Approximation faible sur les espaces homogènes pour les corps de fonctions

(Version préliminaire)

Bucarest, Imar

Philippe Gille*‡

31 janvier 2013

Table des matières

*C.N.R.S. et Ecole normale supérieure, Département de Mathématiques, 45 rue d'Ulm, F-75005 Paris

Il existe sur ce thème des références assez complètes, à savoir les articles de survol de B. Hasset [Has1] de D.Harari [Ha] et le livre de A. Skorobogatov [Sk].

1 Introduction

Avant les corps de fonctions, l'étude de l'approximation faible est venue des corps de nombres. Un premier exemple d'énoncé d'approximation faible est le suivant. On se donne un $\mathbb{Q}$–groupe algébrique linéaire G, à savoir un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$. Alors le groupe $G(\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}$–points de G est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il est en particulier muni de la topologie réelle. Le groupe $\mathbb{G}(\mathbb{Q})$ est un sous–groupe de $\mathbb{G}(\mathbb{R})$. Il est clair que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ et c'est un résultat classique remarquable (Kneser [Kn]) que si G est connexe, alors $G(\mathbb{Q})$ est dense dans $G(\mathbb{R})$.

L'approximation forte est un thème plus diophantien, il s'agit par exemple de comprendre l'adhérence de $G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ dans $G(\mathbb{R})$. Cela est vrai pour SL_n mais pas pour GL_n.

Etant donné une variété lisse $X/\mathbb{Q}$, nous verrons que $X(\mathbb{R})$ est munie d'une structure naturelle de variété différentiable qui, d'après Whitney, a un nombre fini de composantes connexes. Une question naturelle est de comprendre l'adhérence de $X(\mathbb{Q})$ dans $X(\mathbb{R})$ au moins si X a "beaucoup de points" ce qui s'exprime en demandant que $X(\mathbb{Q})$ est Zariski dense dans X. Sous cette hypothèse, B. Mazur a conjecturé que l'adhérence de $X(\mathbb{Q})$ est une réunion de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$. Ceci était trop optimiste : Colliot-Thélène/Skorobogarov/Swinnerton-Dyer ont construit une surface projective lisse $X/\mathbb{Q}$ telle que $X(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes $X(\mathbb{R})_\pm$ et tel que l'adhérence de $X(\mathbb{Q})$ dans $X(\mathbb{R})$ soit $X(\mathbb{R})_+ \sqcup \{x_-\}$. Pour les amateurs d'équations explicites, les voici :

$$y^2 = (4t^4 + t^2 - 4x), \quad z^2 = (4t^4 + t^2 - 4)(x^2 + 4x - 1).$$

Les exposés traiteront le cas particulier des espaces homogènes ayant des points rationnels, c'est-à-dire de variétés quotients G/H où G est un groupe algébrique linéaire sur le corps de base k. Lorsque k est un corps de nombres et H est connexe ou abélien, l'approximation faible a été étudiée par M. Borovoi [Bov1, Bov2]. Pour k corps de fonctions d'une courbe complexe, ceci a été étudié par Colliot-Thélène et le rapporteur [CTG].

Dans ces exposés, nous présentons des généralités sur l'approximation faible et discutons de façon assez systématique le cas des corps de fonctions d'une courbe complexe, des espaces homogènes G/H et de certaines surfaces.

2 Sorites

2.1 Topologie forte

Soit K un corps topologique séparé et non discret. Si X/K est un schéma de type fini, la topologie "forte" sur $X(K)$ est par définition la topologie la moins fine rendant continues les applications

$$f_K : X(K) \to K$$

pour tout $f \in H^0(X, O_X)$. On note $X_{\text{top}} = X(K)_{\text{top}}$ cet espace topologique, il est séparé. Si X est une variété, la topologie forte est la topologie engendrée par les ouverts $U(K)_{\text{top}}$ pour U parcourant les ouverrs affines de X. La topologie forte vérifie les propriétés suivantes :

1. Si $X = \mathbf{A}^1_K$, la topologie forte sur $X_{\rm top} = K$ est celle de K ;
2. Tout K-morphisme $f : X \to Y$ de K–schémas de type finis induit une application continue $f_{\rm top} : X_{\rm top} \to Y_{\rm top}$.
3. Si f est une immersion ouverte (resp. fermée), alors $f_{\rm top}$ est un plongement topologique ouvert (resp. fermé).
4. Si X, Y sont des K-schémas de type fini, la bijection canonique $(X \times_K Y)_{\rm top} \to X_{\rm top} \times Y_{\rm top}$ est un homéomorphisme.
5. Si X est séparé, alors $X_{\rm top}$ est séparé.

On dit que le corps topologique K est faiblement hensélien si le théorème des fonctions implicites vaut pour K : Si $f : X \to Y$ est un morphisme lisse de K-schémas de type fini, alors pour tout $y \in \mathrm{Im}(f_{\rm top})$, alors il existe un ouvert Ω de $Y_{\rm top}$ et une section continue $\Omega \to X_{\rm top}$ de $f_{\rm top}$.

2.2 Remarque. – On peut "affaiblir" cette définition en demandant seulement que si f est étale, alors $f_{\rm top}$ est un homéomorphisme local [GMB, §2.1].

On rappelle qu'un corps K est hensélien s'il est le corps de fractions d'un anneau local hensélien (par exemple complet). La terminologie est consistante, puisque un corps hensélien K est faiblement hensélien ([GPR, th. 9.4], [GMB, prop. 2.14])

Pour le cas d'un corps valué complet (pour une valuation $v : K^\times \to \mathbb{R}$), le théorème des fonctions implicites analytiques est la façon standard [Se2, §III.9].

