

A ne pas rater

- Définition et caractérisations des applications affines, en particulier par le barycentre, et si possible en coordonnées.
- Le groupe affine, et quelques sous-groupes remarquables.
- Un peu de géométrie affine *euclidienne*.

Développements possibles :

“Théorème fondamental (ou prétendu tel) de la géométrie affine” (en espérant tomber sur l’autre !), ellipse de Steiner, régularisation de figures, utilisation d’applications affines pour des énoncés où leur recours ne semble pas indispensable (ex. : Menelaüs), etc.

I Généralités

1° Caractérisations et définition

(a) Définition

Proposition Soit \mathcal{E} un espace affine dirigé par E , espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} quelconque. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Il est équivalent de dire :

1. il existe $\varphi : E \rightarrow E$ linéaire telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$;
2. étant donné $O \in \mathcal{E}$, l’application $\varphi : E \rightarrow E$, définie par $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$, est linéaire ;
3. f conserve le barycentre.
4. Etant donné un repère de \mathcal{E} et un repère de \mathcal{F} , les coordonnées de l’image d’un point sont des fonctions affines des coordonnées du point : en notant $n = \dim \mathcal{E}$ et $m = \dim \mathcal{F}$, il existe $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ et $(b_i) \in \mathbb{K}^m$ tels que si M a pour coordonnées $(x_j) \in \mathbb{K}^n$, $f(M)$ ait pour i ème coordonnée $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i$.

Dans ces conditions, l’application linéaire φ de la condition 2. ne dépend pas de O , et elle est uniquement définie par f .

On dit que f est affine lorsqu’elle satisfait ces conditions. L’application φ de la proposition est appelée l’application linéaire associée à f . On peut remarquer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, φ est la différentielle de f ... Cette proposition conduit à différentes stratégies pour prouver le caractère affine d’une application, toutes utiles en pratique.

(b) Propriétés “de base”

Lemme (Composition) La composée de deux applications affines est affine, et l’application linéaire associée est la composée des applications linéaires.

Lemme (Caractérisation par un repère affine) Etant donné un repère affine (A_0, \dots, A_n) de \mathcal{E} et $n+1$ points (B_0, \dots, B_n) de \mathcal{F} , il existe une unique application affine telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i .

Lemme (Invariants) Une application affine préserve l'alignement, le parallélisme, les rapports de mesures algébriques, et multiplie les aires/volumes/déterminants par le déterminant de l'application linéaire associée.

(Il faut prendre quelques précautions pour le parallélisme et les rapports de mesures algébriques : il peut arriver que l'image de deux points distincts coïncident.) Pour une réciproque, voir le "théorème fondamental" (ou prétendu tel) de la géométrie affine.

Lemme (Points fixes) L'ensemble des points fixes d'une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est vide, ou bien c'est un sous-espace affine dirigée par l'espace propre $\text{Ker}(\varphi - \text{Id})$ de l'application linéaire associée.

Par ailleurs, si 1 n'est pas vecteur propre de φ , alors f a un unique point fixe.

2° Exemples

(a) Les homothéties, les translations.

(b) Etant donné un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} dirigé par F et un supplémentaire de F dans E , on définit la projection p sur \mathcal{F} parallèlement à G par [...]. On a alors $p \circ p = p$.

Inversement, si $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ satisfait $p \circ p = p$, alors p n'est pas nécessairement une projection affine (penser à une projection centrale, par exemple). C'est le cas si l'une des hypothèses supplémentaires suivantes est remplie :

- p est affine ;
- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et p est continue.

(c) **Applications affines en présence d'un produit scalaire euclidien**

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et \mathcal{E} euclidien. Il existe des applications non linéaires qui préservent la norme (en construire !), mais au niveau affine, la situation est plus rigide :

Lemme Toute isométrie d'un espace affine euclidien est affine.

La raison en est qu'on peut caractériser le barycentre en termes de distances : si $\lambda \in [0, 1]$, le barycentre de $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$ est caractérisé par

$$AM + MB = AB, \quad AM = \lambda AB.$$

On a des égalités analogues pour $\lambda \in]-\infty, 0[$ et pour $\lambda \in]0, +\infty[$.

II Barycentres, etc.

