées (avec  $|X_{ij}| \leq b$ ). On peut alors utiliser l'inégalité d'Hoeffding

$$\mathbb{P} \left( \left| \sum_{i,j=1}^N u_i v_j X_{ij} \right| \geq \sqrt{N} \lambda \right) \leq C \exp \left( -c \frac{N \lambda^2}{b^2 \sum_{i,j=1}^N u_i^2 v_j^2} \right) = C \exp \left( -\frac{c}{b^2} N \lambda^2 \right)$$

car  $\sum_{i,j} u_i^2 v_j^2 = (\sum_i u_i^2) (\sum_j v_j^2) = \|u\|^2 \|v\|^2 = 1$ .

Avec l'hypothèse  $M$  symétrique, la somme devient  $\sum_i u_i v_i X_{ii} + \sum_{i < j} (u_i v_j + v_i u_j) X_{ij}$  et on obtient un résultat similaire (avec une constante  $c$  plus petite).  $\square$

L'ensemble des  $u \in \mathbb{S}^{N-1}$  est non dénombrable. Pour pouvoir étendre notre résultat précédent à  $\sup_{\|u\|=\|v\|=1} |\langle u, Mv \rangle|$  il nous faut considérer un recouvrement fini de  $\mathbb{S}^{N-1}$  par des petites boules de rayon  $\epsilon > 0$ .

*Affirmation 5.* Il existe  $\Lambda \subset \mathbb{S}^{N-1}$ , de taille  $|\Lambda| \leq (\epsilon^{-1} C)^N = \exp(AN)$  tel que

$$\mathbb{S}^{N-1} \subset \bigcup_{u \in \Lambda} B(u, \epsilon).$$

En considérant  $y \in \Lambda$ ,  $|x - y| \leq \epsilon$  on a

$$\begin{aligned} |\langle x, Mx \rangle| &= |\langle (x - y + y), M(x - y + y) \rangle| \\ &\leq |\langle y, My \rangle| + 2|\langle (x - y), My \rangle| + |\langle (x - y), M(x - y) \rangle| \\ &\leq |\langle y, My \rangle| + \|M\| (2\epsilon + \epsilon^2). \end{aligned}$$

Alors puisque  $\exists x \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $|\langle x, Mx \rangle| = \|M\|$ , on obtient un  $y \in \Lambda$  tel que

$$\|M\| (1 - 2\epsilon - \epsilon^2) \leq |\langle y, My \rangle|.$$

Donc avec  $\epsilon$  suffisamment petit on a

$$\{\|M\| \geq \lambda\} \subset \{\exists y \in \Lambda, |\langle y, My \rangle| \geq \frac{\lambda}{2}\}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|M\| \geq \lambda) &\leq \mathbb{P} \left( \exists y \in \Lambda, |\langle y, My \rangle| \geq \frac{\lambda}{2} \right) \\ &\leq |\Lambda| \times C \exp \left( -\frac{c}{4} N \lambda^2 \right) \\ &\leq C \exp \left( N \left( A\lambda - \frac{c}{4} \lambda^2 \right) \right) \end{aligned}$$

pour  $\lambda$  suffisamment grand, le terme dans l'exponentiel est strictement négative. Conclusion, il existe  $\lambda > 0$ ,  $c', C' > 0$  tel que

$$\mathbb{P}(\|M\| \geq \lambda) \leq C' \exp(-c'N).$$

Et donc que  $M$  reste bornée (avec très grande probabilité).

De fait il est possible de démontrer un résultat beaucoup plus fort.

**Théorème 6.** *Si  $\mathbb{E}|X_{ij}|^m < \infty$  pour un  $m > 4$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$  on*

$$\mathbb{P}(\|M\| \geq 2 + \epsilon) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

### 2.3 Loi du semi-cercle via la méthode des moments.

Ici nous allons calculer  $\frac{1}{N} \text{Tr}(M^k)$ .

**Proposition 7.** *Si  $\mathbb{E}[|X|^{2k}] < \infty$ , on a*

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^{2k}] \right] = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} + o_{N \rightarrow \infty}(1) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mu_{s-c}(x) + o_{N \rightarrow \infty}(1).$$

On peut également démontrer que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^{2k+1}] \right] = o_{N \rightarrow \infty}(1) \text{ et } \text{Var} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^k] \right] = +o_{N \rightarrow \infty}(1).$$

Et donc avec Tchebychev on obtient la convergence en probabilité.

*Preuve de la Proposition 7.* Commençons par les petits  $k$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M] \right] = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} X_{ii} = 0$$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^2] \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \mathbb{E} X_{ij}^2 = 1$$

Pour  $k$  plus grand on développe et il nous faut évaluer des termes de la forme  $\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1})$ .

Premier exemple : on a

$$\mathbb{E}(X_{12} X_{23} X_{31}) = \mathbb{E}(X_{12}) \mathbb{E}(X_{23}) \mathbb{E}(X_{31}) = 0.$$

car les variables sont centrées. De la même manière on a alors la première idée suivante :

- “Si un couple d'indices  $(i_\ell i_{\ell+1})$  n'apparaît qu'une seule fois  $X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}$  alors  $\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}) = 0$ .”

Tous les couples d'indices doivent donc apparaître au moins 2 fois et il ne peut donc y avoir au plus que  $k$  couples d'indices différents dans  $X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{2k} i_1}$ . Voici un deuxième exemple : on a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(M_{ii}^4) = \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_{ii}^4) \leq \frac{C}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow 0} 0$$

Ici il faut remarquer que l'on a un facteur  $N^{-(1+k)}$ , que  $\mathbb{E}(M_{ii}^4) \leq C$  et qu'il n'y a que  $N \ll N^{1+k}$  termes dans la somme. Plus généralement on aura toujours le facteur  $N^{-(1+k)}$  et  $|\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{2k} i_1})| \leq C$ . Ainsi si on considère une somme avec seulement  $N^\ell$  termes,  $\ell < k + 1$ , cette somme sera négligeable. On peut remarquer aussi que

$$|\{(i_1, i_2, \dots, i_{2k}) \in \llbracket 1, N \rrbracket, \text{ avec } k-1 \text{ ou moins couples d'indices différents}\}| \leq CN^k$$

En effet dans ce cas il ne peut y avoir que  $k$  indices différents parmi  $i_1, i_2, \dots, i_{2k}$ . On en déduit la deuxième idée du calcul :

— “On peut ne considérer que les termes avec exactement  $k$  couples différents.”

Ces couples apparaissent alors exactement 2 fois dans  $X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{2k} i_1}$ . On a alors

$$\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{2k} i_1}) = \mathbb{E}(X_{i_1 i_2}^2) \cdots \mathbb{E}(X_{i_{2k} i_1}^2) = 1.$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^{2k}] \right] &= \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2k} \in \llbracket 1, N \rrbracket} \mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{2k} i_1}) \\ &= \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{2k} \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \text{Couples apparaissent exactement 2 fois}}} \mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{2k} i_1}) + o_{N \rightarrow \infty}(1) \\ &= \frac{1}{N^{k+1}} |\{i_1, i_2, \dots, i_{2k} \in \llbracket 1, N \rrbracket : \text{Couples apparaissent exactement 2 fois}\}| \\ &\quad + o_{N \rightarrow \infty}(1) \end{aligned}$$

Il reste ensuite à énumérer ces indices. Le choix de  $i_1$  donne  $N$  possibilités. On peut ensuite choisir les couples qui apparaissent (par exemple en notant  $a = i_{\ell+1} - i_\ell \pmod N$ ). Par exemple pour  $k = 2$  on a

$$|\{a, a, b, b\}, a, b \in \llbracket 1, N \rrbracket\}| + |\{a, b, b, a\}, a, b \in \llbracket 1, N \rrbracket\}| = 2N^2$$

et on trouve

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^4] \right] = 2 + o_{N \rightarrow \infty}(1)$$

Plus généralement on peut représenter les termes par des graphes dont les sommets sont des indices différents et dont les arêtes sont les couples d'indices.