2.3 Lemme. – *On suppose que K est faiblement hensélien. Soit X/K une variété lisse connexe de dimension ≥ 1 et $U \subset X$ un ouvert dense. Alors $U(K)_{\rm top}$ est un ouvert dense de $X(K)_{\rm top}$.*

Démonstration: Soit $x \in X(K)$. Suivant [BLR, §2.2, prop. 11], il existe un voisinage ouvert V de X contenant x et un morphisme étale $f : V \to \mathbf{A}^n_K$ appliquant x sur 0. L'ouvert $W = f(V \cap U)$ est un ouvert dense de $\mathbf{A}^n_K$. Comme $f_{\rm top}$ est un homéomorphisme local, on est ramené à montrer que 0 est dans l'adhérence de $W(K)$. On pose $Z = \mathbf{A}^n_K \setminus W$. Si $n = 1$, alors Z est fini et $W(K)$ est dense dans K (puisque K est séparé non discret). On peut ensuite raisonner par récurrence sur $n \geq 1$. En effet, il existe un hyperplan H de $\mathbf{A}^n_K$ tel que $H \cap Z$ est un fermé strict de H. L'hypothèse de récurrence indique alors que 0 appartient à l'adhérence de $(W \cap H)_{\rm top}$ et donc à l'adhérence de $W_{\rm top}$. □

2.4 Définition de l'approximation faible

On se donne un ensemble fini (non vide) de valuations discrètes $(v_x)_{x\in\Sigma}$ sur un corps de base K indépendantes deux à deux. On note $\widehat{K}_x$ le complété et $\widehat{O}_x$ l'anneau de valuation correspondant. On sait alors que K est dense dans l'espace topologique produit $\prod_{x\in\Sigma}\widehat{K}_x$ [BAC, VI.7, corollaire 2].

Soit Y/K une variété. Le morphisme diagonal $K\to\prod_{x\in\Sigma}\widehat{K}_x$ donne lieu à une application injective

$$i_{K,\Sigma} : Y(K) \to \prod_{x\in\Sigma} Y(\widehat{K}_x).$$

2.5 Définition. – *On dit que Y/K satisfait l'approximation faible pour X relativement à X si $i_{K,\Sigma}(Y(K))$ est dense dans l'espace topologique produit* $\prod\limits_{x\in\Sigma} Y(\widehat{K}_x)_{\rm top}$.

Les espaces affines satisfont l'approximation faible, les groupes SL_n et GL_n. La surface bielliptique de l'introduction ne satisfait pas l'approximation faible pour $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

2.6 Remarque. – Les adèles donnent un cadre théorique pour traiter toutes les places en même temps, voir [Has1]. Cela est en particulier utile pour la définition d'invariants comme l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible [CTS3], [Ha].

2.7 Lemme. – *Soit Y/K une variété lisse et $U\subset Y$ un ouvert dense. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Y/K satisfait l'approximation faible pour l'ensemble de places Σ ;

(b) U/K satisfait l'approximation faible pour l'ensemble de places Σ ;

Démonstration: Le sens $(a)\Longrightarrow(b)$ est évident. Pour la réciproque, le lemme 2.3 indique $\prod_{x\in\Sigma}U(\widehat{K}_x)_{\rm top}$ est dense $\prod_{x\in\Sigma}Y(\widehat{K}_x)_{\rm top}$. Ainsi si $U(K)$ est dense $\prod_{x\in\Sigma}U(\widehat{K}_x)$, alors $U(K)$ (et a fortiori $X(K)$) est dense $\prod_{x\in\Sigma}U(\widehat{K}_x)$. □

2.8 Propriétés birationnelles

Soient X/k, Y/k des k-variétés (i.e. un k–schéma séparé de type fini) réduits et irréductibles.

2.9 Définition. – *On dit que X et Y sont birationnellement équivalents s'il existe un k–isomorphisme $k(X) \cong k(Y)$*

1. *X est k-rationnelle si X est k–birationnelle à un espace affine.*
2. *X est stablement k-rationnelle s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $X \underset{k}{\times} \mathbf{A}_k^n$ est k–birationnelle à l'espace affine.*
3. *X est facteur direct d'une variété k-rationnelle s'il existe une variété Z/k telle que $X \underset{k}{\times} Z$ est k–birationnelle à l'espace affine.*
4. *Y est rétracte k-rationnelle s'il existe un ouvert non vide U de X tel que l'identité de U factorise à travers un ouvert V d'un espace affine $\mathbf{A}_k^m$, i.e. il existe des morphismes $f : U \to V$ et $r : V \to U$ tels que $r \circ f = id_U$.*

On a 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4). La réciproque de 1) $\Longrightarrow$ 2) s'appelle le problème de Zariski, elle est fausse en général, même sur corps algébriquement clos [BCTSS]. Il existe des tores algébriques satifaisant 3) mais pas 2). Enfin n'y a pas d'exemple connu de variété rétracte rationnelle et non facteur direct d'une variété k–rationnelle.

La rétracte k–rationalité est la variante birationnelle d'un rétracte d'un espace affine. De nombreux énoncés d'approximation faible reposent sur le lemme suivant.

2.10 Lemme. – *Soit Y/K une variété lisse rétracte K–rationnelle. Alors pour tout ensemble fini (non vide) de places Σ de K, l'approximation faible vaut pour Y relativement à Σ.*

Elle admet la caractérisation suivante.

