

Sur les algèbres de Nakayama

Eirini Chavli

Universität Stuttgart

11 mars 2025

Travail commun avec René Marczinzik

Algèbres de Nakayama

Soit R un anneau artinien commutatif. Soit A une R -algèbre qui est finiment engendrée comme R -module.

Algèbres de Nakayama

Soit R un anneau artinien commutatif. Soit A une R -algèbre qui est finiment engendrée comme R -module.

Objectif : Classifier les A -modules indécomposables de type fini

Algèbres de Nakayama

Soit G un groupe et F un corps.

- Soit FG de type de représentation fini.

mod FG /projectifs

Algèbres de Nakayama

Soit G un groupe et F un corps.

- Soit FG de type de représentation fini.

$$\text{mod } FG/\text{projectifs} \simeq \text{mod } A/\text{projectifs},$$

où A est une algèbre de Nakayama

Algèbres de Nakayama

Soit G un groupe et F un corps.

- Soit FG de type de représentation fini.

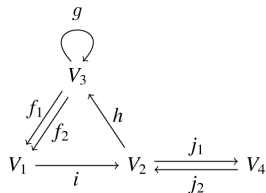
$$\text{mod } FG/\text{projectifs} \simeq \text{mod } A/\text{projectifs},$$

où A est une algèbre de Nakayama

- Si $\text{car}(F) = p \neq 0$ et G admet un p -sous-groupe de Sylow normal, alors FG est une algèbre de Nakayama

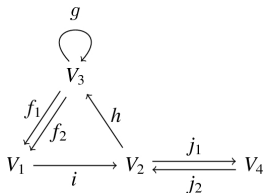
Carquois

Un **carquois** fini Q est un graphe orienté composé d'un nombre fini de sommets et d'un nombre fini de flèches : les boucles et les flèches multiples sont autorisées. Une flèche va d'un sommet (sa source) à un sommet (son but).



Carquois

Un **carquois** fini Q est un graphe orienté composé d'un nombre fini de sommets et d'un nombre fini de flèches : les boucles et les flèches multiples sont autorisées. Une flèche va d'un sommet (sa source) à un sommet (son but).



Un **chemin de longueur** $n \geq 1$ de Q est une suite finie de flèches $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, telle que le but de α_i est la source de α_{i+1} , pour $1 \leq i \leq n - 1$. On écrit $p = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$.

Chaque sommet de Q est un **chemin de longueur 0**.

La source de p est la source de α_1 et le but de p est le but de α_n .

Exemples

$V_1, h, j_2 h g f_1 i$.

Algèbre de chemins

Soit Q un carquois et soient p et q deux chemins de Q . On définit une **multiplication** $p \cdot q$:

Algèbre de chemins

Soit Q un carquois et soient p et q deux chemins de Q . On définit une **multiplication** $p \cdot q$:

$p \cdot q$ est la concaténation si le but de p est la source de q , et on écrit $p \cdot q = 0$ l'objet nul sinon.

Algèbre de chemins

Soit Q un carquois et soient p et q deux chemins de Q . On définit une **multiplication** $p \cdot q$:

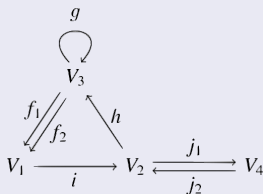
$p \cdot q$ est la concaténation si le but de p est la source de q , et on écrit $p \cdot q = 0$ l'objet nul sinon. Alors, 0 est un nouvel élément, appelé le **chemin zéro**.

Algèbre de chemins

Soit Q un carquois et soient p et q deux chemins de Q . On définit une **multiplication** $p \cdot q$:

$p \cdot q$ est la concaténation si le but de p est la source de q , et on écrit $p \cdot q = 0$ l'objet nul sinon. Alors, 0 est un nouvel élément, appelé le **chemin zéro**.

Exemple



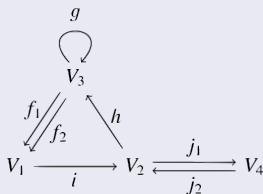
Soient $p = i j_1$ et $q = j_2$. Alors $p \cdot q = i j_1 j_2$ and $q \cdot p = 0$.