Exemple

$$X_{12} X_{23} X_{32} X_{21} \leftrightarrow \bullet \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \bullet$$

ou

$$X_{12}X_{22}X_{23}X_{31} \leftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \leftarrow \text{-----} \end{array}$$

Nos condition indiquent que seul comptent les arbres. Chacun d'eux donne une structure pour l'ordre d'apparition des couple (par exemple  $\{a, a, b, b\}$ ) et donc est associé à  $N^k$  indices Finalement on obtient

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}[M^{2k}] \right] = |\{\text{arbres avec } k+1 \text{ sommets}\}| + o_{N \rightarrow \infty}(1)$$

Il y a une bijection entre

$$\{\text{arbres avec } k+1 \text{ sommets}\} \leftrightarrow \{\text{chemin entre 0 et } 2k \text{ restant } \geq 0\}$$

et on obtient alors les nombres de Catalan

$$|\{\text{arbres avec } k+1 \text{ sommets}\}| = C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

□

**Exercice 8.** Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mu_{s-c}(x) = C_k$$

Solution : Avec  $x = 2 \cos \theta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (2 \cos \theta)^{2k} (2 \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2k} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{2k} \binom{2k}{\ell} \int_0^\pi e^{i2(\ell-k)\theta} (2 - e^{i2\theta} - e^{-i\theta}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{2k} \binom{2k}{\ell} \int_0^\pi 2e^{i2(\ell-k)\theta} - e^{i2(\ell-k+1)\theta} - e^{i2(\ell-k-1)\theta} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1} - \binom{2k}{k-1} \right) \\ &= \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1} = C_k \end{aligned}$$

Pour finir mentionnons également la loi de Malchenko-Pastur qui donne la densité limite des valeurs propre de  $M^t M$  avec  $M = \frac{1}{\sqrt{N}} X \in \mathbb{R}^{N \times \eta N}$  et  $X_{ij}$  iid (sans hypothèse de symétrie).

### 3 Matrices Gaussiennes (2ème et 3ème cours, 4h)

Les matrices gaussiennes forment un groupe à part dans les matrices aléatoires (un peu comme les vecteurs gaussiens en probabilité). Le modèle se trouve être beaucoup plus facile à analyser et on peut démontrer beaucoup plus de choses. Malheureusement les techniques utilisés sont rarement transposables pour des matrices plus générales.

**Question 9.** *Est-il possible de généraliser les théorèmes sur les matrices gaussiennes aux matrices non gaussiennes ?*

**Définition 10.** (Gaussian Orthogonal Ensemble, GOE) Soit  $M = \frac{1}{\sqrt{N}}X$  avec  $X_{ij} = X_{ji} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  et  $X_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 2)$ .

*Remarque 11.* La densité de  $X$

$$\rho(X) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i,j} X_{ij}^2\right) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Tr}(X^2)\right).$$

La loi de  $X$  est donc invariante par transformation orthogonal (d'où le nom GOE).

**Lemme 12.** *Pour tout  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  on a  $X \stackrel{\text{loi}}{=} OXO^t$ .*

*Démonstration.* On a  $\text{Tr}((OXO^t)^2) = \text{Tr}(X^2)$  et en notant  $X' = OXO^t$  le changement de variable  $dX'_{11} \cdots dX'_{NN} = (\det O)^{2N} dX_{11} \cdots dX_{NN} = dX_{11} \cdots dX_{NN}$ .  $\square$

**Définition 13.** (Gaussian Unitary Ensemble, GUE) Soit  $M = \frac{1}{\sqrt{N}}X$  avec  $X_{ij} = \overline{X_{ji}} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  et  $X_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 2)$ .

Ici  $\Re X_{ij}, \Im X_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1/2)$  et  $\mathbb{E}(|X_{ij}|^2) = 1$ . Dans cas ci La densité de  $X$

$$\rho(X) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(X^*X)\right).$$

La loi de  $X$  est donc invariante par transformation unitaire (d'où le nom GUE) : Pour tout  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$  on a  $X \stackrel{\text{loi}}{=} UXU^*$ .

#### 3.1 La loi jointe des valeurs propres

Loi des valeurs propre pour le GOE. La matrice étant symétrique on peut la diagonaliser en une base orthonormée

$$X = ODO^t, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Il y a quelques petits soucis avec l'application de diagonalisation  $X \rightarrow (O, D)$ . Tout d'abord telle quelle ce n'est pas vraiment bien définie car il faut définir

l'ordre des  $\lambda_j$  et si  $v_j$  est vecteur propre alors  $-v_j$  aussi. Et donc il y a aussi un choix à faire dans la construction de  $O$ . Tout ça n'est pas très grave. Un peu plus sérieux, est le cas où des valeurs propres sont dégénérées ( $\lambda_i = \lambda_j$ ). Dans ce cas il faudrait mieux parler d'espace propre (de dimension  $\geq 2$ ) que de valeurs propre. Cependant comme on a que  $\mathbb{P}(\lambda_i = \lambda_j, i \neq j) = 0$ , on admettra que l'on peut ignorer toutes ces soucis.

Commençons par le cas  $N = 2$ .

**Exemple 14.** Heuristique pour  $N = 2$ , supposons  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  fixé et calculons

$$\begin{aligned} ODO^t &= O \left( \left( \begin{array}{cc} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cc} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \end{array} \right) \right) O^t \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} O \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} O^t \end{aligned}$$

Le premier terme est juste une translation dans  $S_2(\mathbb{R})$  et le deuxième terme avec  $O = R(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  la matrice de rotation, est un cercle de rayon  $\lambda_1 - \lambda_2$  dans  $S_2(\mathbb{R})$ . On en déduit que le volume

$$|\{ODO^t, O \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})\}| \sim |\lambda_1 - \lambda_2|$$

et donc comme la densité de  $X$  ne dépend que de  $D$ , on s'attend donc que la loi de densité pour les  $D$  soit de la forme

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) = C |\lambda_1 - \lambda_2| \exp\left(-\frac{1}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\right).$$

On s'attend à une formule similaire dans un  $N$  général.

**Théorème 15.** (Loi jointe des valeurs propres du GOE) La loi des valeurs propres de  $M = \frac{X}{\sqrt{N}}$  est donnée par

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z} \left( \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \right) \exp\left(-\frac{N}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right).$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction test alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{Z} \int_{S_n(\mathbb{R})} f(X) \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Tr}(X^2)\right) dX$$

On fait le changement de variable  $X = ODO^t$ , on note  $\text{Jac}(O, D)$  la Jacobienne du changement de variable.

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^n} f(X) \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Tr}(D^2)\right) |\det \text{Jac}(O, D)| dO dD$$

Calculons cette jacobienne en  $D = D_0$  et  $O = I_n$ . Considérons petite perturbation  $D + \delta D$  et  $I + \delta A$ . On a que  $\delta A$  est antisymétrique au premier ordre. En effet

$$I = (I + \delta A)(I + \delta A)^t = I + (\delta A + \delta A^t) + o(\|\delta A\|)$$

et donc  $\delta A = -\delta A^t$ . On a alors

$$\begin{aligned} X + \delta X &= (I + \delta A)(D + \delta D)(I + \delta A)^t \\ &= D + \delta D + \delta A D + D \delta A^t + (\text{second ordre}) \end{aligned}$$

et donc au premier ordre  $\delta X = \delta D + \delta A D - D \delta A$  qui s'écrit ainsi

$$\delta X = \begin{pmatrix} \delta D_{11} & & (\lambda_j - \lambda_i)\delta A_{ij} \\ & \ddots & \\ (\lambda_j - \lambda_i)\delta A_{ij} & & \delta D_{NN} \end{pmatrix}$$

alors

$$dX_{11} \cdots dX_{NN} = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| dD_{11} \cdots dD_{NN} dA_{12} \cdots dA_{N-1 N}$$

Autrement dit la jacobienne est diagonale dans la base  $\{e_i e_i^*\}_{i \leq N} \cup \{e_i e_j^* + e_j e_i^*\}_{i \neq j \leq N}$  et on a

$$\det \text{Jac}(I, D) = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

Pour une matrice  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  général on a simplement  $\det \text{Jac}(O, D) = \det \text{Jac}(I, D) \times \det \text{Jac}(X \rightarrow OXO^t) = \det \text{Jac}(I, D)$ . Finalement

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^n} f(X) \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Tr}(D^2)\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| dO dD$$

et pour une fonction ne dépendant que du spectre  $f(X) = f(D)$  on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^n} f(D) \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Tr}(D^2)\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| dO dD \\ &= \frac{1}{Z'} \int_{\mathbb{R}^n} f(D) \exp\left(-\frac{1}{4} \text{Tr}(D^2)\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| dD \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(D) \rho(D) dD \end{aligned}$$

et on peut conclure en identifiant  $\rho(D)$  avec le terme de l'intégrale précédente.  $\square$

On peut faire le même calcul pour le GUE. La seule chose qui change est que  $\delta A$  est une matrice anti-hermitienne  $\delta A^* = -\delta A$  à la place d'antisymétrique.