2.11 Proposition. – (Saltman [76, theorem 3.9] ; voir aussi [21, §1]) *Soit X une k-variété. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est rétracte k–rationnelle.*
2. *Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ tel que, pour toute k-algèbre locale A de corps résiduel κ, l'application $U(A) \to U(\kappa)$ est surjective.*

Nous appelons dans la suite de l'exposé « *propriété de relèvement* » la propriété 2).

Démonstration: 1) $\Longrightarrow$ 2) est le sens facile. Pour la réciproque, on peut supposer que $U = \mathrm{Spec}(B)$ est affine. La k–algèbre B étant de type fini, on considère un morphisme surjectif d'anneaux $R = k[t_1, \cdots, t_n] \to B = R/\mathfrak{P}$. Le corps de fonctions $k(X)$ est le corps résiduel de l'anneau local $R_{\mathfrak{P}}$. Par hypothèse, la flèche $U(R_{\mathfrak{P}}) \to U(k(X))$ est surjective. Le point générique ξ de U se relève donc en un morphisme $f : \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{P}}) \to U$. Il s'étend en un voisinage V de $[\mathfrak{P}]$ dans $\mathbf{A}^n_k = \mathrm{Spec}(R)$ de sorte que l'on obtient un morphisme $f : V \to U$ qui admet une section rationnelle. Ainsi X est rétracte k–rationnelle. $\square$

On arrive au cas des espaces homogènes.

2.12 Lemme. – *On suppose que le corps de base k est infini. Soit G un k–groupe réductif et H un sous–groupe fermé. On pose $Y = G/H$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le morphisme $Y(A) \to Y(\kappa)$ est surjectif pour toute k-algèbre locale A de corps résiduel κ ;*
2. *Y est une variété rétracte k-rationnelle.*

2.13 Remarque. – Si X_1 et X_2 sont des espaces homogènes, le lemme indique que le produit $X_1 \times_k X_2$ est rétracte k-rationnel si et seulement si X_1 et X_2 sont rétractes k-rationnels.

Démonstration: 1) $\Longrightarrow$ 2) : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.11.

2) $\Longrightarrow$ 1) : La proposition 2.11 produit un ouvert V de X ayant la propriété de relèvement. Vu que $V(k)$ est Zariski dense dans V, il existe $g_1, ..., g_n \in G(k)$ tel que $\bigcup g_i V = X$. Il est alors immédiat que X vérifie la propriété de relèvement. $\square$

2.14 Exemples. – (1) Si G/k est un groupe réductif déployé, c'est-à-dire admettant un k–tore maximal déployé $T \cong \mathbb{G}_m^r$, et un sous-groupe de Borel $B = U \rtimes T$, la décomposition de Bruhat décrit $G(k)$ de la façon suivante :

$$G(k) = \bigsqcup_{w \in W} U(k) n_w B(k)$$

où $W = N_G(T)/T$ désigne le groupe de Weyl et $n : W \to N_G(T)(k)$ une section enembliste de la projection $N_G(T)(k) \to W$. Si A est une k-algèbre locale de corps résiduel κ, il est alors clair que la spécialisation $G(A) \to G(\kappa)$

est surjective. Ainsi G est une variété rétracte k–rationnelle d'après le lemme 2.12.

Cet exemple est artificiel puisque G/k est une variété rationnelle. En effet, si w_0 désigne le plus long élément de W relativement à B (i.e. $n_{w_0} B n_{w_0}^{-1} \cap B = T$), alors $U \times_k B \cong U n_{w_0} B$ est une sous-variété ouverte de G. En tant que variété, U est isomorphe à une espace affine, G est donc une variétŕationnelle.

(b) Soit C/k une algèbre simple centrale de degré d sans facteurs carrés (squarefree en anglais, "liber de patrat" en roumain). On considère le k–groupe $H = \mathrm{GL}_1(C)$ des éléments inversibles de C ; son foncteur des points est $H(R) = (C \otimes_k R)^\times$ pour toute k–algèbre R. Le groupe H est muni dun morphisme de norme réduite $Nrd : G \to \mathbb{G}_m$ qui est géométriquement le déterminant $\mathrm{GL}_{d,\overline{k}} \to \mathbb{G}_{m,\overline{k}}$. On note $H = \mathrm{SL}_1(C)$ le noyau de $Nrd : H \to \mathbb{G}_m$. Le sous-groupe des commutateurs $[C^\times, C^\times]$ de $H(k)$ est un sous–groupe de $G(k)$. D'après Wang [Wg], on sait alors $H(k) = [C^\times, C^\times]$. Ainsi, H satisfait le critère de relévement et est une variété rétracte k-rationnelle.

(c) Si d a des facteurs carrés, le théorème de Wang n'est pas vrai en général et on connait d'exemples de tels groupes H qui ne satisfont pas la propriété d'approximation faible et qui ne sont donc pas rétractes k-rationnel (Platonov, [Pl]) ; il s'agit de corps de séries formelles itérées $\mathbb{Q}_p((x))((y))$ sur les p-adiques.

3 Le cas géométrique

Soit X une courbe projective lisse connexe définie sur le corps k. On note $K = k(X)$ son corps de fonctions. Chaque point fermé x de C définit une valuation v_x sur K. Soit Y/K une variété lisse quasi-projective. Quand c'est possible (c'est toujours le cas en caractéristique nulle d'après Hironaka), on a intérêt pour l'étude de l'approximation faible à compactifier X en une variété projective Y^c.