1° Repère affine et coordonnées barycentriques

La caractérisation des applications affines par les barycentres rend les coordonnées barycentriques très adaptées. Paraphrasons : soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} . Si (B_0, \dots, B_n) est un repère affine de \mathcal{F} , et si f est l'application telle que $f(A_i) = B_i$, alors les coordonnées barycentriques de $f(M)$ sont les mêmes que celles de M .

Pour étudier, voire définir les coordonnées barycentriques, on introduit une brave *application affine*. On note, dans \mathbb{K}^{n+1} :

$$\mathcal{H} = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}.$$

On invoque alors l'application barycentre :

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\lambda_i) &\longmapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i. \end{aligned}$$

Le fait est que (A_0, \dots, A_n) sont affinement indépendants SSI β est une bijection. La bijection réciproque donne les coordonnées barycentriques d'un point.

2° Groupe affine d'un n -simplexe

On appelle n -simplexe ou simplexe dans \mathcal{E} tout ensemble de $n + 1$ points affinement indépendants. L'existence de la bijection affine β montre que tous les simplexes sont dans la même orbite par le groupe des bijections affines (utiliser $\beta_B^{-1} \circ \beta_A$ pour transformer (A_0, \dots, A_n) en (B_0, \dots, B_n)).

Par ailleurs, si on s'intéresse au groupe affine d'un simplexe, formé par les bijections affines qui le préservent, on en déduit que ces groupes sont tous isomorphes, et même tous conjugués entre eux si \mathcal{E} est fixé.

Décrivons le groupe affine du simplexe standard, i.e. formé des $n + 1$ vecteurs e_0, \dots, e_n de la base standard de \mathbb{K}^{n+1} . Toute bijection de ces points définit une bijection affine de \mathcal{H} . (En fait, les matrices de permutation définissent des applications linéaires sur \mathbb{K}^{n+1} , qui se restreignent en $(n + 1)!$ bijections affines de \mathcal{H} préservant le simplexe standard.) En d'autres termes, le groupe affine du simplexe standard est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1} . Par transport via β , c'est vrai de tout simplexe.

3° Groupe des isométries d'un simplexe régulier

Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors \mathbb{R}^{n+1} est euclidien pour le produit scalaire qui fait de notre simplexe standard une base orthonormée. Le simplexe devient alors régulier :

- au sens faible : tous les sommets sont équidistants ;
- et au sens fort : le groupe des isométries agit transitivement sur les drapeaux. Un drapeau, c'est une famille $e_{i_1} \subset e_{i_1}e_{i_2} \subset \dots \subset e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_{n+1}}$ formé par un sommet, une arête qui le contient, une face triangulaire qui la contient, etc.

En effet, toute bijection affine est une isométrie du simplexe, donc le groupe des isométries du simplexe est \mathfrak{S}_{n+1} agissant par permutation des sommets ; la clause de transitivité est claire. (Ah ?)

A présent, supposons que \mathcal{E} soit un espace euclidien et que notre simplexe soit régulier (au sens faible).. Alors β devient une similitude. En effet, il n'y a qu'un seul triangle équilatéral à similitude près. Donc les produits scalaires $\langle p_i - p_0, p_j - p_0 \rangle$ sont tous égaux, ce qui montre qu'il y a au plus un produit scalaire qui rend un simplexe régulier (au sens faible). Par suite, tout simplexe régulier au sens faible est régulier au sens fort. (C'est faux avec des polyèdres plus compliqués : des conditions de distances entre sommets ne caractérisent pas toujours un polyèdre. Voir [Audin].)

Bref : d'une part, tous les simplexes réguliers sont semblables, d'autre part, toute bijection affine d'un simplexe régulier est une isométrie.

Remarque culturelle : La représentation de \mathfrak{S}_{n+1} sur la direction H de \mathcal{H} induite par la construction précédente fait de H une représentation irréductible (pas de sous-espace non trivial stable par \mathfrak{S}_{n+1}), et que \mathfrak{S}_{n+1} est engendré par des (éléments qui y agissent comme) des *réflexions*, ce qui donne des propriétés tout à fait particulières à \mathfrak{S}_{n+1} . Par exemple, on peut en déduire la présentation de Coxeter par générateurs s_i ($i = 1, \dots, n$) et relations $s_i^2 = 1$, $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $s_i s_j = s_j s_i$ pour $|i - j| \geq 2$. (Voir la leçon "Parties génératrices de groupes".)

