



Sur le théorème de Gerbaldi et le groupe de Valentiner

STAGIAIRE : BAPTISTE LEROY
ENCADRANT : M. JÉRÔME GERMONI
DU 19 MAI AU 4 JUILLET



ENS DE LYON

L'origine de ce travail est presque anecdotique : au détour d'une conversation, un ami et collègue de M. Germoni, M. Bonnafé lui a lancé, vers Noël, la question naïve : « Tu connais le théorème de Gerbaldi ? ». Sa réponse fut négative, mais un rapide coup d'œil suffit pour piquer ardemment son intérêt. Bien sûr, une telle anecdote ne suffirait pas à justifier l'intérêt d'un stage : il faut replacer ce théorème dans plusieurs contextes, à la fois géométriques et algébriques.

Dans un premier temps, on introduira la géométrie projective, qui placera le décor pour la suite. On définira également les coniques projectives ainsi que la polarité par rapport à celles-ci et ce que veut dire que deux d'entre elles sont en involution, ce qui caractérisera les coniques de Gerbaldi. Dans un deuxième temps, on montrera le théorème de Gerbaldi qui stipule l'existence de 6 telles coniques. Dans un troisième temps, on discutera du groupe des homographies qui conserve les dites coniques, son groupe des "symétries". Et pour conclure, on relèvera ce groupe dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ pour obtenir l'exceptionnel groupe de Valentiner ; exceptionnel car c'est une extension centrale non scindée de A_6 par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et le seul autre A_n qui possède une telle extension est A_7 (ce deuxième fait ne sera pas démontré).

Enfin, j'ai voulu faire ce stage car il m'a permis de découvrir un nouveau pan de la géométrie, parce que j'ai pas mal pratiqué le langage Sage et qu'étudier un groupe fini "de zéro", même si le résultat était connu, ne pouvait être que stimulant !

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction à la géométrie projective | 1 |
| 1.1 | Définitions dans le cas général | 1 |
| 1.2 | Coniques projectives | 2 |
| 1.3 | Trois coniques projectives en involution | 3 |
| 2 | Le théorème de Gerbaldi | 5 |
| 3 | Le groupe de Valentiner | 7 |
| 3.1 | Le groupes des homographies stabilisant les 6 coniques | 7 |
| 3.2 | Le relèvement de $\mathrm{Stab}(\mathcal{S})$ à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ | 12 |
| 4 | Bibliographie | 14 |

1 Introduction à la géométrie projective

1.1 Définitions dans le cas général

On se place dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n finie, et on notera $E^* = E \setminus \{0\}$.

DÉFINITION : On pose la relation d'équivalence \propto sur E^* telle que $a \propto b$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $a = \lambda b$, qui n'est autre que la relation de proportionnalité. On définit ensuite le *projectivé* de E par $\mathbb{P}(E) = E^*/\propto$ et sa *dimension* est $n - 1$. On pose $\pi : E^* \rightarrow \mathbb{P}(E)$ la *projection* définie par le quotient. Si $E = \mathbb{K}^n$, on écrit $\mathbb{P}(E) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$.

DÉFINITION : On dit que $V \subset \mathbb{P}(E)$ est un *sous-espace projectif* s'il existe $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $V = \pi(F)$. De même, on pose $\dim(V) = \dim(F) - 1$. Ainsi, si $\dim(V) = 1$, on dira que V est une droite projective, si $\dim(V) = 2$ un plan projectif.

Nous allons maintenant chercher à nous repérer dans ce nouvel espace. Prenons pour exemple \mathbb{RP}^2 , le plan projectif réel, projectivé de \mathbb{R}^3 . En notant (e_1, e_2, e_3) une base, on serait tenté d'écrire l'image de $v = (a, b, c)$ par $\pi(v) = [a, b, c]$. Or v s'écrit $(a/2, b, c)$ dans la base $(2e_1, e_2, e_3)$, mais ces deux bases ont la même image dans \mathbb{RP}^2 . Ainsi, on se doit de rajouter l'information d'un quatrième vecteur e_4 , qui par convention sera défini par $e_4 = -(e_1 + e_2 + e_3)$. On obtient alors la définition suivante :

DÉFINITION : Une famille $(m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$ de $\mathbb{P}(E)$ forme un *repère projectif* si chaque m_i est la projection de e_i pour (e_1, \dots, e_n) une base de E , et que m_{n+1} soit la projection de $-(e_1 + \dots + e_n)$. De cette manière, $m \in \mathbb{P}(E)$, dont un représentant $x \in E^*$ s'écrit $\sum_{i=1}^n x_i e_i$, sera écrit $[x_1 : x_2 : \dots : x_n]$ en *coordonnées homogènes*.

On remarquera que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $[\lambda x_1 : \lambda x_2 : \dots : \lambda x_n] = [x_1 : x_2 : \dots : x_n]$.

Comme pour toute nouvelle structure algébrique, on a envie de s'intéresser à ses "morphismes". Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimensions n et n' finies, $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. On a envie de poser $g : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ qui fasse commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{f} & E'^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}(E') \end{array}$$

Le problème étant que s'il existe $x \in \text{Ker}(f) \setminus \{0\}$, alors f n'est pas bien définie comme sur le diagramme.

DÉFINITION : Une application $g : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ est une *homographie* s'il existe $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire injective faisant commuter le diagramme ci-dessus.

LEMME : Une homographie envoie un repère projectif sur un repère projectif.

REMARQUE : On ne s'intéressera dans la suite de ce rapport qu'aux homographies d'un espace projectif dans lui-même, dont on voit qu'elles forment un groupe, noté $\text{PGL}(E)$.

1.2 Coniques projectives

À partir de maintenant et dans tout le reste de ce rapport, nous nous intéresserons spécifiquement à l'espace \mathbb{CP}^2 , le plan projectif complexe, et surtout à ses coniques.

DÉFINITION : On appellera *conique (projective)* de \mathbb{CP}^2 un élément de $\mathbb{P}(Q(\mathbb{C}^3))$, c'est-à-dire d'une forme quadratique sur \mathbb{C}^3 à un scalaire près, qui de plus est non-dégénérée. On remarquera que le scalaire (non nul) ne change ni le cône isotrope de la forme, qui n'est jamais vide, ni la dégénérescence de celle-ci.

On appellera *image* de la conique la donnée de son cône isotrope, et dans la suite on confondra une conique et son image.

DÉFINITION : Pour $m \in \mathbb{CP}^2$, $x \in \mathbb{C}^3$ un représentant de m , on définit la (*droite*) *polaire* par rapport à \mathcal{C} de m par le projeté de l'orthogonal de x pour q . On notera m^\perp la polaire de m .