En écrivant  $\delta A_{ij} = \Re \delta A_{ij} + i \Im \delta A_{ij}$  il y a deux fois plus de variable (réelles) à intégrer et le jacobien devient alors

$$\det \text{Jac}(I, D) = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2.$$

**Théorème 16.** (*Loi jointe des valeurs propres du GUE*) La loi des valeurs propres de  $M = \frac{X}{\sqrt{N}}$  est donnée par

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z} \left( \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \right) \exp \left( -\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \right).$$

*Remarque 17.* On peut écrire

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z} \exp \left( \beta \sum_{i < j} \log |\lambda_i - \lambda_j| - \frac{\beta N}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \right)$$

avec  $\beta = 1$  pour le GOE et  $\beta = 2$  pour le GUE.

Par analogie avec la physique statistique et la notion de “mesure de Gibbs”

$$\mathbb{P}(x) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E(x))$$

où  $E(x)$  est l’énergie du système et  $\beta = \frac{1}{T}$  l’inverse de la température. On peut voir les  $\lambda_i$  comme la position d’un ensemble de particules interagissant entre elles avec un potentiel en  $\log |\lambda_i - \lambda_j|$ . On parle souvent de “log-gaz” ou parfois aussi de “Coulomb-gas”. Sur  $\mathbb{R}^2$ , la solution de  $\Delta u = \delta_0$  est  $u(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|$ , et donc une interaction en log correspond à une interaction Coulombienne en dimension 2.

Plus généralement on parle de  $\beta$ -Ensemble lorsque l’on considère cette probabilité pour  $\beta > 0$ . (Mais sauf pour  $\beta = 1, 2, 4$  ces modèles ne décrivent des matrices aléatoires dont les entrées sont indépendantes.)

### 3.2 Tridiagonalisation

Une fois encore on utilisera la propriété essentielle que  $X \stackrel{\text{loi}}{=} OXO^t$ .

**Proposition 18.** Pour  $X \sim \text{GOE}$  on a

$$X = O \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & (0) \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & b_{n-1} \\ (0) & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} O^t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_i \sim \mathcal{N}(0, 2) \\ b_i^2 \sim \chi_{N-i}^2 \\ O \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R}) \end{cases}$$

et où  $(a_i), (b_i), O$  sont indépendants.

*Démonstration.* On écrit

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \boxed{X_{12} \cdots X_{1N}} \\ \boxed{X_{21}} & \\ \vdots & \\ X_{N1} & X^{(1)} \end{pmatrix},$$

Il existe une matrices  $O^{(1)} \in \mathcal{O}_{N-1}(\mathbb{R})$  tel que

$$O^{(1)} \begin{pmatrix} X_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{N1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } b_1 = \sqrt{X_{21}^2 + \cdots + X_{N1}^2}.$$

On alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & \boxed{X_{12} \cdots X_{1N}} \\ \boxed{X_{21}} & \\ \vdots & \\ X_{N1} & X^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (O^{(1)})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & \boxed{b_1 \ 0 \ \cdots} \\ \boxed{b_1} & \\ 0 & O^{(1)} X^{(1)} (O^{(1)})^t \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

On a alors  $X_{11} \sim \mathcal{N}(0, 2)$ ,  $b_1^2 \sim \chi_2^{N-1}$  (la somme de carrés de gaussiennes standards). La remarque importante est que  $O^{(1)} X^{(1)} (O^{(1)})^t$  suit une loi GOE et que celle ci est indépendante de  $X_{11}, b_1$  (et de  $O^{(1)}$ ). On peut itérer alors la construction sur  $O^{(1)} X^{(1)} (O^{(1)})^t$

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \begin{pmatrix} X_{11} & b_1 & 0 & \cdots \\ b_1 & & & \\ 0 & O^{(1)} X^{(1)} (O^{(1)})^t & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{11} & & b_1 & 0 & \cdots \\ b_1 & X_{22}^{(1)} & \boxed{b_2 \ 0 \ \cdots} & & \\ 0 & \boxed{b_2} & & & \\ \vdots & 0 & & O^{(2)} X^{(2)} (O^{(2)})^t & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & (0) \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & b_{n-1} \\ (0) & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tous les éléments ainsi construits sont indépendant. Les éléments de la diagonale suivent tous une loi  $\mathcal{N}(0, 2)$ . Puisque  $X^{(k)}$  n'est plus qu'une matrice de taille  $N - k$ , le vecteur colonne n'est plus que de taille  $N - k - 1$  et on a  $b_k^2 \sim$

$\chi_2^{N-k-1}$ . Enfin il est toujours possible de changer  $X \rightarrow OXO^t$  avec  $O$  une matrice uniforme du  $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$  sans changer la loi de  $X$ . Dans ce cas la matrice orthogonale qui apparaît dans la proposition est indépendante des  $a_i, b_i$  et est de loi uniforme sur  $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$ .  $\square$

Exemple d'application : Avec cette matrice et il est facile de recalculer les moments pour une matrice GOE. Pour  $N \gg 1$ , on a  $\frac{1}{\sqrt{N}}a_i \approx 0$  et  $\frac{1}{\sqrt{N}}b_i \approx \sqrt{1 - \frac{i}{N}}$ . Et donc  $\frac{1}{\sqrt{N}}X = M \sim \tilde{M} + o(1)$  avec

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}_1 & & (0) \\ \tilde{b}_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \tilde{b}_{n-1} \\ (0) & & \tilde{b}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_i = \sqrt{1 - \frac{i}{N}}.$$

Ainsi  $\frac{1}{N}\text{Tr}(M^\ell) = \frac{1}{N}\text{Tr}(\tilde{M}^\ell) + o(1)$  et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\text{Tr}(\tilde{M}^\ell) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{M}^\ell)_{ii} \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{b}_i)^\ell \times |\{\text{chemins de taille } \ell \text{ allant de } i \text{ à } i \text{ dans } \llbracket 1, N \rrbracket\}| \end{aligned}$$

Ceci donne 0 si  $\ell$  est impair et si  $\ell = 2k$  on a alors

$$\frac{1}{N}\text{Tr}(\tilde{M}^{2k}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{i}{N}\right)^k \binom{2k}{k} \approx \binom{2k}{k} \int_0^1 (1-t)^k dt = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

### 3.3 Introduction au processus ponctuel déterminantal

Soit  $\Omega$  ensemble fini, et on pourra identifier  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ . Un processus ponctuel aléatoire est la donné d'un sous-ensemble  $X \subseteq \Omega$  aléatoire.

**Définition 19.** Soit  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique (ou hermitienne) tel que  $0 \leq K \leq I_n$ . On dit que  $X$  est un processus ponctuel déterminantal (DPP) de noyau  $K$ , si pour tout  $S \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(S \subset X) = \det K_{SS}.$$

Par exemple :  $\mathbb{P}(x \in X) = K_{xx}$  et  $\mathbb{P}(\{x, y\} \subseteq X) = K_{xx}K_{yy} - K_{xy}K_{yx}$ .

**Exemple 20.**

1. On tire de manière indépendante sur chaque site  $x \in \Omega$  une variable de Bernoulli de paramètre  $p_x$  :  $\mathbb{P}(x \in X) = p_x$ . Ceci est un DPP de noyau  $K = \text{diag}((p_x))$
2. On tire un point  $X = \{x\}$  uniformément sur  $\Omega$ . C'est un DPP de noyau  $K_{xy} = \frac{1}{|\Omega|}, \forall x, y \in \Omega$ .