Algèbre de chemins

Soit Q un carquois et soient p et q deux chemins de Q . On définit une **multiplication** $p \cdot q$:

$p \cdot q$ est la concaténation si le but de p est la source de q , et on écrit $p \cdot q = 0$ l'objet nul sinon. Alors, 0 est un nouvel élément, appelé le **chemin zéro**.

Exemple



Soient $p = i j_1$ et $q = j_2$. Alors $p \cdot q = i j_1 j_2$ and $q \cdot p = 0$.

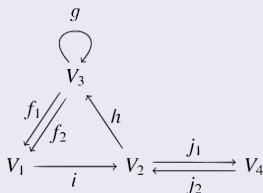
Soit K un corps. L'**algèbre de chemins** KQ d'un carquois Q est le K -espace vectoriel, dont la K -base est donnée par les chemins de Q .

Algèbre de chemins

Soit Q un carquois et soient p et q deux chemins de Q . On définit une **multiplication** $p \cdot q$:

$p \cdot q$ est la concaténation si le but de p est la source de q , et on écrit $p \cdot q = 0$ l'objet nul sinon. Alors, 0 est un nouvel élément, appelé le **chemin zéro**.

Exemple



Soient $p = i j_1$ et $q = j_2$. Alors $p \cdot q = i j_1 j_2$ and $q \cdot p = 0$.

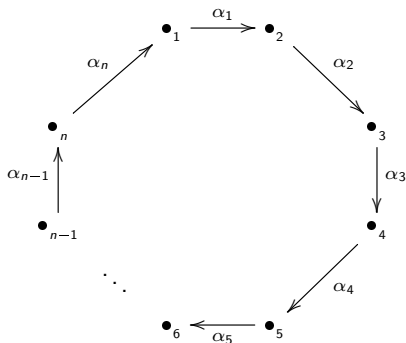
Soit K un corps. L'**algèbre de chemins** KQ d'un carquois Q est le K -espace vectoriel, dont la K -base est donnée par les chemins de Q .

L'unité multiplicative d'une algèbre de chemins est la somme des éléments de base correspondants à chaque sommet.

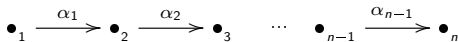
Algèbres de Nakayama

Soit K un corps.

Soit Q le carquois cyclique ou le carquois linéaire :



OU



Algèbres de Nakayama

Soit Q le carquois cyclique ou le carquois linéaire (avec n sommets).

Soit J l'idéal de KQ engendré par toutes les flèches.

Algèbres de Nakayama

Soit Q le carquois cyclique ou le carquois linéaire (avec n sommets).

Soit J l'idéal de KQ engendré par toutes les flèches.

Soit I un idéal de KQ , tel que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$, pour un $m \geq 2$.

Algèbres de Nakayama

Soit Q le carquois cyclique ou le carquois linéaire (avec n sommets).

Soit J l'idéal de KQ engendré par toutes les flèches.

Soit I un idéal de KQ , tel que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$, pour un $m \geq 2$.

L'algèbre de Nakayama associée à I est l'algèbre $A_n(I) := KQ/I$.

Algèbres de Nakayama

Soit Q le carquois cyclique ou le carquois linéaire (avec n sommets).

Soit J l'idéal de KQ engendré par toutes les flèches.

Soit I un idéal de KQ , tel que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$, pour un $m \geq 2$.

L'algèbre de Nakayama associée à I est l'algèbre $A_n(I) := KQ/I$.

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$

On a toujours $J^4 = 0$, alors I est un idéal engendré par des combinaisons linéaires de chemins de longueur au moins 2.

Algèbres de Nakayama

Soit Q le carquois cyclique ou le carquois linéaire (avec n sommets).

Soit J l'idéal de KQ engendré par toutes les flèches.

Soit I un idéal de KQ , tel que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$, pour un $m \geq 2$.

L'algèbre de Nakayama associée à I est l'algèbre $A_n(I) := KQ/I$.

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$

On a toujours $J^4 = 0$, alors I est un idéal engendré par des combinaisons linéaires de chemins de longueur au moins 2.