DÉFINITION : Quand on parlera de *triangle*, on parlera de trois points A, B et C ainsi que des trois droites $(AB), (AC)$ et (BC) . Un triangle est dit *autopolaire* par rapport à \mathcal{C} si $A^\perp = (BC), B^\perp = (AC)$ et $C^\perp = (AB)$.

DÉFINITION : La conique \mathcal{C} est dite *en involution* avec \mathcal{C}' s'il existe un triangle inscrit dans \mathcal{C} et autopolaire par rapport à \mathcal{C}' . Si chacune est en involution avec l'autre, alors on dit juste que \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont en involution.

Cette définition ne permet pas de vérifier aisément que deux coniques sont en involution, ni même de construire une telle conique pour une autre donnée. C'est pour cela qu'on va démontrer dans la prochaine proposition un critère calculatoire, mais pour ça, on doit comprendre ce qu'implique l'existence d'un tel triangle dans \mathbb{C}^3 . Soit le triangle (ABC) inscrit dans \mathcal{C} et autopolaire par rapport à \mathcal{C}' . On choisit x, y et z des représentants de A, B et C , ces vecteurs forment une base de \mathbb{C}^3 . En notant q et q' les formes quadratiques associées à \mathcal{C} et \mathcal{C}' , et φ et φ' leurs formes polaires, on obtient que :

L'inscription dans \mathcal{C} donne que $q(x) = q(y) = q(z) = 0$;

L'autopolarité par rapport à \mathcal{C}' nous donne que $\varphi'(x, y) = \varphi'(x, z) = \varphi'(y, z) = 0$.

On notera aussi dans la suite M et N les matrices de q et q' , et $\mathcal{C}(q)$ le cône isotrope de q .

THÉORÈME : Il existe une telle base si et seulement si $\text{Tr}(N^{-1}M) = 0$.

Pour le montrer, on va utiliser le lemme suivant :

LEMME : Soit q et q' deux formes quadratiques non dégénérées sur E , de cônes non réduits à $\{0\}$. Alors $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $q = \lambda q'$ (vu en DM).

PREUVE DU THÉORÈME : " \Rightarrow " On écrit les matrices de M et N dans cette dite base (quitte à la renormaliser, on suppose $q'(e_1) = q'(e_2) = q'(e_3) = 1$) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne parfaitement : $\text{Tr}(N^{-1}M) = 0 + 0 + 0 = 0$.

" \Leftarrow " Si $q = \lambda q'$, on obtiendrait en les diagonalisant que $\text{Tr}(N^{-1}M) = 3\lambda \neq 0$ car les formes sont supposées non dégénérées. Par l'absurde, il existe alors $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que $q(e_1) = 0$ et $q'(e_1) = 1$.

On pose à présent le plan $H = e_1^{\perp q'}$, et w et w' les restrictions de q et q' à H . Si $w = \lambda w'$, on obtiendrait les matrices suivantes en diagonalisant w' (et w) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & \lambda a & 0 \\ * & 0 & \lambda b \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

ce qui donnerait encore $\text{Tr}(N^{-1}M) = 2\lambda \neq 0$ car M et N ne seraient plus inversibles. Par l'absurde, il existe alors $e_2 \in H$ tel que $w(e_1) = q(e_1) = 0$ et $w'(e_1) = q'(e_1) = 1$.

Enfin, il suffit de prendre $e_3 \in e_2^{\perp w'}$ tel que $q'(e_3) = 1$, on obtient enfin : $q(e_3) = \text{Tr}(N^{-1}M) = 0 \implies q(e_3) = 0$, et la base (e_1, e_2, e_3) est bien orthogonale pour q' . \square

Maintenant qu'on possède une manière efficace de tester si deux coniques sont en involution, on peut se poser la question légitime du nombre maximum de coniques deux à deux en involution, et si elles existent. C'est exactement ce sur quoi Francesco Gerbaldi s'est penché dans son article *Gruppi di sei coniche in involuzione*. Nous avons déduit dans la preuve précédente qu'elles ne pouvaient être colinéaires, mais on va maintenant montrer mieux.

LEMME : Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de coniques de matrices B_i . Si elles sont deux à deux en involution, alors la famille $(B_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est linéairement indépendante.

PREUVE : Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on définit la forme linéaire $\phi_i : M \mapsto \frac{1}{3}\text{Tr}(B_i^{-1}M)$. On obtient alors $\phi_i(B_j) = \delta_{ij}$, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$.

Supposons qu'il existe des scalaires non tous nuls $(\lambda_j)_{j \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{C}$ tels que : $\sum_{j=1}^n \lambda_j B_j = 0$. En appliquant ϕ_i des deux côtés, on obtient par l'absurde :

$$\phi_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j B_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_i(B_j) = \lambda_i = 0$$

Ce qui implique que la famille $(B_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est linéairement indépendante. \square

Ainsi, puisque $\text{Sym}_3(\mathbb{C})$ est de dimension 6, il existe au maximum 6 coniques deux à deux en involution. Avant de voir si on peut exhiber 6 telles coniques, on va d'abord voir une construction élégante, dans laquelle on construit une troisième en involution avec les deux premières, et ce même dans \mathbb{RP}^2 .

1.3 Trois coniques projectives en involution

On se donne donc deux coniques en involution \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Gerbaldi affirme dans son article que pour tout point m du plan projectif, il existe une droite D telle que $m^{\perp q_1}$ est la polaire de $D^{\perp q_1}$ par rapport à \mathcal{C}_2 , et idem en inversant 1 et 2 ; il affirme de plus que D n'est autre que la polaire de m par rapport à une troisième conique \mathcal{C}_3 . Avant d'étudier ses dires, nous allons énoncer un lemme utile pour la suite.

LEMME : Soit deux coniques en involution \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . En posant $C = B_1^{-1}B_2$, on a que $C^3 = \alpha I_3$, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

PREUVE : On note $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les trois valeurs propres de C . Les conditions d'involution nous donnent $\text{Tr}(C) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ et

$$\text{Tr}(C^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = 0 \implies \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0.$$

Or ces deux termes interviennent dans l'écriture du polynôme caractéristique de C , prenant donc la forme $\chi_C(X) = X^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = X^3 - \alpha$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient : $\chi_C(C) = C^3 - \alpha I_3 = 0 \implies C^3 = \alpha I_3$. \square

Nous allons procéder par analyse-synthèse pour trouver cette troisième conique. On suppose qu'il existe C_3 de matrice B_3 tel que décrite ci-dessus. Soit $x \in (\mathbb{C}^3)^*$, la première affirmation se traduit par $(x^{\perp q_3})^{\perp q_1} = (x^{\perp q_1})^{\perp q_2}$.