*Remarque 21.* Si les DPP forment une classe plus générale que les tirages aléatoires cela reste des processus assez restrictifs. En effet les fonctions à un point  $\mathbb{P}(x \in X)$  et deux points  $\mathbb{P}(\{x, y\} \subseteq X)$  déterminent le noyau  $K$  et donc complètement le processus. (On est donc très loin des  $2^n - 1$  paramètres pour décrire la loi d'un processus ponctuel général.)

*Remarque 22.* Si  $X \subseteq \Omega$  est un DPP alors la restriction  $X|_{\Omega'} \subseteq \Omega'$  est également un DPP pour tout  $\Omega' \subseteq \Omega$ .

On a également des formules pour la taille de  $X$ .

**Exercice 23.** Montrer que

1.  $\mathbb{E}(|X|) = \text{Tr}(K)$
2.  $\text{Var}(|X|^2) = \text{Tr}(K(I - K))$ .

Solution : On a directement que  $\mathbb{E}|X| = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{P}(x \in X) = \sum_{x \in \Omega} K_{xx} = \text{Tr}(K)$ . Pour la variance, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|(|X| - 1)) &= \mathbb{E} \left( \sum_{x \neq y} 1_{x \in X} 1_{y \in X} \right) = \sum_{x \neq y} \mathbb{P}(\{x, y\} \in X) \\ &= \sum_{x \neq y} K_{xx} K_{yy} - K_{xy} K_{yx} = \text{Tr}(K)^2 - \text{Tr}(K^2) \end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \text{Var}(|X|) &= \mathbb{E}(|X|^2) - \mathbb{E}(|X|)^2 \\ &= \mathbb{E}(|X|(|X| - 1)) + \text{Tr}(K) - \text{Tr}(K)^2 \\ &= \text{Tr}(K) - \text{Tr}(K^2) \end{aligned}$$

**Proposition 24.** Pour tout  $S \subseteq \Omega$ , on  $\mathbb{P}(S \cap X = \emptyset) = \det(I - K_{SS})$ .

*Démonstration.* (Formule d'inclusion/exclusion) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \cap X = \emptyset) &= \mathbb{E} \left[ \prod_{x \in S} (1 - 1_{x \in X}) \right] = \sum_{k \leq |S|} (-1)^k \sum_{V \subseteq S, |V|=k} \mathbb{E} \left[ \prod_{x \in V} 1_{x \in X} \right] \\ &= \sum_{k \leq |S|} (-1)^k \sum_{V \subseteq S, |V|=k} \det(K_{VV}) \\ &= \det(I - K_{SS}) \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, il s'agit d'une formule plus générale

$$\det(I + zK_{SS}) = \sum_{k \leq |S|} z^k \sum_{V \subseteq S, |V|=k} \det(K_{VV})$$

qui s'obtient en écrivant  $k_1, \dots, k_{|S|}$  les vecteurs colonnes de  $K$  et en utilisant la multilinéarité du déterminant  $\det(e_1 + zk_1, \dots, e_{|S|} + zk_{|S|})$ .  $\square$

*Remarque 25.* Les probabilités  $\mathbb{P}(S \cap X = \emptyset)$  caractérisent la loi du DPP.

**Définition 26.** On dit que  $X$  est un DPP de projection si  $K$  est un projecteur orthogonal.

Dans ce cas on a  $\mathbb{P}(|X| = \text{rang}(K)) = 1$ . En effet  $\mathbb{E}(|X|) = \text{Tr}(K) = \text{rang}(K)$  et  $\text{Var}(X) = \text{Tr}(K(I - K)) = 0$ .

Ces processus sont connus depuis longtemps en physique et sont essentielles en mécanique quantique. On parle alors de “fermions”, de “statistique de Fermi-Dirac” (principe d’exclusion de Pauli), de “déterminant de Slater”.

En diagonalisant le noyau (symétrique ou hermitien) on peut toujours écrire

$$K = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k v_k^*$$

avec  $0 \leq \lambda_k \leq 1$  les valeurs propres et  $v_k$  les vecteurs propres (une base orthonormée). On  $\lambda_k \in \{0, 1\}$  ssi c’est une projection. Terminons cette section par une question naturelle :

**Question 27.** *Étant donné un noyau  $K$ , existe-il un DPP associé ?*

Il se trouve que la réponse est oui.

**Proposition 28.** *Tout noyau  $K$  (symétrique et  $0 \leq K \leq I$ ) définit un DPP.*

Si un noyau  $K$  définit une probabilité  $\mathbb{P}(X = S)$ , ce n’est pas clair celle ci est bien positive pour tout  $S \subseteq \Omega$ . L’idée de la preuve consiste essentiellement à construire déjà les DPP de projections. Il est ensuite possible de les combiner pour construire les noyaux généraux.

### 3.4 Polynôme de Hermite et loi du GUE

On rappelle les fonctions de corrélations définies informellement par

$$”\rho_k(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k = \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^k \{X \cap [x_i, x_i + dx_i] \neq \emptyset\} \right) ”$$

**Définition 29.** On dit que  $X$  est un Processus Ponctuel Determinantal sur un espace continue  $\Omega$  si il existe un noyau  $K : \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (symétrique ou hermitien) tel que les fonctions de corrélations sont données par

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq k}$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ . On supposera aussi  $0 \leq K \leq I$  où  $K$  est identifié avec l’opérateur  $Kf(x) = \int_{\Omega} K(x, y)f(y)dy$ .

Cette définition est très similaire au cas discret, et ce que l’on aurait obtenu si on avait discrétisé  $\Omega$  en petites cellules de taille  $\epsilon$ , supposer un DPP discret, puis considérer la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 30.** Un Processus Ponctuel de Poisson de densité  $\rho$  est un DPP (continu) avec noyau  $K(x, x) = \rho(x)$  et  $K(x, y) = 0$  si  $x \neq y$ .

Le message principal de cette section est le suivant : La statistique des valeurs propres du GUE est un DPP (continue).

**Théorème 31.** *Les valeurs propres de  $X$  dans le cas GUE est un DPP (de projection) avec*

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(x) \psi_k^*(y)$$

où  $\psi_k$  sont les fonctions de Hermite ( $\psi_k(x) = c_k H_k(x) \exp(-\frac{x^2}{4})$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  et  $P_k$  les polynômes de Hermite).

On rappelle que les polynômes de Hermite sont définis comme

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

et qu'il forment une base orthonormée de polynôme pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ . On a donc bien

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_k(x) \psi_{k'}(x) dx = 1_{k=k'}$$

une famille orthonormée dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Preuve du Théorème 31 pour la  $N$ -fonction de corrélation.* On a

$$\rho_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right).$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde

$$\prod_{i < j} |x_i - x_j| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ P_1(x_1) & & P_1(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{N-1}(x_1) & \dots & P_{N-1}(x_N) \end{vmatrix}.$$

où  $P_k$  sont des polynômes de degré  $k$  unitaire. Cette dernière égalité est simplement des opérations sur les lignes du déterminant. On choisit  $P_k = H_k$  les polynômes de Hermite. On a alors

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} |x_i - x_j| \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) &= \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{4}x_1^2} & \dots & e^{-\frac{1}{4}x_N^2} \\ P_1(x_1)e^{-\frac{1}{4}x_1^2} & & P_1(x_N)e^{-\frac{1}{4}x_N^2} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{N-1}(x_1)e^{-\frac{1}{4}x_1^2} & \dots & P_{N-1}(x_N)e^{-\frac{1}{4}x_N^2} \end{vmatrix} \\ &= Z' \det(\psi_{i-1}(x_j))_{1 \leq i, j \leq N}. \end{aligned}$$

Notons  $M_{ij} = \psi_{i-1}(x_j)$ ,  $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et

$$(M^t M)_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(x_i) \psi_k(x_j) = K(x_i, x_j)$$

et finalement

$$\begin{aligned} \rho_N(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{Z} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \\ &= \det(M^t M) \\ &= \det(K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \end{aligned}$$