- $KQ / \langle 0 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle$

Algèbres de Nakayama

Soit KQ l'algèbre de chemins du carquois cyclique ou du carquois linéaire avec n sommets.

Soit J l'idéal de KQ engendré par toutes les flèches.

Soit I un idéal de KQ , tel que $J^m \subseteq I \subseteq J^2$, pour un $m \geq 2$.

L'algèbre de Nakayama associée à I est l'algèbre $A_n(I) := KQ/I$.

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$

On a toujours $J^4 = 0$, alors I est un idéal engendré par des combinaisons linéaires de chemins de longueur au moins 2.

- $KQ / \langle 0 \rangle$
 - $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$
 - $KQ / \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
 - $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
 - $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
- } nombre de Catalan $C_3 = \frac{1}{3+1} \binom{2 \cdot 3}{3}$ fait général

Séries de Kupisch

La **série de Kupisch** d'une algèbre de Nakayama $A_n(I)$ est la suite d'entiers positifs $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, où c_i est le nombre de chemins de source i .

Séries de Kupisch

La **série de Kupisch** d'une algèbre de Nakayama $A_n(I)$ est la suite d'entiers positifs $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, où c_i est le nombre de chemins de source i .

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$

- $KQ / \langle 0 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3 \rangle$
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle$

Séries de Kupisch

La **serie de Kupisch** d'une algèbre de Nakayama $A_n(I)$ est la suite d'entiers positifs $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, où c_i est le nombre de chemins de source i .

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$

- $KQ / \langle 0 \rangle$ [4, 3, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$ [2, 3, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ [3, 2, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ [2, 2, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ [3, 3, 2, 1]

Séries de Kupisch

La **serie de Kupisch** d'une algèbre de Nakayama $A_n(I)$ est la suite d'entiers positifs $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, où c_i est le nombre de chemins de source i .

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$

- $KQ / \langle 0 \rangle$ [4, 3, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$ [2, 3, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ [3, 2, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ [2, 2, 2, 1]
- $KQ / \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle$ [3, 3, 2, 1]

Théorème [Frank-Fuller 1992] : La série de Kupisch de $A_n(I)$ détermine de manière unique l'algèbre $A_n(I)$.

À partir de maintenant, Q est le carquois linéaire avec n sommets.

Chemins de Dyck

Un n -chemin de Dyck \mathcal{D} est un chemin de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ du point $(0, 0)$ au point $(2n, 0)$ avec n montées $u = (1, 1)$ et n descentes $d = (1, -1)$ qui ne passe jamais en dessous $y = 0$.



Figure: Un 11-chemin de Dyck

Chemins de Dyck

Un n -chemin de Dyck \mathcal{D} est un chemin de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ du point $(0, 0)$ au point $(2n, 0)$ avec n montées $u = (1, 1)$ et n descentes $d = (1, -1)$ qui ne passe jamais en dessous $y = 0$.



Figure: Un 11-chemin de Dyck

On écrit $\mathcal{D} = u^{m_1} d^{n_1} u^{m_2} d^{n_2} \dots$.

Exemple de figure : $\mathcal{D} = u^3 d^2 u^2 d^3 u^4 d^2 u^2 d^4$.

Chemins de Dyck

Un n -chemin de Dyck \mathcal{D} est un chemin de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ du point $(0,0)$ au point $(2n,0)$ avec n montées $u = (1,1)$ et n descentes $d = (1,-1)$ qui ne passe jamais en dessous $y = 0$.



Figure: Un 11-chemin de Dyck

On écrit $\mathcal{D} = u^{m_1} d^{n_1} u^{m_2} d^{n_2} \dots$.

Exemple de figure : $\mathcal{D} = u^3 d^2 u^2 d^3 u^4 d^2 u^2 d^4$.

Théorème [Ringel 2013] : Il y a une bijection entre l'ensemble des algèbres de Nakayama $A_{n+1}(I)$ et l'ensemble des n -chemins de Dyck.