On se place désormais dans cette situation et on considère un C–modèle plat projectif $\mathfrak{Y}/C$ de Y/K. Un tel modèle provient de la construction suivante. On se donne un K–plongement $Y \to \mathbf{P}^m_K$ et on note $\mathfrak{Y}$ l'adhérence schématique de Y dans $\mathbf{P}^m \times_k X$. Alors

$$\mathfrak{Y}(X) = \{\text{sections de}\, \mathfrak{Y} \to X\}.$$

De plus pour chaque $x \in \Sigma$, on a $\mathfrak{Y}(\widehat{O}_x) = Y(\widehat{K}_x)$. L'application

$$i_{K,\Sigma} : Y(K) \to \prod_{x \in \Sigma} Y(\widehat{K}_x).$$

devient alors

$$i_{K,\Sigma} : \mathfrak{Y}(C) \to \prod_{x \in \Sigma} \mathfrak{Y}(\widehat{O}_x).$$

Par définition, $\widehat{O}_x = \varprojlim_n O_{X,x}/M_{X,x}^n$ d'où

$$\mathfrak{Y}(\widehat{O}_x) = \varprojlim_n \mathfrak{Y}(O_{X,x}/M_{X,x}^n).$$

Pour presque tout point x de C, $\mathfrak{Y}_x = \mathfrak{Y} \times_X \mathrm{Spec}(O_{X,x})$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(O_{X,x})$ de sorte que les morphismes de transition dans le système projectif $\big(\mathfrak{Y}(\widehat{O}_x/M_{C,x}^n)\big)$ sont surjectifs.

Si Σ consiste en de tels "bons" points, dire que Y/K satisfait l'approximation faible relativement à Σ revient à demander que les applications de jets

$$\mathfrak{Y}(X) \to \prod_{x \in \Sigma} \mathfrak{Y}(O_x/M_{X,x}^n)$$

soient surjectives pour tout $n \geq 1$.

Si x est un point tel que la fibre $\mathfrak{Y}_x$ soit non lisse, c'est plus délicat et ouvre un domaine de recherches (Kollár, Colliot-Thélène, Wittenberg, ...).

3.1 Remarque. – Les spécialistes désingularisent cet $\mathfrak{Y}$ afin d'obtenir un modèle régulier $\mathfrak{Y}' \to X$, voir [Has1].

3.2 Un avatar : la R-équivalence.

On part d'une variété X/k et prend $C = \mathbf{P}_k^1$ avec les points 0 et 1 (où ∞). On note A l'anneau semi-local de C en 0 et 1. On regarde alors l'image de l'application

$$u : X(A) \overset{ev_0 \times ev_1}{\longrightarrow} X(k) \times X(k).$$

Si $X \times_k K$ satisfait l'approximation faible pour $\Sigma = \{0, 1\}$, alors u est surjective.

Selon Manin, on dit que deux points x_0, x_1 de $X(k)$ sont directement (ou élémentairement) R-équivalents si $(x_0, x_1) \in \mathrm{Im}(u)$. La R-équivalence sur $X(k)$ est alors la relation d'équivalence engendrée par cette relation élémentaire.

Ainsi $X \times_k K$ satisfait l'approximation faible pour $\Sigma = \{0, 1\}$, alors $X(k)/R = 1$.

Si X est projective, on a $X(\mathbf{P}^1_k) = X(A)$ et donc l'application u devient $u : X(\mathbf{P}^1_k) \overset{ev_0 \times ev_1}{\to} X(k) \times X(k)$.

3.3 Remarque. – On s'attend à ce que le défaut de R–équivalence satisfasse des propriétés analogues à l'approximation faible. Par exemple, il est vrai (en car. nulle) que si X_1, X_2 sont des variétés propres et lisses qui sont birationnelles, alors il existe une bijection $X_1(k)/R \cong X_2(k)/R$ [CTS1, prop. 10]. En particulier, si X est rétracte k-rationnelle, on a $X(k)/R = 1$.

Si X est la compactification d'un k–groupe algébrique linéaire connexe [CTS1, prop. 11] (et plus généralement d'un espace homogène) et U un ouvert non vide, on a une bijection $U(k)/R \xrightarrow{\sim} X(k)/R$. La méthode est voisine de celle du lemme 2.12.

Ceci nous offre une transition vers les variétés rationnellement connexes.

3.4 Variétés rationnellement connexes, le théorème de Hasset-Tschinkel

Pour des raisons techniques, on suppose que le corps de base k est de caractéristique nulle (sinon la bonne notion est celle de variété séparablement rationnellement connexe). Kollár-Miyaoka-Mori ont isolé une classe remarquable de variétés.

3.5 Définition. – *Une variété propre et lisse X/k est dite rationnellement connexe si pour toute extension algébriquement close F/k et tout couple de points (x_0, x_1) de $X(F)$, il existe un F–morphisme $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ satisfaisant $f(0) = x_0$ et $f(x_1) = x_1$.*

Le "pour toute extension" peut-être simplifié à une extension algébriquement close F/k non dénombrable. Il se lit sur la définition qu'une variété propre lisse et géométriquement unirationnelle est rationnellement connexe. C'est le cas des compactifications lisses d'espaces homogènes sous un groupe algébrique linéaire connexe.