□

On a ainsi obtenu  $\rho_N$ . Il nous faut également vérifier que la formule du déterminant est valide pour tout les  $\rho_k$ ,  $1 \leq k \leq N - 1$ . Pour cela on utilisera

$$\int K(x, y) K(y, z) dy = K^2(x, z) = K(x, z), \quad \int K(x, x) dx = n$$

**Proposition 32.** *Un noyau  $K = \sum_{k=1}^n \psi_k \psi_k^*$  induit bien un processus déterminantal.*

*Démonstration.* Soit  $m \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \rho_m(x_1, \dots, x_m) &= \int \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_{m+1} \cdots dx_n \\ &= \int \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n K(x_i, x_{\sigma(i)}) dx_{m+1} \cdots dx_n \end{aligned}$$

On ne fera la preuve que pour le cas  $m = n - 1$

$$\begin{aligned} \rho_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_n \\ &= \sum_{\sigma(n)=n} \epsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^n K(x_i, x_{\sigma(i)}) dx_n + \sum_{\sigma(n) \neq n} \epsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^n K(x_i, x_{\sigma(i)}) dx_n \\ &= n \det(K(x_i, x_j)) + \sum_{\sigma(n) \neq n} \epsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^n K(x_i, x_{\sigma(i)}) dx_n \end{aligned}$$

Pour  $\sigma$  avec  $\sigma(i) = n$ ,  $\sigma(n) = j$  on définit  $\tilde{\sigma}(i) = j$  et  $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$  sinon. Chaque pré-image  $\tilde{\sigma}$  a  $(n - 1)$  antécédents  $\sigma$  (indexé par  $\sigma(n)$ ) et  $\epsilon(\sigma) = -\epsilon(\tilde{\sigma})$ . Finalement

$$\begin{aligned} \rho_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= n \det(K(x_i, x_j)) - (n - 1) \sum_{\tilde{\sigma}} \epsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^{n-1} K(x_i, x_{\tilde{\sigma}(i)}) \\ &= \det(K(x_i, x_j)) \end{aligned}$$

□

### 3.5 Déterminant de Fredholm.

On rappelle que pour une suite  $a_n \in (-1, 1)$  : on a l'équivalence (en utilisant le log)  $\sum_{n \geq 0} |a_n| < \infty \Leftrightarrow 0 < \prod_{n \geq 0} (1 - a_n) < \infty$ .

**Définition 33.** Pour  $K$  un opérateur de trace finie ( $\sum_{\lambda \in \sigma(K)} |\lambda| < \infty$ ), on appelle déterminant de Fredholm

$$\det(I - K) = \prod_{\lambda \in \sigma(K)} (1 - \lambda).$$

La condition est motivé par la remarque suivante : pour une suite  $a_n \in (-1, 1)$  : on a l'équivalence (en utilisant le log)  $\sum_{n \geq 0} |a_n| < \infty \Leftrightarrow 0 < \prod_{n \geq 0} (1 - a_n) < \infty$ .

**Proposition 34.** Soit  $X$  un DPP de noyau  $K$ , alors  $\mathbb{P}(X \cap I = \emptyset) = \det((I_d - K)|_I)$  pour tout  $I \subseteq \Omega$ .

**Corollaire 35.** Loi de la plus grande valeur propre du GUE est donné par

$$\mathbb{P}(\lambda_1^{GUE} \leq C) = \mathbb{P}([C, \infty[ \cap X = \emptyset) = \det((I - K)|_{[C, \infty[})$$

Pour finir, mentionnons une autre propriété sur les fonction de Hermite. Celle ci est très connu en physique quantique (l'oscillateur harmonique quantique).

**Proposition 36.** Les fonctions de Hermite  $\psi_n$  sont les vecteurs propres de  $H = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}X^2$ , de valeurs propre  $n + \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

On peut alors réécrire

$$K = 1_{-\Delta/2 + X^2/2 \leq N+1}$$

à comprendre comme “la projection orthogonal sur les l'espace engendré par les vecteurs propres de  $-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}X^2$  de valeurs propre  $\leq N + 1$ ”.

### 3.6 Statistique locale et loi de Tracy-Widom

On note  $P = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  les valeurs propre de  $M = \frac{1}{\sqrt{N}}X$  dans le cas GUE. On s'intéresse à la statistique locale des valeurs propre. On définit alors un processus “centré en  $x_0$  et dilaté de  $\Lambda > 0$ ”

$$P_{\Lambda, x_0} = \{\Lambda(x - x_0) : x \in P\}.$$

Pour  $x_0$  à l'intérieur de la loi du semi-cercle, on s'attend à ce que la distance typique entre deux valeurs propres soit  $\sim \frac{1}{N}$  (ou  $\frac{1}{N\rho_{s-c}(x_0)}$  pour être plus précis). On a la convergence de la statistique locale des valeurs propres.

**Théorème 37.** Soit  $x_0 \in (-2, 2)$ , alors

$$P_{N\rho_{s-c}(x_0), x_0} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{loi} P_{Sine}$$

où  $P_{Sine}$  est DPP de noyau

$$K(x, y) = \frac{\sin(x - y)}{x - y}.$$

*Preuve du Théorème 37.* Ici nous donnons juste une heuristique. Imaginons que l'on peut se ramener sur un voisinage de  $[\sqrt{N}(x_0 - \epsilon), \sqrt{N}(x_0 + \epsilon)]$  et que sur ce voisinage on puisse remplacer  $K = 1_{-\Delta/2 + X^2/2 \leq N+1}$  par

$$\tilde{K} = 1_{-\Delta \leq 2N(1-x_0^2)}$$

défini sur les fonctions  $L^2([-\sqrt{N}\epsilon, \sqrt{N}\epsilon])$ . Les valeurs propres de  $-\Delta$  sont  $\tilde{\phi}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon\sqrt{N}}} \exp(i\pi \frac{kx}{\sqrt{N}\epsilon})$  et de valeurs propres  $|\frac{\pi k}{\sqrt{N}\epsilon}|^2$ . On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, y) &= \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \phi_k(x) \phi_k^*(y) \\ &= \frac{1}{2\epsilon\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{k_{\max}-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{\epsilon\sqrt{N}}(x-y)\right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon\sqrt{N}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k_{\max}}{2\epsilon}(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\epsilon\sqrt{N}}(x-y)\right)} \\ &\approx \frac{\sin\left(\frac{\pi k_{\max}}{2\epsilon\sqrt{N}}(x-y)\right)}{\pi(x-y)} \\ &\approx \frac{\sin\left(\sqrt{N}\sqrt{4-x_0^2}(x-y)\right)}{\pi(x-y)} \\ &\approx \frac{\sin\left(\pi\sqrt{N}\mu_{\text{sc}}(x_0)(x-y)\right)}{\pi(x-y)} \end{aligned}$$

et on a  $|\frac{\pi k_{\max}}{\sqrt{N}\epsilon}|^2 \approx 2N(1-x_0^2)$  soit  $|\frac{\pi k_{\max}}{\sqrt{N}\epsilon}| \approx \sqrt{N}2 - \frac{x_0^2}{\sqrt{N}}$ .

C'est un DPP de noyau

$$K^P(x, y) = \sqrt{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(\sqrt{N}x) \psi_k^*(\sqrt{N}y).$$

C'est également DPP de noyau

$$K^{P_{\Lambda, x_0}}(x, y) = \frac{\sqrt{N}}{\Lambda} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k\left(\frac{\sqrt{N}}{\Lambda}(x+x_0)\right) \psi_k\left(\frac{\sqrt{N}}{\Lambda}(y+x_0)\right).$$

□

Le résultat précédent n'est pas valable pour  $x_0 \in \{-2, 2\}$ , là où la densité des valeurs propre s'annule. Il apparaît ici la fonction de Airy solution de l'équation différentielle

$$f''(x) - xf(x) = 0,$$

avec comme condition limite que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Théorème 38.** *Pour  $N \rightarrow \infty$ , la statistique locale des valeurs propres  $P_{N^{2/3}, 2}$  converge vers un DPP avec*

$$K_{Airy}(x, y) = \frac{Airy(x)Airy'(y) - Airy(y)Airy'(x)}{x - y}.$$

Mentionnons juste pourquoi on peut s'attendre à la fonction de Airy dans ce cas ci : En reprenant l'heuristique précédente  $\sqrt{N}(2+x)^2 - 4N \approx 4\sqrt{N}x$  et donc pour on s'attend plutôt à obtenir un noyau de la forme

$$K = 1_{-\Delta/2 + (\sqrt{N}(2+x))^2/2 \leq 2N+1} \rightarrow \tilde{K} = 1_{-\Delta \leq 4\sqrt{N}x}$$

Et donc après changement d'échelle l'opérateur  $-\Delta + x$

On peut alors obtenir la loi de la plus grande valeur propre "explicitement" :

**Corollaire 39.** *Pour le GUE on a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\lambda_1 \leq 2 + N^{2/3}t) = \det((I - K_{Airy})|_{[t, \infty[})$$

Ces statistiques de valeurs propres sont appelées "loi de Tracy-Widom" et forme actuellement un champs de recherche très actif.