On pose $V = x^{\perp q_1}$ et $\phi_x^1(y) = {}^t x B_1 y$. Pour $z \in V^{\perp q_2}$ non nul, la forme ϕ_z^2 s'annule également sur V . Les deux formes ayant le même noyau, on en déduit que ${}^t z B_2 \propto {}^t x B_1$, soit que $z \propto B_2^{-1} B_1 x$. Donc $(x^{\perp q_1})^{\perp q_2} = B_2^{-1} B_1 \text{Vect}\{x\}$. De même, on a $(x^{\perp q_3})^{\perp q_1} = B_1^{-1} B_3 \text{Vect}\{x\}$. Vu que ces deux espaces sont supposés être les mêmes, on obtient que $B_2^{-1} B_1 \propto B_1^{-1} B_3$, soit $B_3 \propto B_1 B_2^{-1} B_1$.

Puisque la constante ne nous importe, on pose $B_3 = B_1 B_2^{-1} B_1$ et C_3 la conique définie par cette matrice. Nous allons vérifier qu'elle est bien en involution avec C_1 et C_2 :

$$\text{Tr}(B_1^{-1} B_3) = \text{Tr}(B_1^{-1} B_1 B_2^{-1} B_1) = \text{Tr}(B_2^{-1} B_1) = 0,$$

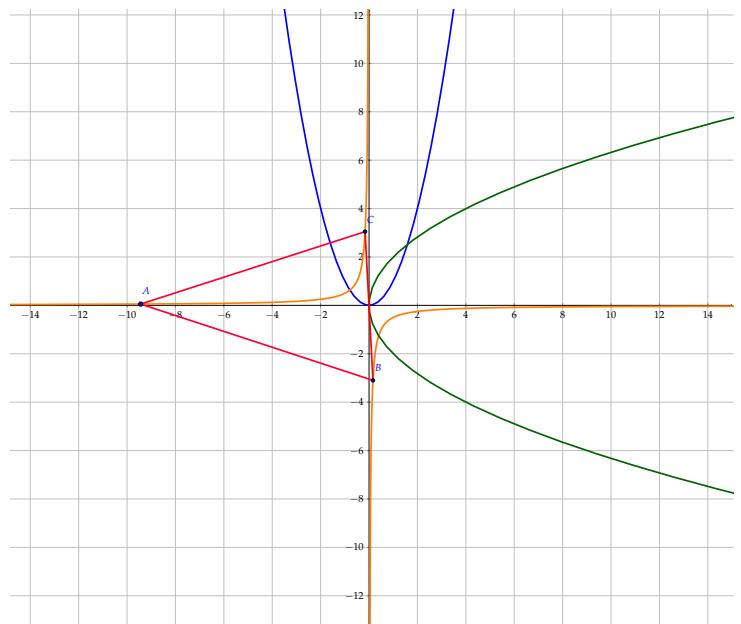
$$\text{Tr}(B_3^{-1} B_1) = \text{Tr}(B_1^{-1} B_2 B_1^{-1} B_1) = \text{Tr}(B_1^{-1} B_2) = 0,$$

Pour les deux prochains calculs, on applique le lemme : $(B_2^{-1} B_1)^3 = \alpha I_3 \implies (B_2^{-1} B_1)^2 = \alpha B_1^{-1} B_2$ (idem en inversant 1 et 2) :

$$\text{Tr}(B_2^{-1} B_3) = \text{Tr}(B_2^{-1} B_1 B_2^{-1} B_1) = \text{Tr}(\alpha B_1^{-1} B_2) = 0,$$

$$\text{Tr}(B_3^{-1} B_2) = \text{Tr}(B_1^{-1} B_2 B_1^{-1} B_2) = \text{Tr}(\alpha B_2^{-1} B_1) = 0.$$

Ainsi, ces trois coniques sont deux à deux en involution, et on vérifie bien en répétant l'analyse le postulat de Gerbaldi sur l'existence de la droite. De plus, puisque le théorème 1 fonctionne aussi pour le cas réel, on peut construire de la même manière une troisième telle conique à partir des deux premières !



Effectivement, l'involution de ces 3 coniques ne saute pas aux yeux !

2 Le théorème de Gerbaldi

Pour le reste du rapport, ω désignera une racine cubique complexe de l'unité.

THÉORÈME : Il existe 6 coniques deux à deux en involution.

PREUVE : Pour le montrer, nous allons les calculer explicitement en suivant la méthode de Gerbaldi. Premièrement, nous allons poser :

$$\begin{aligned} q_1 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ q_2 &= x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2 \end{aligned}$$

Maintenant, on pose une forme quadratique arbitraire (donnant une conique \mathcal{C} , de matrice B) et nous allons essayer de déduire ses coefficients des conditions d'involution : $q = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$.

$$\text{Tr}(B_1^{-1}B) = \text{Tr}(B_2^{-1}B) = 0 \implies \begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \\ a_{11} + \omega^2 a_{22} + \omega a_{33} = 0 \end{cases} \implies (a_{11}, a_{22}, a_{33}) = \rho(1, \omega^2, \omega).$$

pour $\rho \in \mathbb{C}^*$.

Ensuite, sachant que B_1 et B_2 sont diagonales, seuls les coefficients diagonaux de B^{-1} sont nécessaires pour calculer les deux autres traces. On peut donc utiliser la formule de la co-matrice pour alléger le calcul (en ignorant le déterminant qui est un facteur scalaire, donc ignoré) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B^{-1}B_1) &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \\ &= \rho^2(\omega^2 + \omega + 1) - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 \\ &= -a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2. \end{aligned}$$

De la même manière, $\text{Tr}(B^{-1}B_2) = -\omega^2 a_{12}^2 - \omega a_{13}^2 - a_{23}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B^{-1}B_1) = \text{Tr}(B^{-1}B_2) = 0 &\implies \begin{cases} a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 = 0 \\ \omega^2 a_{12}^2 + \omega a_{13}^2 + a_{23}^2 = 0 \end{cases} \\ &\implies (a_{12}^2, a_{13}^2, a_{23}^2) = \lambda^2(\omega^2, \omega, 1) \\ &\implies (a_{12}, a_{13}, a_{23}) = \lambda(\pm\omega, \pm\omega^2, \pm 1) \end{aligned}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Il existe $2^3 = 8$ configurations de signes, et plus que 4 en factorisant un signe $(-)$; comme les quatre coniques qu'il nous manque. En divisant chaque ligne par ρ , on peut se permettre de poser les quatre dernières formes quadratiques (linéairement indépendantes) :

$$\begin{aligned} q_3 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + 2k(yz + \omega^2 xz + \omega xy) \\ q_4 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + 2l(yz - \omega^2 xz - \omega xy) \\ q_5 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + 2m(-yz + \omega^2 xz - \omega xy) \\ q_6 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + 2n(-yz - \omega^2 xz + \omega xy) \end{aligned}$$