Chemins de Dyck

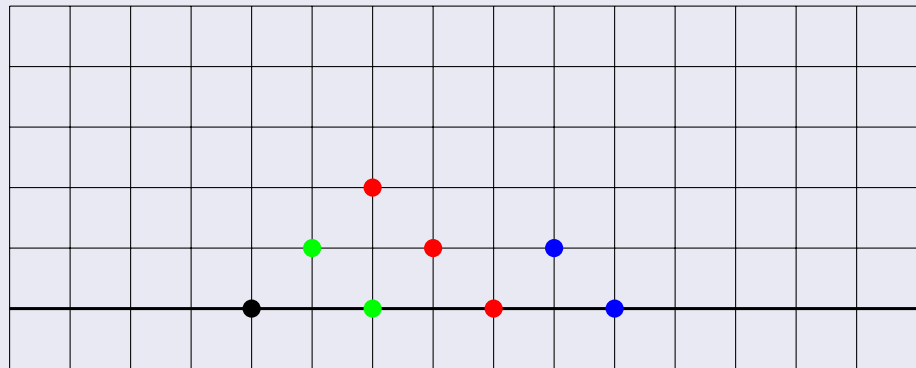
Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$ et $KQ/\langle \alpha_1\alpha_2 \rangle$ de série de Kupisch $[2, 3, 2, 1]$.

Chemins de Dyck

Exemple

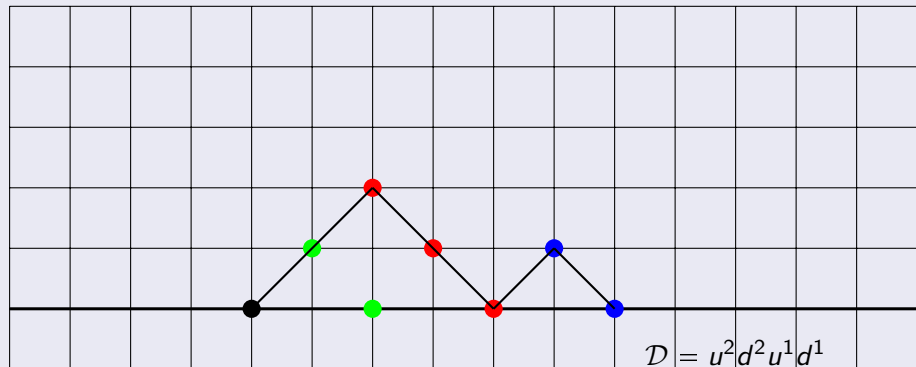
Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$ et $KQ/\langle \alpha_1\alpha_2 \rangle$ de série de Kupisch $[2, 3, 2, 1]$.



Chemins de Dyck

Exemple

Soit $Q = \bullet_1 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_3 \xrightarrow{\alpha_3} \bullet_4$ et $KQ/\langle \alpha_1\alpha_2 \rangle$ de série de Kupisch $[2, 3, 2, 1]$.



$A_n(I)$ -modules indécomposables

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

$A_n(I)$ -modules indécomposables

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit M un $A_n(I)$ -module indécomposable. Alors, M est finiment engendré.

$A_n(I)$ -modules indécomposables

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit M un $A_n(I)$ -module indécomposable. Alors, M est finiment engendré.

Soit $\{m_1, \dots, m_s\}$ un système générateur de M

$A_n(I)$ -modules indécomposables

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit M un $A_n(I)$ -module indécomposable. Alors, M est finiment engendré.

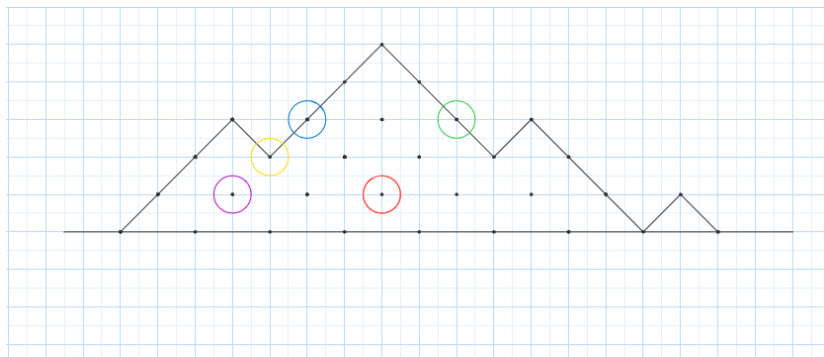
Soit $\{m_1, \dots, m_s\}$ un système générateur de M et soit

$$\phi : A_n(I)^s \rightarrow M, (a_1, \dots, a_s) \mapsto a_1 m_1 + \dots + a_s m_s.$$

$\Omega^1(M) := \ker(\phi)$ s'appelle le **1er Sygygy** de M .