## 4 Méthode Perturbatives (4ème cours, 2h)

### 4.1 Formule de la Résolvante

Commençons par une formule à la fois très simple mais qui se révèle incroyablement utile.

**Lemme 40.** *Formule de la Résolvante*

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1}.$$

Par exemple, si  $\|A^{-1/2}BA^{-1/2}\| < 1$ , on peut itérer la formule pour obtenir la série suivante

$$(A + B)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k A^{-1} \underbrace{BA^{-1} \dots A^{-1}BA^{-1}}_{k \text{ fois}}.$$

**Proposition 41.** *Si  $\lambda$  est une valeur propre isolé de  $A$ , alors pour  $\epsilon$  suffisamment petit*

$$\lambda(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \lambda^{(k)}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{1}{2i\pi k} \oint \text{Tr}((z - A)^{-1}B)^k dz$$

*est une valeur propre de  $A + \epsilon B$  et où l'intégrale complexe est un petit cercle entourant  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*

Dans le cas d'une matrice  $A$  diagonale et  $\lambda = \lambda_i$ . Les premières valeurs sont  $\lambda^{(1)}$  et  $\lambda^{(2)}$  sont les suivantes

$$\lambda^{(1)} = B_{ii} \quad \text{et} \quad \lambda^{(2)} = \sum_{j \neq i} \frac{B_{ij}B_{ji}}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

On peut les vérifier avec la formule générale

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{2i\pi} \oint \sum_j \frac{B_{jj}}{z - \lambda_j} dz = \sum_j \left( \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_{jj}}{z - \lambda_j} dz \right) = B_{ii}.$$

et

$$\lambda^{(2)} = \sum_j \left( \frac{1}{4\pi} \oint \frac{B_{jk}B_{kj}}{(\lambda_j - z)(\lambda_k - z)} dz \right) = \sum_{j \neq i} \frac{B_{ij}B_{ji}}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

*Preuve de la Proposition 41.* On a

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon) &= \frac{1}{2i\pi} \oint z \text{Tr}((z - A - \epsilon B)^{-1}) dz \\ &= \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \frac{1}{2\pi} \oint z \text{Tr}((z - A)^{-1} [B(z - A)^{-1}]^k) dz \\ &= \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \frac{1}{2\pi k} \oint \text{Tr}([B(z - A)^{-1}]^k) dz \end{aligned}$$

où on a utilisé une IPP pour la dernière ligne en utilisant que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Tr}([B(z - A)^{-1}]^k) &= \sum_{i=0}^{k-1} \text{Tr}([B(z - A)^{-1}]^i B(z - A)^{-2} [B(z - A)^{-1}]^{k-i-1}) \\ &= k \text{Tr}((z - A)^{-1} [B(z - A)^{-1}]^k) \end{aligned}$$

par cyclicité de la trace. □

*Remarque 42.* En règle général, on cherchera toujours à travailler avec la résolvante. Par exemple pour une fonction holomorphe  $f$  on peut utiliser la formule

$$f(H) = \frac{1}{2i\pi} \oint f(z)(H - z)^{-1} dz.$$

## 4.2 Résolvante et la loi du semi-cercle.

**Définition 43.** Soit  $\nu$  une mesure sur  $\mathbb{R}$ , On appelle la transformé de Stieltjes la fonction

$$\delta(z) = \int \frac{1}{x - z} d\nu, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Par exemple avec  $\mu_H = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$  la mesure spectrale on a

$$\delta(z) = \int \frac{1}{x - z} d\mu_H(x) = \frac{1}{N} \text{Tr}(H - z)^{-1}$$

**Lemme 44.** *Pour la loi du semi-cercle*

$$m(z) = \int \frac{1}{x-z} d\mu_{sc}(x) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

Remarquer que  $m$  est solution de  $m^2 + zm + 1 = 0$ . On peut proposer une nouvelle preuve pour la loi du semi-cercle : démontrer que pour

$$g(z) = \frac{1}{N} \text{Tr}(H - z)^{-1}$$

on a  $g(z)^2 + zg(z) + 1 = o(1)$ .

Cas du GOE. Avec la matrice tridiagonale,

$$\tilde{M} - z = \begin{pmatrix} -z & \boxed{\tilde{b}_1} & 0 & \cdots \\ \boxed{\tilde{b}_1} & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \tilde{b}_{n-1} \\ \vdots & & \tilde{b}_{n-1} & -z \end{pmatrix},$$

On va estimer  $(\tilde{M} - z)_{11}^{-1}$  avec la formule de complément de Schur.

**Lemme 45.** *(Complément de Schur)*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} G & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

alors  $G = (A - BD^{-1}C)^{-1}$ .

*Démonstration.* On résout

$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AX + BY = U \\ CX + DY = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AX + B(-D^{-1}CX + D^{-1}V) = U \\ Y = -D^{-1}CX + D^{-1}V \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} X = (A - BD^{-1}C)^{-1}U + * \\ Y = * + * \end{cases}$$

□

Avec  $\tilde{b}_1 = 1$  et  $\tilde{M}^{(1)}$  la sous matrice bloc de  $\tilde{M}$  on obtient

$$h(z) = (\tilde{M} - z)_{11}^{-1} = \frac{1}{-z - (\tilde{M}^{(1)} - z)_{22}^{-1}}.$$

La matrice  $\tilde{M}^{(1)}$  est très similaire à  $\tilde{M}$  et on admettra que  $(\tilde{M} - z)_{11}^{-1} \approx (\tilde{M}^{(1)} - z)_{22}^{-1}$ . On obtient alors

$$h(z) \approx \frac{1}{-z - h(z)}$$

et  $h(z)^2 + zh(z) + 1 \approx 0$ . On en déduit  $(H - z)_{11}^{-1} \approx (\tilde{M} - z)_{11}^{-1} \approx m(z)$ . Par invariance avec  $H \rightarrow OHO^t$ , on a la même chose pour  $(H - z)_{kk}^{-1}$ , pour tout  $k$ . Et donc  $\frac{1}{N} \text{Tr}(H - z)^{-1} \approx m(z)$ .

Cette méthode de preuve peut-être généralisée avec

$$H - z = \begin{pmatrix} H_{11} - z & \boxed{H_{12} \quad \cdots \quad H_{1N}} \\ \boxed{H_{21}} & \\ \vdots & \\ H_{N1} & H^{(1)} - z \end{pmatrix},$$

et on alors

$$(H - z)_{11}^{-1} = \frac{1}{-z - \sum_{i,j=2}^N H_{1i}(H^{(1)} - z)_{ij}^{-1} H_{j1}}.$$

Il s'agit de montrer

$$\sum_{i,j=2}^N H_{1i}(H^{(1)} - z)_{ij}^{-1} H_{j1} \approx \frac{1}{N} \text{Tr}(H - z)^{-1} = g(z).$$

Ce qui peut se faire avec des théorèmes de concentration généraux.

### 4.3 Transition BBP

On considère une perturbation de rang 1 de la matrice aléatoire

$$M = H + \alpha uu^*,$$

$\alpha \geq 0$ . On rappelle la propriété d'entrelacement.