III Le groupe affine

On note $GA(\mathcal{E})$ le groupe des bijections affines de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . Il caractérise la géométrie affine, au sens suivants :

- une "propriété affine", c'est une propriété qui est invariante par l'action du groupe affine : une figure a cette propriété SSI l'image de cette figure par n'importe quelle bijection affine l'a ; la géométrie affine, c'est en gros l'étude des propriétés affines ;
- sur RM et en dimension ≥ 2 , les bijections affines sont caractérisées par une propriété apparemment plus faible que la préservation du barycentre : la préservation de l'alignement ;

c'est le "théorème fondamental (ou prétendu tel) de la géométrie affine" ([Audin], Exercice I.66 par exemple). (Ceci peut faire un développement.)

1° Structure

Etant donné un point O de \mathcal{E} , toute bijection affine s'écrit comme produit d'une translation et d'une applications fixant le point choisi, dans l'ordre que l'on veut. Ajoutons le "principe de conjugaison", qui dit, avec des notations évidentes :

$$g \circ t_u \circ g^{-1} = t_{\overline{g}(u)}.$$

Il en résulte facilement que $GA(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct du groupe des translations $T(\mathcal{E})$ par le fixateur $GA_O(\mathcal{E})$.

On peut ajouter que $T(\mathcal{E})$ est le noyau du morphisme $GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E)$ qui associe à une application affine, sa partie linéaire, qu'il est isomorphe à \mathbb{K}^n , et que $GA_O(\mathcal{E})$ est naturellement isomorphe à $GL(E)$ (via le morphisme précédent, par exemple !).

2° Représentation matricielle

Fixons un repère de \mathcal{E} . Comme on l'a vu dans la proposition précédant la définition, cela permet d'associer à $f \in GA(\mathcal{E})$ une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et un vecteur $B \in KM^n$ tel que l'image du point de coordonnées $X \in \mathbb{K}^n$ ait pour coordonnées $AX + B$. On résume ces données dans une seule matrice :

$$\Phi(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi un *morphisme* $\Phi : GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL_{n+1}(\mathbb{K})$.

Intérêts de ce morphisme :

- action sur \mathcal{E} facile à calculer : les coordonnées de $f(M)$ sont les n derniers coefficients de $\Phi(f)^t(1, x_1, \dots, x_n)$;
- calcul facile de la composée de deux applications linéaires ;
- mise en évidence de sous-groupes remarquables (voir ci-dessous), et de l'action de $GA_O(\mathcal{E})$ sur $T(\mathcal{E})$.

3° Sur-groupe remarquable : le groupe projectif

On garde le repère précédent. On a dit que Φ permet de réaliser $GA(\mathcal{E})$ comme un sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Or, l'intersection de ce sous-groupe et du centre Z de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ (les matrices scalaires) est trivial. Donc $GA(\mathcal{E})$ s'injecte aussi dans $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_{n+1}(\mathbb{K})/Z$.

On a ainsi réalisé le groupe affine comme sous-groupe du groupe projectif. Lequel ? Eh bien, tout naturellement, comme le stabilisateur de l'hyperplan projectif $x_0 = 0$!

En effet, considérons l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}^n$ qui, au point de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ associe $\varphi(X) = [1, x_1, \dots, x_n]$: c'est une injection, l'image est précisément le complémentaire de l'hyperplan $x_0 = 0$. On vérifie que $GA(\mathcal{E})$ est (via Φ) le stabilisateur de E , donc (par bijectivité) de son complémentaire. C'est fini.

4° Sous-groupes remarquables

(a) Déjà plus ou moins vu(es) : les homothéties-translations (noter que les homothéties affines engendrent les translations...)

(b) Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ajoutons un produit scalaire euclidien sur E : on trouve le groupe des similitudes $S(\mathcal{E})$; n'oublions pas celui des isométries $Is(\mathcal{E})$, qui est un sous-groupe compact maximal de $GA(\mathcal{E})$; noter que $S(\mathcal{E})$ est engendré par les homothéties et les isométries : est-ce un produit semi-direct ?