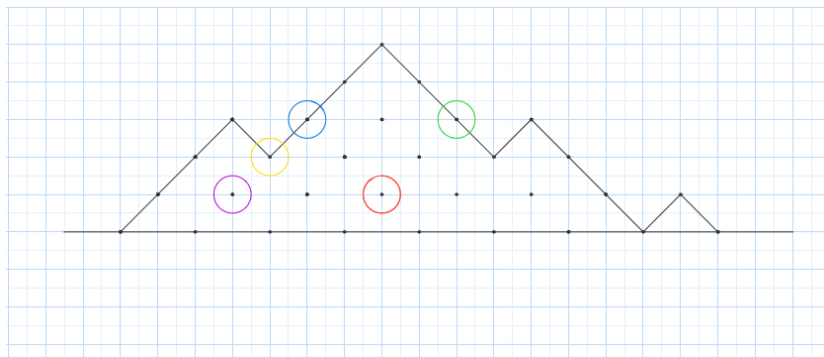
$A_n(I)$ -modules indécomposables

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.



$A_n(I)$ -modules indécomposables

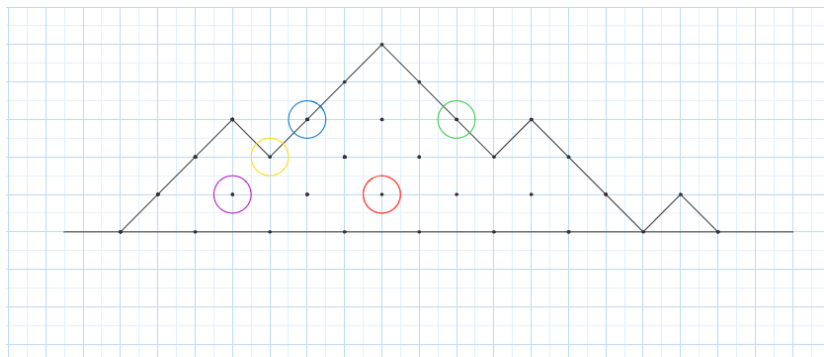
Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.



○ un $A_n(I)$ -module indécomposable, soit M

$A_n(I)$ -modules indécomposables

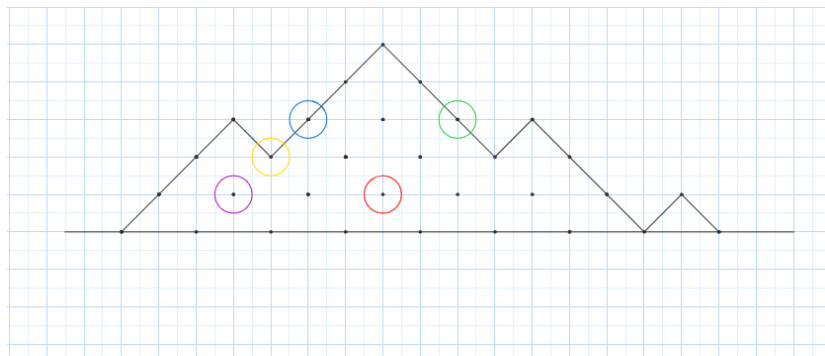
Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.



- un $A_n(I)$ -module indécomposable, soit M
- la couverture projective de M
- l'enveloppe injective de M

$A_n(I)$ -modules indécomposables

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.



- un $A_n(I)$ -module indécomposable, soit M
- la couverture projective de M
- l'enveloppe injective de M
- $rad(M)$ (l'intersection des sous-modules maximaux de M)
- $\Omega^1(M)$

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Soit (L, \vee, \wedge, \leq) un treillis distributif fini

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Soit (L, \vee, \wedge, \leq) un treillis distributif fini et soit R un anneau commutatif unitaire.