On pourrait se demander s'il n'est pas possible que deux de ses formes aient la même configuration de signe (ici par exemple celle de q_3) avec juste des coefficients k et k' différents. En

appelant M la matrice avec k et N celle de k' , leur involution nous donnerait :

$$\mathrm{Tr}(M^{-1}N) = \frac{3}{2k^2 - k - 1}(2kk' - k - 1) = 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(N^{-1}M) = \frac{3}{2k'^2 - k' - 1}(2kk' - k' - 1) = 0$$

$\implies k = 2kk' - 1 = k' \implies k = k'$, ce qui est impossible ! Le résultat étant identique pour chaque configuration, on se permet bien de définir les 4 dernières formes comme ci-dessus.

Nous allons une fois de plus utiliser l'involution pour déterminer k, l, m et n . Pour $u, v \in \{k, l, m, n\}$ différents, on obtient (à l'aide de Sage [Case 1]) les 12 équations de la forme $2uv + 3u + 3 = 0$. Ainsi, $u = -\frac{2uv + 3}{3} = v$, ce qui donne que $k = l = m = n$. Finalement, on obtient que $2k^2 + 3k + 3 = 0 \implies k = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{4} = l = m = n$.

C'est ainsi que s'achève la preuve, on a réussi à exhiber 6 coniques telles que chacune soit en involution avec les cinq autres, définies par les 6 formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} q_1 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ q_2 &= x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2 \\ q_3 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2}(yz + \omega^2 xz + \omega xy) \\ q_4 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2}(yz - \omega^2 xz - \omega xy) \\ q_5 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2}(-yz + \omega^2 xz - \omega xy) \\ q_6 &= x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2 + \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2}(-yz - \omega^2 xz + \omega xy) \end{aligned}$$

Les matrices des q_i seront notées B_i et leurs formes polaires φ_i jusqu'à la fin de ce rapport.

3 Le groupe de Valentiner

LEMME : Une homographie de matrice P dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ envoie une conique \mathcal{C} de matrice B sur la conique, notée $P(\mathcal{C})$, de matrice ${}^tP^{-1}BP^{-1}$.

PREUVE : $P(\mathcal{C}(q)) = \{Px \mid q(x) = 0\} = \{x \mid q(P^{-1}x) = 0\} = \{x \mid {}^t x({}^t P^{-1}BP^{-1})x = 0\}$, ce qui est ce que l'on voulait dans \mathbb{CP}^2 . \square

Dans cette partie, on notera $\mathcal{S} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6\}$. Si P et Q stabilisent \mathcal{S} , alors PQ et P^{-1} aussi, faisant de l'ensemble de ces homographies un groupe. Dans un premier temps, on étudiera ce groupe $\mathrm{Stab}(\mathcal{S}) = \{P \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \mid \forall \mathcal{C} \in \mathcal{S}, P(\mathcal{C}) \in \mathcal{S}\}$, puis dans un second temps son relèvement à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, que l'on notera simplement \mathcal{V} , et qui sera notre fameux groupe de Valentiner.

3.1 Le groupes des homographies stabilisant les 6 coniques

Nous allons d'abord montrer un théorème d'algèbre linéaire qui s'avérera très utile dans cette sous-partie :

THÉORÈME : Deux formes quadratiques q et q' non dégénérées sur \mathbb{C}^n sont codiagonalisables ; c'est-à-dire qu'il existe une base dans laquelle $q = x_1^2 + \dots + x_n^2$ et $q' = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$.

PREUVE : Nous allons le montrer par récurrence. Le théorème est vrai pour $n = 1$, et on le suppose vrai au rang $n - 1$.

On suppose qu'il existe $e_1 \in \mathbb{C}^n$ tel que $e_1^{\perp q} = e_1^{\perp q'} = H$ et $q(e_1) = 1$. On pose w et w' les restrictions de q et q' à H , qui sont codiagonalisables par l'hypothèse de récurrence. En notant (e_2, \dots, e_n) une base dans laquelle w et w' sont diagonales, on obtient que pour tout $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \in \mathbb{C}^n$, $q(v) = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ et $q'(v) = v_1^2 q'(e_1) + v_2^2 q'(e_2) + \dots + v_n^2 q'(e_n)$. En posant $\lambda_i = q'(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors on aurait montré le résultat voulu.

Montrons à présent que e_1 existe. On pose $f : \mathbb{C}^n \rightarrow (\mathbb{C}^n)^*$, $u \mapsto (v \mapsto \varphi(u, v))$ et f' de la même manière avec φ' .

Alors $f'(u) = f(B^{-1}B'u)$ pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. Or $T = B^{-1}B'$ admet un vecteur propre $e_1 \in \mathbb{C}^n$ de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Ainsi : $f'(e_1) = f(Te_1) = f(\lambda e_1) = \lambda f(e_1) \implies e_1^{\perp q'} = \mathrm{Ker}(f(e_1)) = \mathrm{Ker}(f'(e_1)) = e_1^{\perp q}$. \square

COROLLAIRE : Pour \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux coniques en involution, on peut toujours les ramener à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 par une homographie.

PREUVE : On note $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ la matrice de changement de base, $C = {}^t PBP$ et $C' = {}^t PB'P$. Alors : $\mathrm{Tr}(C^{-1}C') = \mathrm{Tr}(P^{-1}B^{-1}{}^t P^{-1}{}^t PB'P) = \mathrm{Tr}(P^{-1}B^{-1}B'P) = \mathrm{Tr}(B^{-1}B') = 0$, idem $\mathrm{Tr}(C^{-1}C') = 0$. Les images des coniques sont encore en involution. Cela nous donne les équations déjà vues, en notant $C' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ et $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0$. Une solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \omega, \omega^2)$, rapportant ainsi \mathcal{C} à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}' à \mathcal{C}_2 . \square

Avant de vraiment passer à l'établissement du groupe, on va montrer une proposition qu'on utilisera bientôt et qui est un sous-cas du théorème de Bézout :

PROPOSITION : Deux coniques projectives \mathcal{C} et \mathcal{C}' admettent 4 points d'intersection qui forment un repère projectif.