Il y a de nombreuses caractérisations équivalentes de ces variétés, par exemple l'existence sur une extension F/k d'un morphisme $f : \mathbf{P}^1_F \to X$ très libre, c'est-à-dire tel que $f^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(a_1) \oplus \dots \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_k}(a_d)$ avec $a_1 \geq a_2 \cdots \geq a_d \geq 1$.

D'après les mêmes auteurs (et indépendemment Campana [Ca]), les variétés de Fano sont rationnellement connexes. En particulier, une hypersurface lisse dans $\mathbf{P}^n$ de degré $d < n$ est rationnellement connexe.

3.5.1 Sur un corps $K = k(X)$, k algébriquement clos, le théorème de Tsen nous dit qu'une hypersurface (non nécessairement lisse) Y/K dans $\mathbf{P}^n_K$ de degré $d < n$ a un K–point. Dans le cas lisse, c'est une conjecture de savoir si Y/K satisfait l'approximation faible pour tout ensemble fini de points Σ de X.

Nous prenons un point de vue chronologique, le premier résultat sur ce thème étant le suivant.

3.6 Théorème. – *(Kollár-Miyaoka-Mori, 1992). Soit Y/K une variété rationnellement connexe et $f : \mathfrak{Y} \to X$ un modèle régulier, plat sur X. Soit Σ un sous-ensemble fini (non vide) du lieu lisse de f. Si $\mathfrak{Y}(X) \neq \emptyset$ alors l'application*

$$\mathfrak{Y}(X) \to \prod_{x \in \Sigma} \mathfrak{Y}(k(x))$$

est surjective.

Le théorème de Graber-Harris-Starr (2002) constitue d'une certaine façon une incroyable généralisation du théorème de Tsen [GHS]. Il dit que sous les hypothèses du théorème 3.6, alors $\mathfrak{Y}(X) \neq \emptyset$. En d'autres mots, on peut retirer cette hypothèse du théorème 3.6. Hasset et Tschinkel en 2007 ont montré le résulat plus fort suivant.

3.7 Théorème. – *(Hasset et Tschinkel, 2007). Soit Y/K une variété rationnellement connexe et $f : \mathfrak{Y} \to X$ un modèle régulier, plat sur X. Soit Σ un sous-ensemble fini (non vide) du lieu lisse de f. Alors pour tout entier $n \geq 1$, l'application*

$$\mathfrak{Y}(X) \to \prod_{x \in \Sigma} \mathfrak{Y}(O_{X,x}/M^n_{X,x})$$

est surjective.

La conjecture est que l'approximation faible vaut pour tout ensemble fini de places de K. Elle est connue dans plusieurs cas particuliers (hypersurfaces lisses de discriminant "liber de patrat", intersections complètes de petits degrés,...), voir [Has1, §3].

4 Méthode de fibration

On a vu que la k–rationalité (ou la rétracte k–rationalité) est la première chose à regarder lorsque l'on a affaire à un problème d'approximation faible. La seconde technique est la méthode dite de fibration.

4.0.1 Proposition. – *Soient K un corps et Σ un ensemble fini (non vide) de places. Soit $f : Z \to Y$ un K-morphisme lisse de K-variétés lisses géométriquement connexes, à fibre générique géométriquement connexe. Si pour tout point $M \in Y(K)$ l'approximation faible (relativement à Σ) vaut pour la K-variété fibre $Z_M = f^{-1}(M)$, et si l'approximation faible vaut pour Y, alors elle vaut pour Z.*

Démonstration: Supposons donné pour chaque $x \in \Sigma$ un point $P_x \in Z(\widehat{K}_x)$. Soit $Q_x = f(P_x)$. Par le théorème des fonctions implicites analytique [Se2, §II.3.9], il existe un voisinage ouvert $\Omega_x \subset Y(\widehat{K}_x)$ contenant Q_x, équipé d'une section analytique $\sigma_v : \Omega_x \to Z(\widehat{K}_x)$ de la projection $Z(\widehat{K}_x) \to Y(\widehat{K}_x)$. L'approximation faible valant pour Y, on peut trouver un point K-rationnel $Q \in Y(K)$ tel que pour chaque $v \in S$ le point Q soit très proche de Q_x dans $Y(\widehat{K}_x)$ et qu'il appartienne à Ω_x. Soit $W = f^{-1}(Q)$ la fibre en Q. Alors $R_x = \sigma_w(Q) \in Z(\widehat{K}_x)$ est très proche de P_x dans $Z(K_x)$. Par hypothèse, l'approximation faible vaut pour la K-variété W. Ainsi il existe un point $P \in W(K) \subset Z(K)$ très proche de R_x dans $W(\widehat{K}_x)$ et donc dans $Z(\widehat{K}_x)$ pour chaque $x \in \Sigma$. Un tel point est très proche de chaque P_x pour tout $x \in \Sigma$. □

4.0.2 Remarque. – On ne peut espérer appliquer cette proposition générale que lorsque l'on a déjà la propriété : toute fibre non vide de f au-dessus d'un point K-rationnel de Y possède un point K-rationnel.

Sur un corps $K = k(X)$ du type considéré au §3.4, d'après Graber, Harris et Starr [GHS], c'est le cas si la fibre générique de f est birationnelle à une variété projective, lisse, géométriquement connexe et rationnellement connexe. Dans ce cas, pour les variétés qui se dévissent en variétés rationnellement connexes pour lesquelles l'approximation faible a déjà été établie, on obtient l'approximation faible. Ceci s'applique notamment aux fibrés en quadriques sur la droite projective (cas qui n'utilise que le théorème de Tsen).