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Soit (L, \vee, \wedge, \leq) un treillis distributif fini et soit R un anneau commutatif unitaire. Soit

$$I(L, R) := \{f : L \times L \rightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ si } x \not\leq y\},$$

l'algèbre d'incidence de L .

Question 1

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Soit (L, \vee, \wedge, \leq) un treillis distributif fini et soit R un anneau commutatif unitaire. Soit

$$I(L, R) := \{f : L \times L \rightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ si } x \not\leq y\},$$

l'algèbre d'incidence de L .

Théorème [Iyama-Marczinzic 2021] : Le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur 1 est égal au nombre des éléments irréductibles de L .

Question 1

Lemme [C.-Marczinicz 2024]

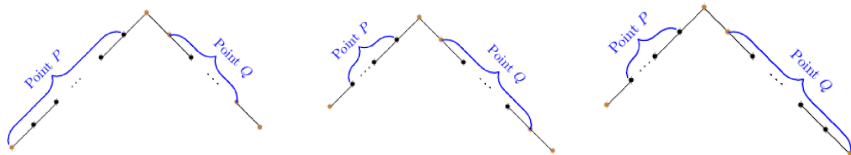
Les $A_n(I)$ -modules projectifs indécomposables P , admettant une résolution injective de longueur 1 sont les projectifs $\Omega^1(Q)$, où Q sont les $A_n(I)$ -modules injectifs indécomposables, qui ne sont pas projectifs.

Question 1

Lemme [C.-Marczinicz 2024]

Les $A_n(I)$ -modules projectifs indécomposables P , admettant une résolution injective de longueur 1 sont les projectifs $\Omega^1(Q)$, où Q sont les $A_n(I)$ -modules injectifs indécomposables, qui ne sont pas projectifs.

Soit $\mathcal{D} = u^{m_1} d^{n_1} u^{m_2} d^{n_2} \dots u^{m_\ell} d^{n_\ell}$ le $(n-1)$ -chemin de Dyck associé.

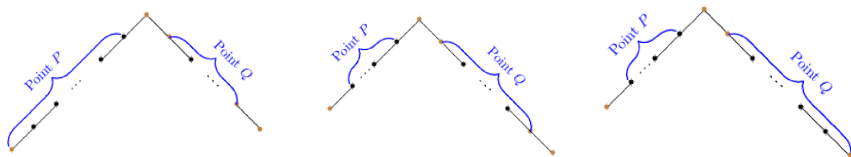


Question 1

Lemme [C.-Marczinicz 2024]

Les $A_n(I)$ -modules projectifs indécomposables P , admettant une résolution injective de longueur 1 sont les projectifs $\Omega^1(Q)$, où Q sont les $A_n(I)$ -modules injectifs indécomposables, qui ne sont pas projectifs.

Soit $\mathcal{D} = u^{m_1} d^{n_1} u^{m_2} d^{n_2} \dots u^{m_\ell} d^{n_\ell}$ le $(n-1)$ -chemin de Dyck associé.



Théorème [C.-Marczinicz 2024]

Le nombre de $A_n(I)$ -modules projectifs indécomposables P , admettant une résolution injective de longueur 1 est égal à

$$n_1 - 1 + \sum_{i=2}^{\ell-1} \max\{n_i - k_i - 1, 0\} + m_\ell - 1$$

Question 2

Soit Q le carquois linéaire avec n sommets et soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Question 2 : Classifier les suites exactes

$$0 \rightarrow J \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k \rightarrow J \rightarrow 0$$

- J est le radical de Jacobson de $A_n(I)$
 - M_i est un $A_n(I)$ -module
- $\rightsquigarrow \text{Ext}_{A_n(I)}^k(J, J)$

Question 2

Soit Q le carquois linéaire avec n sommets et soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama.