PREUVE : D'après le corollaire précédent, on pose g une homographie envoyant \mathcal{C} sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}' sur \mathcal{C}_2 . Maintenant, il suffit de calculer les points d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , car $g^{-1}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. Après un calcul dont on peut se passer des détails, on trouve que l'intersection des cônes isotropes consiste en 4 droites vectorielles, données par $\text{Vect}\{(\pm\omega^2, \pm\omega, 1)\}$, ce qui correspond exactement à 4 points dans \mathbb{CP}^2 . De plus, chaque triplet de ces vecteurs forme une base, ce qui donne bien un repère projectif. \square

THÉORÈME : Si g et h sont deux homographies telles que $g(\mathcal{C}_i) = h(\mathcal{C}_i) \in \mathcal{S}$ pour tout $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, alors $g = h$.

1^{ÈRE} PREUVE : Cela revient à montrer que la seule homographie f telle que $f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ est l'identité.

En notant P^{-1} une matrice de f telle que $\det(P) = 1$ (on définit P avec l'inverse pour alléger les notations), l'énoncé se transforme en : on a ${}^t P B_i P = \lambda_i B_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, pour tout $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$; montrer que P est une homothétie.

Soit $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. On remarque en prenant le déterminant de chaque côté que $\lambda_i^3 = \det(P)^2 = 1$, ce qui signifie que :

$${}^t P^3 B_i P^3 = {}^t P ({}^t P ({}^t P B_i P) P) P = \lambda_i^3 B_i = B_i \implies \forall S \in \text{Sym}_3(\mathbb{C}), {}^t P^3 S P^3 = S,$$

car $(B_i)_{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket}$ est une base de $\text{Sym}_3(\mathbb{C})$. En posant $Q = P^3$ et en remplaçant S par I_3 , on trouve que ${}^t Q = Q^{-1}$. Ainsi, Q commute avec toutes les matrices symétriques, et c'est assez restrictif sur la nature de Q .

Soit $v \in \mathbb{C}^3$, alors $v({}^t v)$ est une matrice symétrique 3×3 ; on obtient :

$$Qv({}^t v) = v({}^t v)Q \implies Qv({}^t v)v = v({}^t v)Qv \implies ({}^t v v)Qv = ({}^t v Qv)v,$$

Qv est proportionnel à v pour tout $v \in \mathbb{C}^3$, donc il existe $\gamma \in \mathbb{C}^*$ tel que $Q = P^3 = \gamma I_3$. En prenant le déterminant de chaque côté, on trouve que $\det(P^3) = \det(P)^3 = \gamma^3 = 1$. De plus, ${}^t Q Q = \gamma^2 I_3 = I_3$, impliquant $\gamma^2 = 1$. La seule solution possible de $\gamma^2 = \gamma^3 = 1$ est $\gamma = 1$. Donc $P^3 = I_3$.

Le polynôme minimal de P divise $X^3 - 1$ qui est à racines simples, donc P est diagonalisable, de matrice de passage Q ($P = Q \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) Q^{-1}$), et de valeurs propres incluses dans $\{1, \omega, \omega^2\}$. De plus, $\det(P) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$ ce qui donne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \propto (1, 1, 1)$ ou $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \propto (1, \omega, \omega^2)$. Nous allons à présent essayer d'exclure le deuxième cas.

Pour $S \in \text{Sym}_3(\mathbb{C})$, on pose $C_Q(S) = {}^t Q S Q$, $\Pi(S) = {}^t P S P$ et $B'_i = C_Q(B_i)$, qui est la matrice de B_i dans la base diagonalisante de P . On a encore $\text{Tr}(B'_i{}^{-1} B'_i) = \text{Tr}(B_i{}^{-1} B_i) = 0$ pour $i \neq j$. Enfin, on pose $\tilde{\Pi}(S) = C_Q \circ \Pi \circ C_Q^{-1}(S) = {}^t (Q P Q^{-1}) S (Q P Q^{-1}) = D S D$. On trouve alors : $\tilde{\Pi}(B'_i) = C_Q \circ \Pi(B_i) = \lambda_i C_Q(B_i) = \lambda_i B'_i$, donc les B'_i sont des vecteurs propres de $\tilde{\Pi}$.

On suppose maintenant que $\text{diag}(1, \omega, \omega^2)$ quitte à réarranger la base. On obtient en notant E_{ij} les matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(E_{ii}) &= (D E_{ii}) D = \alpha_i E_{ii} D = \alpha_i^2 E_{ii} \\ \tilde{\Pi}(E_{ij} + E_{ji}) &= (\alpha_j E_{ij} + \alpha_i E_{ji}) D = \alpha_i \alpha_j (E_{ij} + E_{ji}). \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de $\tilde{\Pi}$ sont $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3$; soit 1, ω et ω^2 , chacune de multiplicité 2. Puisque $6 > 3$, il existe un espace propre contenant au moins B_i' et B_j' , qu'on suppose être celui associé à 1 sans perte de généralité.

On note $E(x, y) = xE_{11} + y(E_{23} + E_{32})$, alors $E_1 = \{E(x, y) \mid x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}\}$. On a alors : $\det(E(x, y)) = -xy^2 \implies E(x, y)$ est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, d'inverse $E(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

Soit $x, y, x', y' \in \mathbb{C}^*$ tels que $B_i' = E(x, y)$ et $B_j' = E(x', y')$. On note $X = \frac{x'}{x}, Y = \frac{y'}{y}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(B_i'^{-1}B_j') &= \frac{x'}{x} + 2\frac{y'}{y} = 0 \implies X + 2Y = 0, \\ \mathrm{Tr}(B_j'^{-1}B_i') &= \frac{x}{x'} + 2\frac{y}{y'} = 0 \implies 2X + Y = 0.\end{aligned}$$

La seule solution de ce système est $(X, Y) = (0, 0)$ ce qui est absurde ! Le seul choix pour D est qu'elle soit scalaire, ce qui implique directement que P aussi, concluant la preuve. \square

J'avais montré le théorème une première fois grâce à l'algèbre linéaire et de manière laborieuse, mais ayant pensé à une seconde preuve récemment, qui plus est projective, plus courte et élégante, je me suis dit que les deux méritaient leur place ici.

2^{ÈME} PREUVE : De la même manière, soit f une homographie telle que $f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Une homographie étant définie uniquement par l'image de 4 points, notre objectif est de construire 4 points fixes pour f .

On a comme propriété très utile que $f(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j) = f(\mathcal{C}_i) \cap f(\mathcal{C}_j) = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$. Nous savons que cette intersection compte 4 points (x_1, x_2, x_3, x_4) et f ne fait que les mélanger ; on peut alors poser $f(x_i) = x_{\sigma(i)}$, avec $\sigma \in S_4$.