4.1 Théorème. – *Soit Y/K une surface de del Pezzo de degré ≥ 4. Soit Σ un ensemble fini (non vide) de places de K. Alors $Y(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} Y(\widehat{K}_x)$.*

En effet, ce sont des fibrés en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$. Ceci a été aussi démontré par C. Xu pour certaines surfaces de del Pezzo de degré 1 et 2 [X].

5 Variétés de groupes

5.1 Tores algébriques

Le tore déployé $\mathbb{G}_m^r$ est une variété k–rationnelle mais aussi le tore induit $R_{L/k}(\mathbb{G}_m)$ pour toute algèbre étale L/k (i.e. produit fini d'extensions finies séparables de k). Tout facteur direct d'un tore induit est une variété rétracte k-rationnelle. En utilisant la correspondance de catégories entre k-tores algébriques et réseaux galoisiens donnée en associant à un tore T le réseau galoisien $\widehat{T} = \mathrm{Hom}_{k_s-gp}(T_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s})$ des caractères de T, on voit aisèment qu'il existe un morphisme surjectif $f : E \to T$ de tores algébriques où E est un tore algébrique induit et de sorte que le noyau $\ker(f)$ soit un k–tore[1]. Le problème est que la flèche $f_k : E(k) \to T(k)$ n'est pas surjective en général. La suite exacte de k–tores $1 \to \ker(f) \to E \to T \to 1$ donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie galoisienne [Se1, §II]

$$1 \to \ker(f)(k) \to E(k) \to T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, \ker(f)) \to H^1(k, E) \to H^1(k, T) \to \dots$$

Un avatar du théorème 90 de Hilbert est que $H^1(k, E) = 1$. Le but est d'attraper par ce procédé le plus de points possibles de $T(k)$. En un certain sens, il y a une meilleure façon de le faire, c'est quand le tore $S = \ker(f)$ est *flasque*, c'est-à-dire satisfait

$$H^1(F, (\widehat{\ker(f)})^0) = 0$$

[1] On prend le morphisme de norme $N_{K/k} : R_{K/k}(T_K) \to T$ pour une extension galoisienne K/k déployant T

pour tout corps F/k. C'est la théorie des résolutions flasques de tores algébriques de Colliot-Thélène/Sansuc [CTS1] [CTS2, 7.4].

5.1.1 Théorème. – *Soit T/k un tore algébrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) T est rétracte k-rationnel,

(2) Si $1 \to S \to E \to T \to 1$ désigne une résolution flasque de T, le tore flasque S est facteur direct d'un tore quasi–trivial. En outre, $T \times S$ est birationnel à E.

(3) Pour tout anneau de valuation discrète R/k contenant de corps résiduel κ, l'application $T(R) \to T(\kappa)$ est surjective.

(4) Pour tout anneau de valuation discrète A/k de corps de fractions K et de complété $\widehat{K}$, $T(K)$ est dense dans $T(\widehat{K})$.

5.1.2 Remarques. – (a) Si le tore T est déployé par une extension métacyclique, on sait que T est rétracte k-rationnel. Ceci est toujours le cas si k est un corps fini ou le corps des réels. En effet, les $\mathbb{R}$-tores sont rationnels, ce sont des produits de tores $\mathbb{G}_m$, $R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$, $R^1_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$.

(b) L'assertion (3) ressemble au critère de relèvement de Saltman de stable rationalité, à ceci près que l'on ne le demande que pour des anneaux de valuation discrète.

(c) On ignore si les équivalences (1) $\Longleftrightarrow$ (3) et (1) $\Longleftrightarrow$ (4) sont valables dans le cas d'un k–groupe réductif.

5.1.3 Corollaire. – *(1) Soit K un corps de nombres. On se donne un ensemble fini (non vide) Σ de places archimédiennes de K. Si T/K est un tore algébrique, alors $T(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} T(\widehat{K}_x)$.*

(2) Soit $K = k(X)$ un corps de fonctions d'une courbe algébrique projective lisse sur un corps algébriquement clos k de car. nulle. On se donne un ensemble fini (non vide) Σ de points de K. Si T/K est un tore algébrique, alors $T(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} T(\widehat{K}_x)$.

Démonstration: Dans les deux cas, on considère une résolution flasque $1 \to S \to E \xrightarrow{f} T \to 1$ du k–tore T.

(1) Si x est une place archimédienne du corps de nombres K, alors $H^1(\widehat{K}_x, S) = 0$ et $f_{\widehat{K}_x} : E(\widehat{K}_x) \to T(\widehat{K}_x)$ est surjective. Vu que $E(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} E(\widehat{K}_x)_{\rm top}$, $f(E(K))$ (et a fortiori $T(K)$) est dense $\prod_{x\in\Sigma} T(\widehat{K}_x)_{\rm top}$.

(2) Nous allons montrer que $H^1(\widehat{K}_x, T) = 0$ et donc aussi que $H^1(\widehat{K}_x, S) = 0$, ce qui implique que $T(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} T(\widehat{K}_x)_{\mathrm{top}}$ par l'argument précédent.