Question 2 : Classifier les suites exactes

$$0 \rightarrow J \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k \rightarrow J \rightarrow 0$$

- J est le radical de Jacobson de $A_n(I)$
 - M_i est un $A_n(I)$ -module
- $\rightsquigarrow \text{Ext}_{A_n(I)}^k(J, J)$

Lemme [C.-Marczinzic 2024]

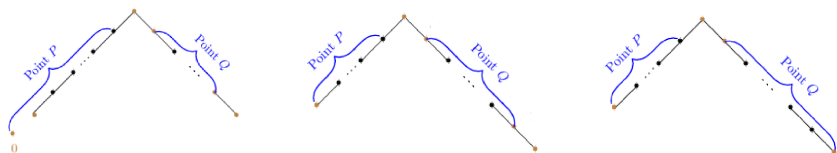
$$\text{Ext}_{A_n(I)}^1(J, J) \neq 0.$$

Question 2

Théorème [C.-Marczinzic 2024]

$\dim_K \text{Ext}_{A_n(I)}^1(J, J) = n - m$, où m est le nombre de $A_n(I)$ -modules injectifs indécomposables Q avec $\Omega^1(Q)$ le radical d'un $A_n(I)$ -module projectif P .

Soit $\mathcal{D} = u^{m_1} d^{n_1} u^{m_2} d^{n_2} \dots u^{m_\ell} d^{n_\ell}$ le $(n-1)$ -chemin de Dyck associé.



Théorème [C.-Marczinzic 2024]

$$\dim_K \text{Ext}_{A_n(I)}^1(J, J) = n - \left(n_1 + \sum_{i=2}^{\ell-1} \max\{n_i - k_i, 0\} + m_\ell \right)$$

Permutations qui évitent le motif τ

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_k$ une suite de k entiers positifs distincts et soit $\{w(1), \dots, w(k)\}$ l'ensemble des éléments répertoriés par ordre croissant.

On obtient alors une permutation $red(w) \in S_k$ appelé la **réduction** de w .

Exemple

Soit $w = 83751$. Alors, $red(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

Permutations qui évitent le motif τ

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_k$ une suite de k entiers positifs distincts et soit $\{w(1), \dots, w(k)\}$ l'ensemble des éléments répertoriés par ordre croissant.

On obtient alors une permutation $red(w) \in S_k$ appelé la **réduction** de w .

Exemple

Soit $w = 83751$. Alors, $red(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
52431

Permutations qui évitent le motif τ

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_k$ une suite de k entiers positifs distincts et soit $\{w(1), \dots, w(k)\}$ l'ensemble des éléments répertoriés par ordre croissant.

On obtient alors une permutation $red(w) \in S_k$ appelé la **réduction** de w .

Exemple

Soit $w = 83751$. Alors, $red(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
52431

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \in S_n$. On écrit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

Permutations qui évitent le motif τ

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_k$ une suite de k entiers positifs distincts et soit $\{w(1), \dots, w(k)\}$ l'ensemble des éléments répertoriés par ordre croissant.

On obtient alors une permutation $red(w) \in S_k$ appelé la **réduction** de w .

Exemple

Soit $w = 83751$. Alors, $red(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
52431

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \in S_n$. On écrit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

Soit $\sigma \in S_n$ et $\tau \in S_m$, $m \leq n$ un **motif**.

Permutations qui évitent le motif τ

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_k$ une suite de k entiers positifs distincts et soit $\{w(1), \dots, w(k)\}$ l'ensemble des éléments répertoriés par ordre croissant.

On obtient alors une permutation $red(w) \in S_k$ appelé la **réduction** de w .

Exemple

Soit $w = 83751$. Alors, $red(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
52431

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \in S_n$. On écrit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

Soit $\sigma \in S_n$ et $\tau \in S_m$, $m \leq n$ un **motif**.

σ **évite** τ s'il n'y a pas de $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m$ tel que $red(\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}) = \tau$.

Permutations qui évitent le motif τ

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_k$ une suite de k entiers positifs distincts et soit $\{w(1), \dots, w(k)\}$ l'ensemble des éléments répertoriés par ordre croissant.

On obtient alors une permutation $red(w) \in S_k$ appelé la **réduction** de w .

Exemple

Soit $w = 83751$. Alors, $red(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
52431

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \in S_n$. On écrit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

Soit $\sigma \in S_n$ et $\tau \in S_m$, $m \leq n$ un **motif**.

σ **évite** τ s'il n'y a pas de $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m$ tel que $red(\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}) = \tau$.