Si σ admet un point fixe alors on a gagné,

Si $\sigma = (a \ b)(c \ d)$ est une double transposition, alors la droite $(x_a x_b)$ est envoyée sur elle-même, et idem pour la droite $(x_c x_d)$. En notant m leur point d'intersection, on obtient que $f(m) = m$.

Enfin, si $\sigma = (a \ b \ c \ d)$ est un 4-cycle, les droites $(x_a x_c)$ et $(x_b x_d)$ s'envoient l'une sur l'autre. En notant une nouvelle fois m leur point d'intersection, on obtient que $f(m) = m$.

La dernière question à se poser est "existe-t-il assez de points d'intersection différents pour que ça fonctionne ? et de droites formées à partir de ces points ?". Il existe 15 paires de coniques différentes, chacune admettant 4 points d'intersection. Grâce à Sage [Case 3], on montre que les 60 points sont tous distincts. En revanche, il pourrait se passer l'étrange phénomène que beaucoup de droites se rencontrent en très peu de points, or encore une fois, les 45 paires de droites différentes forment 45 points d'intersection tous distincts. C'est-à-dire qu'on peut construire au minimum 15 points fixes de f rien qu'en étudiant les intersections de coniques, ce qui est plus que suffisant pour conclure que f est l'identité. \square

Ce théorème est important car il nous permet de dire que $\mathrm{Stab}(\mathcal{S})$ s'injecte dans S_6 , puisqu'à une permutation des coniques correspond une homographie au maximum.

Pour "créer" des homographies stabilisant les 6 coniques, on commence par s'intéresser seulement à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On va essayer de trouver toutes les homographies stabilisant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , et pour cela on s'intéresse une fois de plus à leur intersection, notée (x, y, z, w) , telle que $x + y + z + w = 0$. On pose P la matrice de passe de la base canonique à (x, y, z) , qui conju-

guera une matrice g_σ , où $\sigma \in S_{\{x,y,z,w\}}$. Si σ envoie w sur w , alors la matrice sera une matrice de permutation, et si $\sigma = (x \ y \ w)$ par exemple, on obtient la forme suivante : $g_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec une colonne de -1 à l'emplacement de y car $\sigma(y) = w = -x - y - z$. On pose alors f l'homographie de matrice $A = Pg_\sigma P^{-1}$.

PROPOSITION : f stabilise $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ ainsi que $\{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6\}$.

PREUVE : Nous allons montrer en premier que $f(\mathcal{C}_1)$ et $f(\mathcal{C}_2)$ ont pour matrice une combinaison linéaire de B_1 et B_2 (on dit qu'ils appartiennent au *pinceau* de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , appellation très élégante). Soit v_1, v_2, v_3, v_4 des représentants des 4 points d'intersection \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, on pose la forme linéaire $L_{v_i} : \text{Sym}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $S \mapsto {}^t v_i S v_i$. Nous allons montrer qu'elles sont indépendantes, ce qui nous donnera :

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^4 \text{Ker}(L_{v_i}) \right) = 2, \text{ et } B_1, B_2 \in \bigcap_{k=1}^4 \text{Ker}(L_{v_i}) = E$$

sont indépendantes, alors $E = \text{Vect}(B_1, B_2)$ et pour finir, $\text{Mat}(f(\mathcal{C}_1)), \text{Mat}(f(\mathcal{C}_2)) \in E$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ des complexes non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^4 \alpha_i L_{v_i} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i {}^t v_i S v_i = 0$. Soit $y, z \in \mathbb{C}^3$, on remplace S par $y^t z + z^t y$ dans l'expression ci-dessus :

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i {}^t v_i (y^t z + z^t y) v_i = 2 \sum_{i=1}^4 \alpha_i ({}^t v_i y) ({}^t z v_i) = 2 \sum_{i=1}^4 \alpha_i ({}^t z v_i) ({}^t v_i y) = {}^t z \left(\sum_{i=1}^4 2 \alpha_i v_i {}^t v_i \right) y = 0$$

La dernière expression est une forme bilinéaire nulle sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$, ce qui signifie que la matrice $M = \sum_{i=1}^4 2 \alpha_i v_i {}^t v_i$ la définissant est nulle. On va essayer de l'évaluer en des vecteurs particuliers pour trouver une contradiction.

On pose V la matrice dont les colonnes sont (v_1, v_2, v_3) , et on appelle (u_1, u_2, u_3) les colonnes de ${}^t V^{-1}$, ce qui nous donne ${}^t u_i v_j = \delta_{ij}$. Puisque v_4 n'est pas nul et (u_1, u_2, u_3) forme une base de \mathbb{C}^3 , il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que ${}^t u_j v_4 \neq 0$.

Alors : $M u_j = \sum_{i=1}^4 2 \alpha_i v_i ({}^t v_i u_j) = 2 \alpha_j v_j + 2 \alpha_4 ({}^t v_4 u_j) v_4 = 0$. Sachant que v_j et v_4 sont indépendants, alors $\alpha_j = \alpha_4 = 0$. En posant $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on réitère cette fois en posant V la matrice dont les colonnes sont (v_i, v_j, v_4) ; ce qui nous donnera au moins $\alpha_k = 0$.

Puisqu'au moins trois des coefficients sont nuls, le quatrième aussi, ce qui conclut cette première partie de la preuve.

De la même manière qu'à la preuve précédente, on notera $E(a, b) = aB_1 + bB_2$ et posera $\Pi(S) = {}^t A^{-1} S A^{-1}$, qui envoie la matrice de la conique \mathcal{C} sur la matrice de la conique $f(\mathcal{C})$. On note enfin $\Pi(B_1) = E(a, b)$ et $\Pi(B_2) = E(c, d)$. $f(\mathcal{C}_1)$ et $f(\mathcal{C}_2)$ restent en involution comme déjà vu précédemment, ce qui nous donne les deux équations sur a, b, c et d :

$$a^2 b + c^2 d = 0 \text{ et } ab^2 + cd^2 = 0 \implies a^2 b^2 + bc^2 d = 0 \text{ et } ab^2 = -cd^2 \implies cd(bc - ad) = 0.$$

Si $c = 0$, alors $d \neq 0$ sinon $\Pi(B_2) = 0$. Cela nous donne que $\Pi(B_2)$ est proportionnel à B_2 ; mais également que $a = 0$ ou $b = 0$. $\Pi(B_1)$ et $\Pi(B_2)$ ne pouvant être proportionnels, $\Pi(B_1)$ et B_1 le sont.

Idem si $d = 0$, on obtiendrait $\Pi(B_1) \propto B_2$ et $\Pi(B_2) \propto B_1$.