**Lemme 46.** (*Interlacing*)

1. Pour  $M$  comme ci dessus,

$$\lambda_N(H) \leq \lambda_N(M) \leq \lambda_{N-1}(H) \leq \cdots \leq \lambda_1(M) \leq \lambda_1(H).$$

2. Pour  $H^{(1)} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$  une sous-matrice de  $H$

$$\lambda_N(H) \leq \lambda_{N-1}(H^{(1)}) \leq \lambda_{N-1}(H) \leq \cdots \leq \lambda_1(H^{(1)}) \leq \lambda_1(H).$$

*Démonstration.* On a

$$\lambda_k(M) = \inf_{\dim V = k-1} \sup_{v \perp V, \|v\|=1} \langle v, Mv \rangle.$$

Puisque  $\langle v, Mv \rangle = \langle v, Hv \rangle + \alpha |\langle u, v \rangle|^2 \geq \langle v, Hv \rangle$  on obtient que  $\lambda_k(M) \geq \lambda_k(H)$  pour tout  $k$ . Soit  $W$  tel que

$$\lambda_k(H) = \sup_{v \perp W, \|v\|=1} \langle v, Hv \rangle.$$

En choisissant  $W' = W + \text{Vect}(u)$  on a

$$\lambda_{k+1}(M) \leq \sup_{v \perp W', \|v\|=1} \langle v, Mv \rangle = \sup_{v \perp W', \|v\|=1} \langle v, Hv \rangle \leq \sup_{v \perp W, \|v\|=1} \langle v, Hv \rangle = \lambda_k(H).$$

La preuve fonctionne de la même manière pour une sous matrices  $H^{(1)}$ .  $\square$

En conclusion la distribution globale des valeurs propres de  $H$  n'est pas modifiée et la loi du semi-cercle reste donc valide pour  $M$ . Il reste la question de la plus grande valeur propre.

**Théorème 47.** (*Transition BBP*) Soit  $\alpha \geq 0$ ,  $\|u\| = 1$ . Sous des hypothèses de moment pour les entrées de  $H$  on a

$$\lambda_1(H + \alpha uu^*) = \begin{cases} 2 + o_{\mathbb{P}}(1) & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} + o_{\mathbb{P}}(1) & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

*Démonstration.* Méthode 1 Dans le cas GOE : On considère  $u = e_1$  et  $M$  notre matrice tridiagonale

$$M + \alpha uu^* = \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{b}_1 & & \\ \tilde{b}_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \tilde{b}_{N-1} \\ & & \tilde{b}_{N-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Étudier cette matrice.

Méthode 2 : Avec la formule de la résolvante

$$\begin{aligned} (H - z + \alpha e_1 e_1^*)_{11}^{-1} &= (H - z)_{11}^{-1} - [\alpha (H - z)^{-1} e_1 e_1^* (H - z + \alpha e_1 e_1^*)^{-1}]_{11} \\ &= (H - z)_{11}^{-1} - \alpha (H - z)_{11}^{-1} (H - z + \alpha e_1 e_1^*)_{11}^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$(H - z + \alpha e_1 e_1^*)_{11}^{-1} = \frac{(H - z)_{11}^{-1}}{1 + \alpha (H - z)_{11}^{-1}} \approx \frac{m(z)}{1 + \alpha m(z)}.$$

On cherche  $z > 2$  qui est une valeur propre lorsque  $(H - z + \alpha e_1 e_1^*)_{11}^{-1} = \infty$ ,

$$0 = 1 + \alpha m(z) = 1 + \alpha \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

On alors

$$\begin{aligned} 2 - \alpha z &= -\alpha \sqrt{z^2 - 4}, & \Rightarrow & \quad 4 - 4\alpha z + \alpha^2 z^2 = \alpha^2 z^2 - 4\alpha^2 \\ & & \Rightarrow & \quad \alpha z - 1 = \alpha^2 \end{aligned}$$

et donc  $z = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ .  $\square$

## 4.4 Mouvement Brownien de Dyson

On s'intéresse maintenant à une matrice aléatoire dépendante du temps

$$B(t) = (B_{ij}(t))_{ij}$$

avec  $B_{ij}(t)$  des mouvements Brownien indépendants. Pour tout  $t > 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{Nt}}B(t)$  suit une loi GOE. On s'intéresse à la dynamique des valeurs propres pour ce modèle.

**Théorème 48.** (*Mouvement Brownien de Dyson (MBD)*) Les valeurs propres de  $B(t)$ ,  $\lambda_1(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$  suivent l'évolution stochastique

$$d\lambda_i(t) = d\tilde{B}_i(t) + \left( \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \right) dt$$

où  $\tilde{B}_i$  sont des mouvements brownien indépendants. .

*Démonstration.* On note

$$\lambda_i(t) = f(B_{11}(t), \dots, B_{NN}(t)).$$

Pour une petite perturbation  $B \rightarrow B + \delta B$ , avec la proposition 41 on a

$$\vec{\nabla} f(\delta B) = \langle v_i, \delta B v_i \rangle \quad \text{et} \quad Hf(\delta B, \delta B) = \sum_{j \neq i} \frac{\langle v_i, \delta B v_j \rangle^2}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

avec  $Hf$  la hessienne de  $f$ . On observe que  $d\tilde{B}_{ij} = \langle v_i, dB_{ij} v_j \rangle$  forment une famille de mouvement brownien indépendants. En effet toujours par invariance de la loi GOE,  $O(dB)O^t$  suit la même loi que  $dB$  et on choisit  $O$  donnant la base orthogonal des  $(v_i)$ . On utilise alors la formule d'Ito

$$\begin{aligned} d\lambda_i(t) &= \nabla f(dB) + \frac{1}{2} Hf(\langle dB, dB \rangle) \\ &= d\tilde{B}_i(t) + \left( \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \right) dt \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $\langle d\tilde{B}_{ij}, d\tilde{B}_{ij} \rangle = dt$ . □

*Remarque 49.* La loi des valeurs propres du GOE, à un changement d'échelle près, est invariante par l'évolution du MBD

$$\rho_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \exp \left( -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \right).$$

Il se trouve qu'une formule similaire apparaît pour d'autres matrices suivant l'évolution de MBD.

$$M(t) = M(0) + B(t)$$

On rappelle que pour un processus stochastique  $dX = Vdt + dB$  on a l'équation de "semi-groupe de Markov" :

$$\partial_t \mathbb{E}(f(X(t))) = \mathbb{E}(\mathcal{L}f(X(t)))$$

avec  $\mathcal{L} = V \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{2} \Delta$ . En notant  $\rho_t$  la densité de  $X_t$  on a alors

$$\partial_t \mathbb{E}(f(X(t))) = \partial_t \int \rho_t(x) f(x) dx = \int \partial_t \rho_t(x) f(x) dx$$

et

$$\mathbb{E}(\mathcal{L}f(X(t))) = \int \rho_t(x) \mathcal{L}f(x) dx = \int \mathcal{L}^* \rho_t(x) f(x) dx$$

où  $\mathcal{L}^* \rho_t = -\vec{\nabla}(V \rho_t) + \frac{1}{2} \Delta \rho_t$ . Ceci étant valide pour toute fonction  $f$  on obtient que

$$\partial_t \rho_t = -\vec{\nabla}(V \rho_t) + \frac{1}{2} \Delta \rho_t.$$

Dans le cas du MBD pour les valeurs propre de la matrice  $M(t)$  on a

$$\partial_t \rho_t = - \sum_{i=1}^N \frac{d}{d\lambda_i} \left[ \left( \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \right) \rho_t \right] + \frac{1}{2} \Delta \rho_t.$$

On écrit  $\rho_t$  sous la forme.

$$\rho_t(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \left( \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \right) \tilde{\rho}_t(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (1)$$

**Exercice 50.** Montrer que  $\partial_t \tilde{\rho} = \frac{1}{2} \Delta \tilde{\rho}$ .

Il s'agit de remarquer que  $\frac{d}{d\lambda_i} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \right)$   
La densité  $\tilde{\rho}_t$  est alors simplement donnée par une convolution gaussienne

$$\tilde{\rho}_t = \mathcal{G}_t \star \tilde{\rho}_0, \quad \mathcal{G}_t(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^N \exp \left( -\frac{\|x\|^2}{2t} \right)$$

Et avec (1) on a ainsi la densité  $\rho_t$  pour tout  $t$ . Remarquer que lorsque  $\rho_0$  converge vers un Dirac en 0, ( $M(0) = 0$ ) on retrouve bien la loi du GOE.