Vu que $H^1(\widehat{K}_x, E) = 0$, on a en effet une injection $H^1(\widehat{K}_x, T) \hookrightarrow H^2(\widehat{K}_x, S)$. Soit $\gamma \in H^1(\widehat{K}_x, S)$, alors γ est de torsion. On choisit un entier $n \geq 1$ tel que $n\gamma = 0$. La suite exacte de K–modules galoisiens $1 \to {}_nS \to S \stackrel{\times n}{\to} S \to 1$ indique que γ provient de $H^2(\widehat{K}_x, {}_nS)$. Or le groupe de Galois absolu de $\widehat{K}_x \cong k((t))$ est isomorphe au groupe libre à un générateur $\widehat{\mathbb{Z}}$, il est donc de dimension cohomologique 1. Il suit que $H^2(\widehat{K}_x, {}_nS) = 0$ d'où on conclut que $H^2(\widehat{K}_x, S) = 0$ et $H^1(\widehat{K}_x, S) = 0$. $\square$

5.1.4 Remarques. – Une preuve plus élémentaire de (1) se trouve en [G3, §4.4].

5.2 Groupes réductifs

Soit G/k un groupe réductif , c'est-à-dire un k-schéma en groupes lisse affine et connexe dont le radical unipotent géométrique $R_u(G_{\overline{k}})$ est trivial. Un tel k–groupe G admet des k-tores maximaux. Sur $\overline{k}$, tous les k-tores maximaux sont $G(\overline{k})$ sont conjugués si bien que si T est un k–tore maximal de G, alors l'espace homogène $X = G/N_G(T)$ est appelé la variété des tores maximaux de G.

On note $q : G \to X$ le morphisme quotient. Si $x \in X(k)$, alors il existe $g \in G(k_s)$ tel que $x = q(g)$. Alors gTg^{-1} est un k–tore maximal de G. Par cette correspondance, $X(k)$ décrit les k–tores maximaux de G.

D'après Chevalley (voir [V2, §4.1]), X est une variété k-rationnelle. Nous avons seulement besoin d'un résultat plus faible, à savoir la rétracte k–rationalité.

Démonstration de la rétracte k–rationalité de la variété des tores (en car. nulle) : On va voir que la rétracte rationalité de X est une conséquence de la correspondance entre tores maximaux et sous–algèbres de Cartan. Si $y \in \mathfrak{g}$ est un élément régulier, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y)$ est une sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui est l'algèbre de Lie du tore $T_y := Z_G(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y))$ (aussi égal à $Z_G(y)$).

Soit V l'ouvert de $\mathbf{A}(\mathfrak{g})$ consistant en les éléments réguliers. On définit[2] alors un morphisme de k–variétés $f : V \to X$ en appliquant $y \to T_y$. Vu

[2] Une façon de voir que cela définit bien un k–morphisme est de passer par la théorie des schémas en groupes [SGA3, XI].

que tous les k–tores maximaux de G sont construits de cette façon, la flèche $V(k) \to X(k)$ est surjective. En appliquant ceci au corps $k(X)$ et au point générique de X, il résulte que $f : V \to X$ admet une section rationnelle. Il existe donc $U \subset X$ et $r : U \to V$ tel que $f \circ r = id_U$. Ainsi id_U factorise par l'ouvert $V' = f^{-1}(U) \subset V$. On conclut que X est rétracte k–rationnelle. $\square$

La méthode de fibration nous permet de généraliser le corollaire 5.1.3 au cas des groupes réductifs.

5.2.1 Théorème. – *(1) Soit K un corps de nombres. On se donne un ensemble fini Σ de places archimédiennes de K. Si G/K est un groupe algébrique, alors $G(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} G(\widehat{K}_x)$.*

(2) Soit $K = k(X)$ un corps de fonctions d'une courbe algébrique projective lisse sur un corps algébriquement clos k. On se donne un ensemble fini Σ de points de K. Si G/K est un groupe réductif, alors $G(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} T(\widehat{K}_x)$.

Démonstration : On fait les deux cas en même temps. Soit U l'ouvert des éléments semi-simples réguliers de G, à savoir l'ouvert formé des éléments dont le centralisateur est un tore maximal. En associant à chaque élément son centralisateur, on définit un morphisme $f : U \to Y$ où Y désigne la variété des tores maximaux de G. Les fibres de U sont des K-tores maximaux qui satisfont l'approximation faile en vertu du corollaire 5.1.3. Vu que Y est une variété rétracte K-rationnelle, Y satisfait l'approximation faible. La méthode de fibration 4.0.1 s'applique et donne que U satisfait la propriété d'approximation faible. Par invariance birationnelle (lemme 2.7), on conclut que G satisfait l'approximation faible. $\square$

5.2.2 Remarque. – Pour une autre démonstration, voir [CTG, §4].

6 Espaces homogènes

6.1 Définition

Soit G/k un groupe algébrique. Un G–espace homogène X/k est une G–variété à gauche satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(1) $G(\overline{k})$ agit transitivement sur $Y(\overline{k})$;

(2) $Y(\overline{k}) \neq \emptyset$.

Si l'action de $G(\overline{k})$ sur $X(\overline{k})$ est simplement transitive, on dit que Y est un espace principal homogène. On note alors $H^1(k,G)$ l'ensemble des isomorphismes de G-espaces principaux homogènes (ou torseurs). C'est un ensemble pointé par le G–torseur trivial G, qui est caractérisé par le fait d'avoir un k–point rationnel. Si G est lisse (ou si k est parfait), $H^1(k,G)$ est un ensemble de cohomologie galoisienne donné par des cocycles galoisiens.