IV Orbites de figures

1° Orbites de figures et classification

On a déjà expliqué que tous les simplexes sont dans la même orbite sous le groupe affine. On peut donner d'autres exemples :

- (a) si on fixe les simplexes sous l'action des bijection affines de déterminant 1, les orbites sont classées par un déterminant bien construit : un scalaire non nul ;
- (b) sur \mathbb{C} , il n'y a qu'une seule (orbite de) conique(s) non dégénérée(s) ;
- (c) sur \mathbb{R} , les coniques non dégénérées à application affine près sont classées par le type : signature de la forme quadratique (ou nombre de directions asymptotiques) ; le fait qu'on puisse les distinguer topologiquement prouve que si deux coniques sont homéomorphes, alors elles sont aussi affinement équivalentes ; l'énoncé analogue pour les triplets de points est faux, par exemple ;
- (d) dans un plan euclidien, les coniques non dégénérées à similitude près sont classées par l'excentricité ;
- (e) dans un plan euclidien, les coniques non dégénérées à similitude près sont classées par les axes/le paramètre/le rayon (ellipses et hyperboles/paraboles/cercles).

2° Régularisation de figures

On a vu dans la leçon "Utilisation des groupes en géométrie" comment transformer, au moyen du groupe projectif, la configuration de Pascal sur une conique quelconque en une configuration sur le cercle où les droites sont deux à deux parallèles, ce qui trivialise l'énoncé. La méthode marche aussi avec des applications affines, voici quelques exemples.

(a) Théorème de Pascal pour les ellipses, preuve affine : on se ramène à un cercle par une affinité, et on se reporte à [Audin] Exercice III.47.

(b) Ellipse de Steiner : Soit un triangle $A_1A_2A_3$ non aplati dans un plan affine euclidien. Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note $M_{\lambda, \sigma}$ le barycentre de $\{(A_i, \lambda_{\sigma_i})\}$. Alors il existe une ellipse E_λ contenant les six (en général) points $M_{\lambda, \sigma}$. De plus, l'ellipse $E_{(1,1,1)}$ est tangente aux côtés du triangle en leurs milieux, et $E_{(1,0,0)}$ est l'ellipse de John du triangle.

Remarque : Ce procédé consistant à trouver une application affine pour trouver une figure (plus) régulière vis à vis d'un produit scalaire a une variante : trouver un produit scalaire pour lequel la figure est (plus) régulière. Lien entre ces deux procédés : transporter le produit scalaire par l'application affine du premier procédé pour trouver le produit scalaire du second...

V Utilisation des applications affines pour les preuves

Il est extrêmement commun, dans les programme de lycée, d'utiliser des transformations bien choisies pour résoudre des problèmes, par exemple de construction. On ne peut pas passer ça sous silence, aussi, voici trois exemples.

1° Problème de Valiron

Dans un plan, on donne n points B_1, \dots, B_n . Peut-on trouver n points A_1, \dots, A_n tels que pour tout i , B_i soit le milieu de $[A_iA_{i+1}]$? (On note $A_{n+1} = A_1$.)

Une des méthodes consiste à utiliser les symétries s_i de centre B_i . Si la réponse est positive, $A_{i+1} = s_i(A_i)$ et donc, $A_1 = s_n \cdots s_1(A_1)$. Or, $S = s_n \cdots s_1$ a pour application linéaire associée $(-1)^n \text{Id}$. On a donc deux cas :

- si n est impair, S n'admet pas 1 pour valeur propre, donc elle possède un unique point fixe A_1 ; on note $A_{i+1} = s_i(A_i)$ (pour $i \leq n-1$), et alors $A_1 = s_n(A_n)$, donc on a une solution unique au problème ;
- si n est pair, S est une translation, donc le vecteur dépend des points B_i (exercice : le calculer) ; si ce vecteur est nul, le choix de A_1 arbitraire donne une solution ; sinon, S n'a pas de point fixe, donc il n'y a pas de solution.

2° Théorème de Menelaüs et variations

On peut en donner une preuve qui repose sur des transformations. Demander à Raphaël S., qui l'a vu mais n'a pas pensé à le proposer en développement.