Exemple

$\sigma = 21435$ évite $\tau_1 = 231$ mais pas $\tau_2 = 123$ ($red(135) = 123$).

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$.

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1)$

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow$

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow A + 1 = (4, 7, 8)$.

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow A + 1 = (4, 7, 8)$.
 $d = (1, 3, 3, 1) \rightsquigarrow D = (1, 4, 7)$.

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow A + 1 = (4, 7, 8)$.

$d = (1, 3, 3, 1) \rightsquigarrow D = (1, 4, 7)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow A + 1 = (4, 7, 8)$.

$d = (1, 3, 3, 1) \rightsquigarrow D = (1, 4, 7)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow A + 1 = (4, 7, 8)$.
 $d = (1, 3, 3, 1) \rightsquigarrow D = (1, 4, 7)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & & & 7 & & & 8 & \end{pmatrix}.$$

Permutations qui évitent le motif 321

Une permutation $\pi \in S_n$ évite le motif 321, s'il n'y a pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Contre-Exemple et Exemple :

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Théorème [Billiey-Jockusch-Stanley 1993] : Il y a une bijection entre l'ensemble des n -chemins de Dyck et l'ensemble des permutations de S_n qui évitent le motif 321.

Exemple

Soit $\mathcal{D} = u^3 d^1 u^3 d^3 u^1 d^3 u^1 d^1$. $a = (3, 3, 1, 1) \rightsquigarrow A = (3, 6, 7) \rightsquigarrow A + 1 = (4, 7, 8)$.

$d = (1, 3, 3, 1) \rightsquigarrow D = (1, 4, 7)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 7 & 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama et soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama et soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Soit P un $A_n(I)$ -module projectif indécomposable, qui admet une résolution injective :

$$0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_k \rightarrow 0$$

- X_i est un $A_n(I)$ -module injectif
- k est minimal

Question 1 : On fixe $k \in \mathbb{N}$. Trouver le nombre de modules P , admettant une résolution injective de longueur k .

Théorème [C.-Marczinzić 2024]

Pour $k = 1$ ce nombre est égal au nombre de points fixes de π .

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama, soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Question 2 : Classifier les suites exactes

$$0 \rightarrow J \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k \rightarrow J \rightarrow 0$$

- J est le radical de Jacobson de $A_n(I)$
 - M_i est un $A_n(I)$ -module
- $\rightsquigarrow \text{Ext}_{A_n(I)}^k(J, J)$

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama, soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Question 2 : Classifier les suites exactes

$$0 \rightarrow J \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k \rightarrow J \rightarrow 0$$

- J est le radical de Jacobson de $A_n(I)$
 - M_i est un $A_n(I)$ -module
- $\rightsquigarrow \text{Ext}_{A_n(I)}^k(J, J)$

Théorème [C.-Marczinzic 2024]

$$\dim_K \text{Ext}_{A_n(I)}^1(J, J) = n - |\{1 \leq i \leq n-1 \mid \pi(k) < i, \text{ pour tout } k < i\}|.$$

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama, soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Soit $s_i = (i \ i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$. On écrit $\pi = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_r}$, r minimal.

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama, soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Soit $s_i = (i \ i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$. On écrit $\pi = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_r}$, r minimal.

Soit ℓ le nombre de s_{i_j} distincts qui apparaissent.

Exemple

$\sigma = 152634 \in S_6$. Alors, $\sigma = s_4 \cdot s_3 \cdot s_2 \cdot s_5 \cdot s_4$ et $\ell = 4$.

Résultats

Soit $A_n(I)$ une algèbre de Nakayama, soit $\pi \in S_{n-1}$ la permutation qui évite le motif 321 associée.

Soit $s_i = (i \ i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$. On écrit $\pi = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_r}$, r minimal.

Soit ℓ le nombre de s_{i_j} distincts qui apparaissent.

Exemple

$\sigma = 152634 \in S_6$. Alors, $\sigma = s_4 \cdot s_3 \cdot s_2 \cdot s_5 \cdot s_4$ et $\ell = 4$.

Théorème [C.-Marczinicz 2024]

$$\dim_K \text{Ext}_{A_n(I)}^1(J, J) = \ell.$$

La fin