Si $bc = ad$, alors on peut écrire $(a, b, c, d) = (a, \lambda a, c, \lambda c)$. Or cela impliquerait que $\Pi(B_1) \propto \Pi(B_2)$, ce qui est impossible. On vient de montrer que f stabilise $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$.

Sans perte de généralité, on pose $\Pi(B_1) = \lambda_1 B_1$ et $\Pi(B_2) = \lambda_2 B_2$. Soit $j \in \{3, 4, 5, 6\}$, on a :

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\Pi(B_j)^{-1}B_1) &= \frac{1}{\lambda_1} \text{Tr}(\Pi(B_j)^{-1}\Pi(B_1)) = \frac{1}{\lambda_1} \text{Tr}(B_j^{-1}B_1) = 0 \\ \text{Tr}(\Pi(B_j)^{-1}B_2) &= \frac{1}{\lambda_2} \text{Tr}(\Pi(B_j)^{-1}\Pi(B_2)) = \frac{1}{\lambda_2} \text{Tr}(B_j^{-1}B_2) = 0 \\ \text{Tr}(B_1^{-1}\Pi(B_j)) &= \frac{1}{\lambda_1} \text{Tr}(\Pi(B_1)^{-1}\Pi(B_j)) = \frac{1}{\lambda_1} \text{Tr}(B_1^{-1}B_j) = 0 \\ \text{Tr}(B_2^{-1}\Pi(B_j)) &= \frac{1}{\lambda_2} \text{Tr}(\Pi(B_2)^{-1}\Pi(B_j)) = \frac{1}{\lambda_2} \text{Tr}(B_2^{-1}B_j) = 0\end{aligned}$$

⊗ Donc chaque $\Pi(B_j)$ est en involution avec B_1 et B_2 , et de plus, chaque $\Pi(B_j)$ est en involution avec $\Pi(B_i)$ pour $i \neq j$. Alors $(\Pi(B_j))_{j \in [1;6]}$ est un système de 6 matrices deux à deux en involution, avec $\Pi(B_1) \propto B_1$ ou B_2 et $\Pi(B_2) \propto B_2$ ou B_1 : ce sont les 6 matrices des q_i de la page 6 ! Le seul problème restant est qu'il se pourrait que f envoie les coniques sur les coniques définies non pas avec $k = \frac{-3+i\sqrt{15}}{2}$ mais $\bar{k} = \frac{-3-i\sqrt{15}}{2}$. On note C_i les matrices avec le signe moins. On va montrer qu'il n'existe pas de telles homographies.

On suppose qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ tel qu'en posant $\Pi(S) = {}^t P S P$, Π envoie B_1 sur $C_1 (= B_1)$, B_2 sur $C_2 (= B_2)$ et le reste des B_i sur le reste des C_i .

On obtiendrait : ${}^t P P = I_3$ et ${}^t P B_2 P = B_2 \implies B_2 P = P B_2$. Le commutant d'une matrice diagonale non scalaire est l'ensemble des matrices diagonales, donc $P = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Réimplémenter P dans ${}^t P B_2 P = B_2$ implique que $\alpha_i^2 = 1$.

On s'intéresse maintenant à $\Pi(B_3) = C_3$; on cherche le coefficient non diagonal de B_3 et B_j qui sont égaux :

$$\begin{aligned}\Pi(B_3) = C_3 &\implies ({}^t P B_3 P)_{1,2} = (C_3)_{1,2} \implies \alpha_1 \alpha_2 k j = \bar{k} j : \text{impossible !} \\ \Pi(B_3) = C_4 &\implies ({}^t P B_3 P)_{2,3} = (C_4)_{2,3} \implies \alpha_2 \alpha_3 k = \bar{k} : \text{impossible !} \\ \Pi(B_3) = C_5 &\implies ({}^t P B_3 P)_{1,2} = (C_5)_{1,3} \implies \alpha_1 \alpha_3 k j^2 = \bar{k} j^2 : \text{impossible !} \\ \Pi(B_3) = C_6 &\implies ({}^t P B_3 P)_{2,3} = (C_6)_{1,2} \implies \alpha_1 \alpha_2 k j = \bar{k} j : \text{impossible !}\end{aligned}$$

Donc P n'existe pas. En revanche, je n'ai pas réussi à finir en considérant le cas plus général où $\Pi(B_i) = \lambda_i C_j$, je ne sais pas s'il faut trouver une contradiction en arrivant par exemple à exhiber une homographie qui agirait comme celle qu'on a démontrée inexisteante, ou si c'est juste fastidieux et laborieux.

Dans tous les cas, en utilisant Sage [Case 3] on a bien que f n'envoie pas $\{C_3, C_4, C_5, C_6\}$ sur les coniques définies avec \bar{k} . □

PROPOSITION : f induit une permutation paire sur \mathcal{S} .

PREUVE : La proposition précédente nous permet de dire que ce que l'on a construit en choisissant $\sigma \in S_4$ et en le transformant en homographie, est un morphisme $\phi : S_4 \rightarrow S_2 \times S_4 \subset S_6$.

On pose $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, avec $\phi_1 : S_4 \rightarrow S_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\phi_1 : S_4 \rightarrow S_4$.

On a pour tout $\sigma \in S_4$, $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\phi_1(\sigma))\varepsilon(\phi_2(\sigma))$; puisque pour retrouver notre permutation de S_6 on identifie S_4 et $S_{\{3,4,5,6\}}$ puis multiplie les deux coordonnées de $\phi(\sigma)$.

En sachant que $\sigma = (x \ y)$ agit sur \mathcal{S} comme $(1 \ 2)(3 \ 6)$, alors on sait que $\varepsilon(\phi_1)$ n'est pas le morphisme constant. Mais le seul morphisme non constant de $S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ étant la signature, $\varepsilon(\phi_1) = \varepsilon$.

De plus, pour $n \neq 6$, tous les morphismes de S_n sont intérieurs. Alors ϕ_2 est un morphisme intérieur, donc il existe $\delta \in S_4$ tel que $\phi_2(\sigma) = \delta^{-1}\sigma\delta$, ce qui implique que : $\varepsilon(\phi_2(\sigma)) = \varepsilon(\delta^{-1}\sigma\delta) = \varepsilon(\delta)^{-1}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta) = \varepsilon(\sigma)$.