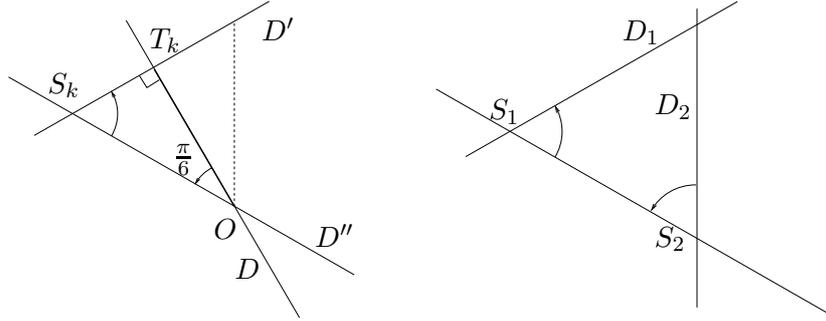
3° Un exemple plus exotique et euclidien

(a) Pas pour que vous le reteniez, juste pour le fun. Dans un plan affine euclidien orienté, on donne un point O et trois triangles équilatéraux directs OA_kB_k ($k = 1, 2, 3$). On note T_k le milieu de $[B_kA_{k+1}]$ ($k = 1, 2, 3$, avec $B_4 = B_1$). Alors $T_1T_2T_3$ est un triangle équilatéral.

(b) Notons ρ la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$; elle envoie A_k sur B_k et σ_k la symétrie de centre T_k . Alors, on a :

$$\rho\sigma_3\rho\sigma_2\rho\sigma_1(B_1) = B_1.$$

Mais l'application linéaire associée à $\Sigma = \rho\sigma_3\rho\sigma_2\rho\sigma_1$ est la rotation vectorielle dont l'angle est $3(\pi + \pi/3) = 0 [2\pi]$, donc Σ est l'identité.



Calculons $\rho\sigma_k$. On note $D = (OT_k)$, D'' la droite passant par O telle que $(D, D'') = \pi/6 [\pi]$, D' la droite passant par T et perpendiculaire à D . Alors, si σ_Δ est la réflexion d'axe δ , on a :

$$\rho\sigma_k = \sigma_{D'}\sigma_D \sigma_D\sigma_{D''} = \sigma_{D'}\sigma_{D''} :$$

c'est la rotation $\rho_{S_k, 2\pi/3}$ d'angle $2\pi/3$ et de centre $S_k = D' \cap D''$.

Une construction analogue montre que

$$\rho\sigma_2\rho\sigma_1 = \rho_{S_k, 2\pi/3}\rho_{S_k, 2\pi/3}$$

est la rotation d'angle $4\pi/3$ et de centre, l'intersection de D_1 et D_2 , où $(S_1S_2, D_1) = (D_2, S_1S_2) = \pi/3 [\pi]$. Or, c'est aussi une rotation de centre S_3 ! Par suite, $S_1S_2S_3$ est équilatéral.

Enfin, T_k est l'image de S_k par une similitude de centre O et d'angle $-\pi/6$. D'où le résultat.

(c) La faiblesse de cette méthode tient à l'existence de la suivante : on choisit un repère orthonormé direct d'origine O , et on note l'affixe d'un point par la minuscule correspondante.

On note $j = \exp(2i\pi/3)$. On a les relations :

$$b_k = -j^2 a_k, \quad t_k = \frac{b_k + a_{k+1}}{2} = \frac{-j^2 a_k + a_{k+1}}{2} \quad (k = 1, 2, 3).$$

On calcule alors, grâce à $1 + j + j^2 = 0$:

$$2|t_k - t_{k+1}| = |-j^2 a_k + a_{k+1} + j^2 a_{k+1} - a_{k+2}| = |j^2 a_k + j a_{k+1} + a_{k+2}|,$$

expression manifestement indépendante de k (factoriser j , voir que $|j| = 1$).

VI Vers le projectif

Bonne idée de Raphaël S. : énoncer des théorèmes dans le cadre affine où ils ont été découverts, signaler la non-naturalité de certaines hypothèses (que des droites se coupent, pensez un peu !), justifier ainsi la complétion de l'espace affine, signaler enfin qu'ils trouvent là leur vrai cadre naturel, signaler enfin qu'une géométrie axiomatique où ces théorèmes sont vrais permet de reconstruire un corps.