## 5 Grandes Déviations (fin du cours, 1h)

### 5.1 Autour de la loi du GOE ou GUE

Commençons par une simple remarque, la loi des valeurs propres peut se réécrire

$$\begin{aligned}\rho_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \frac{1}{Z} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \exp\left(-\frac{\beta N}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right) \\ &= \exp\left(\beta N^2 \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| - \frac{1}{4N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 + \mathcal{C}\right)\right).\end{aligned}$$

avec  $\mathcal{C} = \frac{\log Z}{\beta N^2}$ .

**Définition 51.** Pour  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}$ , on appelle énergie du log-gaz la quantité

$$\mathcal{E}(\mu) = - \iint_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| d\mu(x) d\mu(y) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) - \mathcal{C}$$

À peu de chose près (la condition  $i \neq j$  de la somme) on pour  $\mu_H = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$

$$\rho_N(\mu_H) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta N^2 \mathcal{E}(\mu_H)).$$

**Exercice 52.** La loi du semi-cercle minimise  $\mathcal{E}(\mu)$ .

On note  $d_1$  la distance sur les mesure définies par

$$d_1(\mu, \nu) = \sup_{f \text{ 1 Lipschitz}} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

**Théorème 53.** (Grande déviation pour la mesure spectral) Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\frac{1}{\beta N^2} \log \mathbb{P}(d_1(\mu_H, \mu) \leq \epsilon) = -\mathcal{E}(\mu) + o_{\epsilon, N}(1)$$

où  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} o_{\epsilon, N}(1) = 0$ .

Idée de la preuve : On peut toujours encadrer

$$\exp\left(-\beta N^2 \sup_{\mu \in A} \mathcal{E}(\mu)\right) \times V(A) \leq \mathbb{P}(\mu_H \in A) \leq \exp\left(-\beta N^2 \inf_{\mu \in A} \mathcal{E}(\mu)\right) \times V(A)$$

avec  $V(A) = \text{Volume}(A)$ . On peut considérer  $A$  comme un sous ensemble (une petite boule) de  $\mathbb{R}^N$ , et dont le volume se comporte comme

$$\text{Volume}(A) \approx (\dots)^N.$$

Alors  $\lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2} \log \text{Volume}(A) = 0$ . Autrement dit, seul le terme en  $\exp(-\beta N^2 \mathcal{E}(\mu))$  reste important à la limite. En choisissant des  $A$  de plus en plus petit de tel sorte à ce que  $|\sup_{\mu \in A} \mathcal{E}(\mu) - \inf_{\mu \in A} \mathcal{E}(\mu)| \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . On obtient ainsi le résultat.

Une conséquence directe est que la probabilité d'observé une mesure spectrale loin de la loi du semi-cercle est extrêmement petite pour  $N \gg 1$  car décroissante comme  $\asymp \exp(-cN^2)$ .

Mentionnons aussi un résultat de grande déviation pour la plus grande valeur propre

**Théorème 54.** (*Grande déviation pour la plus grande valeur propre*) Soit  $x > 2$  alors

$$\frac{1}{\beta N} \log \mathbb{P}(\lambda_1(H) \in [x - \epsilon, x + \epsilon]) = -\mathcal{I}(x) + o_{\epsilon, N}(1)$$

où  $\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2} \int_2^x \sqrt{t^2 - 4} dt$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} o_{\epsilon, N}(1) = 0$ .

Idée de la preuve/heuristique : Les valeurs propres  $\lambda_N \leq \dots \leq \lambda_2$  se répartissent sur  $[-2, 2]$  selon la loi du semi-cercle. Et on peut comparer

$$\frac{\rho_N(\lambda_1 = x, \lambda_2, \dots, \lambda_N)}{\rho_N(\lambda_1 = 2, \lambda_2, \dots, \lambda_N)} = \exp \left( \beta N \left( \frac{1}{N} \sum_{j \neq 1} (\log |x - \lambda_j| - \log |2 - \lambda_j|) - \frac{1}{4} (x^2 - 2^2) \right) \right)$$

Avec une somme de Riemann cela donnera  $\approx \exp(-\beta N \mathcal{F}(x))$  où

$$\mathcal{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} (\log(x - y) - \log(x - y)) d\mu_{\text{sc}}(y) - \frac{x^2}{4} + 1.$$

et on trouve après calculs  $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \int_2^x \sqrt{t^2 - 4} dt$ .

## 5.2 Résultats Généraux de concentration de la mesure

**Théorème 55.** [Talagrand] Soit  $X_1, \dots, X_n$  indépendant avec  $|X_i| \leq 1$ , et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, 1-Lipschitzienne pour la norme  $\|\cdot\|_2$  ) Alors

$$\mathbb{P}(|f(X) - \text{median}(f(X))| \geq t) \leq C \exp(-ct^2)$$

avec  $c, C$  des constantes universelle.

Ce théorème est très utile en probabilité car extrêmement général. En particulier en matrice aléatoire on a les applications suivantes.

- La norme  $M \rightarrow \|M\|$  est une application convexe et 1 Lipschitzienne. On en déduit alors directement que pour une matrice à entrées bornées, la norme (et la plus grande valeur propre) se concentre autour de sa médiane avec une borne sur la probabilité en  $\exp(-cN\epsilon^2)$ .
- Si  $f$  est convexe et 1-Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ . Alors l'application  $M \rightarrow \frac{1}{N} \text{Tr}(f(M))$  est convexe et 1 Lipschitzienne. On en déduit alors directement la convergence pour toute une famille de fonction test de  $\int f(x) d\mu_H(x)$ . Et donc que la mesure spectral se concentre autour d'une mesure limite avec une borne sur la probabilité en  $\exp(-cN^2\epsilon)$ .

Pour la dernière affirmation il s'agit du Lemme de Klein et du Lemme suivant

**Lemme 56.**  $\frac{d}{dt} \text{Tr}(f(A + tB)) = \text{Tr}(Bf'(A))$

*Démonstration.* Si  $f(x) = x^k$ , on

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}((A + tB)^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{Tr}(A^i B A^{k-i-1}) = k \text{Tr}(B A^{k-1}).$$

On peut alors étendre cette relation aux polynômes et par approximation aux fonctions lisses.  $\square$

## Validation du cours

Cette introduction aux matrices aléatoires a été donnée en parallèle d'un cours sur le Modèle d'Anderson. La validation du cours a consisté en une présentation orale des élèves traitant un des articles ou chapitres de livre suivant.

- Random matrices
  - (Large deviations) <https://michel.talagrand.net/preprints/> "A new look at independence" (+ <https://www.concours-centrale-supelec.fr/sites/default/files/documents/M007.pdf> un sujet de Central?!!)
  - (Free probabilities) <https://rolandspeicher.com/wp-content/uploads/2019/08/free-probability.pdf> (Section 1,2 et 7) et <https://terrytao.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/02/matrix-book.pdf> (Section 2.5)
  - (Circular law) <https://arxiv.org/pdf/1109.3343> (Premiers sections)
  - (Zeta function) <https://seminaire-poincare.pages.math.cnrs.fr/keating.pdf>
- Between random matrices and Anderson model
  - The Phase Transition in the Ultrametric Ensemble and Local Stability of Dyson Brownian Motion, Per von Soosten, Simone Warzel, (<https://arxiv.org/abs/1705.00923>)
- Anderson model
  - The multiscale approach of the localized phase of the Anderson model : chapter 10 and 11 of <https://arxiv.org/abs/0709.3707>
  - Localization for 1D Anderson model : chapter 12 of the book by Aizenman Warzel "Random operators" (It is in the library I think, or I have a numerical version, please ask). With possible prolongation to the tree model, or other books.
  - The eigenvalue point process : Chapter 17 of the book by Aizenman Warzel "Random operators"