Finalement : $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\phi_1(\sigma))\varepsilon(\phi_2(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma)^2 = 1$, donc f induit bien une permutation paire sur \mathcal{S} . \square

On a presque terminé. Sage [Case 6] nous permet de voir que grâce à cette méthode, on a générée toutes les doubles transpositions dont l'une des deux est $(1\ 2)$. Grâce au premier théorème de cette partie, on peut envoyer $(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j)$ sur $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ par une homographie g . En reprenant la fin de la preuve, au point \circledast en dessous des équations de la page 11, $g \in \text{Stab}(\mathcal{S})$. Si on conjugue chacune des homographies agissant comme des doubles transpositions avec $(1\ 2)$ par g , on obtient alors toutes les doubles transpositions avec $(i\ j)$, c'est-à-dire toutes les doubles transpositions. Sachant qu'elles génèrent A_6 , on a que A_6 s'injecte dans $\text{Stab}(\mathcal{S})$.

THÉORÈME : $\text{Stab}(\mathcal{S})$ est isomorphe à A_6 .

PREUVE : Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\text{Stab}(\mathcal{S})$ n'agit jamais comme une permutation impaire. Soit $h \in \text{Stab}(\mathcal{S})$ une homographie agissant sur \mathcal{S} comme une permutation impaire. Les seules possibilités sont une transposition, une triple transposition, une transposition et un 3-cycle, un 4-cycle ou un 6-cycle. Le but est de multiplier les cas ne stabilisant pas deux coniques par une permutation paire. Dans chaque cas, on considère l'homographie g qui agit comme l'inverse de h multiplié par $(3\ 4\ 5\ 6)$. $g \in \text{Stab}(\mathcal{S})$ car g agit comme une permutation paire.

Alors gh agit encore comme une permutation impaire, stabilise $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$, donc leurs 4 points d'intersection, donc il existe une matrice de permutation g_σ et P la matrice de changement de base comme au début. Alors gh devrait agir comme une permutation paire par la proposition précédente, ce qui est impossible. \square

3.2 Le relèvement de $\text{Stab}(\mathcal{S})$ à $\text{SL}_3(\mathbb{C})$

Dans notre cas, on a que $\text{PGL}(E) = \text{PGL}_3(\mathbb{C}) = \text{GL}_3(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*I_3 = \text{SL}_3(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*I_3$, le groupe des matrices inversibles à un scalaire près.

Alors on définit $\mathcal{V} = \{M \in \text{SL}_3(\mathbb{C}) \mid \pi(M) \in \text{Stab}(\mathcal{S})\}$. $\text{Stab}(\mathcal{S})$ possède 360 éléments, on définit alors une matrice représentante de chaque classe dans $\text{SL}_3(\mathbb{C})$, dont on note \mathcal{M} leur ensemble.

Soit $P \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{V} &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}, \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, P = \lambda M, \lambda^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}, \exists \lambda \in \{1, \omega, \omega^2\}, P = \lambda M \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $\mathcal{V} = \{1, \omega, \omega^2\} \times \mathcal{M}$. Alors $\text{Card}(\mathcal{V}) = \text{Card}(\{1, \omega, \omega^2\}) \times \text{Card}(\mathcal{M}) = 3 \times 360 = 1080$.

Nous allons maintenant définir ce qu'est une extension, qu'elle soit centrale, scindée et enfin montrer que \mathcal{V} est centrale non scindée, ce qui conclura ce rapport.

DÉFINITION : Soit $H, N < G$ des groupes, avec H distingué dans G . On dit que G est le *produit semi-direct interne* de H par K si pour tout $g \in G$, il existe une unique paire (h, k) dans $H \times K$ tel que $g = hk$. Dans ce cas, G est isomorphe au groupe $(H \times K, \bullet)$, où la loi est donnée par : $(h_1, k_1) \bullet (h_2, k_2) = (h_1(k_1 h_2 k_1^{-1}), h_1 h_2)$.

DÉFINITION : Soit N, H et G trois groupes, H abélien. On dit que G est une *extension* de K par H si les groupes rentrent dans la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1.$$

On dit que l'extension est *centrale* si H est inclus dans le centre de G , *scindée* si G est le produit semi-direct interne de H par K .

PROPOSITION : Soit G une extension de K par H . Si elle est centrale, alors elle est scindée si et seulement si G est le produit direct de H et K .

PREUVE : " \Leftarrow "

Soit $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in G$, on a $(h_1, k_1) \bullet (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1 k_2) = (h_1(k_1 h_2 k_1^{-1}), k_1 k_2)$ car $h_2 k_1 = k_1 h_2$ puisque H est inclus dans le centre. Donc le produit direct est un produit semi-direct interne, donc l'extension est scindée.

" \Rightarrow " $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in G$, on a $(h_1, k_1) \bullet (h_2, k_2) = (h_1(k_1 h_2 k_1^{-1}), k_1 k_2) = (h_1 h_2, k_1 k_2)$ car $h_2 k_1 = k_1 h_2$ puisque H est inclus dans le centre. Donc $G = H \times K$. \square

Avant de démontrer le théorème, on a besoin de ces deux petits lemmes :

LEMME : \mathcal{V} est égal au groupe engendré par ses commutateurs (on dit qu'il est *parfait*).

PREUVE : [Case 7] du fichier Sage. \square

LEMME : Un groupe G simple et non abélien est parfait.

PREUVE : On note $D(G)$ le groupe engendré par les commutateurs de G , il est distingué dans G (car $z[x, y]z^{-1} = [zxz^{-1}, zyz^{-1}]$). Soit $D(G) = G$, soit $D(G) = e$. Or si on était dans le deuxième cas, on aurait que G est abélien, ce qui est impossible. Alors $G = D(G)$. \square

THÉORÈME : Le groupe de Valentiner \mathcal{V} est une extension de A_6 par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ centrale non scindée.

PREUVE : Dans notre cas, le groupe correspondant à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est $\{I_3, \omega I_3, \omega^2 I_3\}$, et effectivement ces 3 matrices commutent avec toutes les autres, donc l'extension est centrale. Il nous suffit maintenant de montrer que $\mathcal{V} \neq A_6 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Si \mathcal{V} était le produit direct, alors : $\mathcal{V} = D(\mathcal{V}) = D(A_6) \times D(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = A_6 \times \{1\}$, ce qui est impossible. \square

Ce qui reste sacrément étonnant, sachant que vu comment on l'a défini, on pouvait s'attendre à ce qu'il soit isomorphe à $A_6 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

4 Bibliographie

J'ai utilisé les deux premiers livres pour m'initier à la géométrie projective, et en troisième l'article originel de F. Gerbaldi sur son théorème.

Références

- [1] Michèle Audin, *Géométrie (L3-M1)*, EDP Sciences, 2006.
- [2] Benoît Kloeckner, *Un bref aperçu de la géométrie projective*, Calvage et Mounet, 2012.
- [3] Francesco Gerbaldi, *Sei coniche in involuzione*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1901, 15, 382–397.