On considère un un G–espace homogène Y/k muni d'un point $x \in X(k)$. On pose $H = \mathrm{Stab}_G(y)$, c'est le sous-groupe fermé de G fixant x. Alors on a un G–isomorphisme de k–variétés $H\backslash G \cong X$ et une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \to H(k) \to G(k) \to Y(k) \xrightarrow{\varphi} H^1(k,H) \to H^1(k,G)$$

en voyant X comme un G–espace homogène à gauche. L'application φ s'appelle l'application caractéristique et applique $x \in X(k)$ sur la classe d'isomorphie du H–torseur $\varphi^{-1}(x)$. L'application de droite est l'opération changement de groupes, elle applique un G–torseur P sur le produit contracté $P \wedge^H G$ qui est un G–torseur.

On voit donc que dans une situation d'approximation faible pour X, on a affaire aux ensembles de 1–cohomologie.

6.2 Corps de fonctions, cas connexe à stabilisateur connexe

On rappelle le théorème de Steinberg.

6.2.1 Théorème. – *Soit k un corps de caractéristique nulle, de dimension cohomologique ≤ 1. Soit G un groupe algébrique linéaire.*

(1) G est quasi-déployé, i.e. il admet un k–sous-groupe de Borel ;

(2) $H^1(k,G) = 1$.

C'est la première assertion qui est difficile. La seconde en résulte de la façon suivante. Soit B un sous-groupe de Borel de G. Soit P un G-torseur. On peut considérer le k–groupe tordu par automorphismes intérieurs $G' = P \wedge^G G$. Alors la variété $G'/B = P \wedge^G (G/B)$ est la variété des k–sous–groupes de Borel de G'. Suivant (1), elle admet un k–point, ce qui signifie que le G–torseur P admet une réduction à B. Or $B = U \rtimes T$ où U est le radical unipotent de B et T un k–tore maximal de B. Il est bien connu que l'application $H^1(k,B) \to H^1(k,T)$ est bijective. Or $\mathrm{cd}(k) \leq 1$, donc $H^1(k,T) = 1$. Donc $H^1(k,B) = 1$ et P est le torseur trivial.

6.2.2 Remarque. – Dans le cas des corps de fonctions, (1) est aussi une conséquence du théorème de Grabber-Harris-Starr appliqué à la variété des sous–groupes de Borel de G. En effet, cette variété est géométriquement unirationnelle donc rationnellement connexe.

6.3 Un cas particulier : les espaces classifiants

Soit G/k un groupe algébrique affine. En géométrie algébrique, on ne dispose pas de variété jouant le rôle de l'espace BG en topologie. On dispose seulement d'un champ algébrique et des approximations $Y = \mathrm{GL}(V)/G$ associés à des représentations linéaires V de G telles que l'action de G est libre sur $V \setminus Z$ avec $\mathrm{codim}_X(Z) >> 0$, voir [To].

Suivant le théorème 90 de Hilbert, on a $H^1(k, \mathrm{GL}(V)) = 1$ si bien que l'application caractéristique produit une bijection

$$\mathrm{GL}(V)(k) \setminus Y(k) \xrightarrow{\sim} H^1(k, G).$$

6.3.1 Définition. – *Soient Z/K une variété définie sur un corps de nombres K. On dit que Z/K satisfait l'approximation* **très faible**[3] *s'il existe un ensemble fini de places Σ_0 tel que pour tout ensemble fini de places Σ de Σ_0 alors $Z(K)$ est dense dans $\prod_{x \in \Sigma} Z(\widehat{K}_x)$.*

Les tores algébriques et les groupes algébriques linéaires ont la propriété d'approximation très faible [Sa, §3]. Mentionnons la conjecture.

6.3.2 Conjectures. – *(Colliot-Thélène) Supposons Z/K unirationnelle. Alors Z satisfait à l'approximation très faible.*

Cette conjecture entrîne la résolution du problème de Galois inverse, voir [Se3, th. 3.5.9].

6.3.3 Remarque. – D'une certaine façon, le théorème de Hasset-Tschinkel 3.7 est un résultat d'approximation très faible.

6.4 Corps de fonctions, le cas à stabilisateur fini

Pour les corps de fonctions, les choses sont bien plus faciles du fait que l'on connait la structure du groupe de Galois absolu.

[3] "weak weak approximation" en anglais.

6.4.1 Proposition. – *On suppose que $K = k(X)$ avec k algébriquement clos de caractéristique nulle et X courbe algébrique. Soit G/K un groupe algébrique linéaire connexe et H/K un sous-groupe étale fini. On pose $Y = G/H$. Pour tout ensemble fini (non vide) de places Σ de K, alors*

(1) L'application

$$H^1(K, G) \to \prod_{x \in \Sigma} H^1(\widehat{K}_x, H)$$

est surjective ;

(2) $Y(K)$ est dense dans $\prod_{x \in \Sigma} Y(\widehat{K}_x)$.

Démonstration : (a) Bien que cela ne soit pas strictement nécessaire, il est néanmoins commode de se ramener au cas de la droite projective par la technique de restriction des scalaires à la Weil. Le corps $K = k(X)$ est une extension finie de $k(t)$ qui se prolonge en un morphisme $q : X \to \mathbf{P}^1_k$. On note $H'/k(t) = R_{K/k(t)}(H)$ la restriction des scalaires à la Weil de G. Alors on a la bijection de Shapiro $H^1(k(t), H') \xrightarrow{\sim} H^1(K, H)$ [Se1, I.5.8]. Par ailleurs, pour tout k–point P de $\mathbf{P}^1_k$, on a $\widehat{k(t)}_P \otimes_{k(t)} K = \prod_{q(x)=P} \widehat{K}_x$ de sorte que

$$H^1(\widehat{k(t)}_P, H') \xrightarrow{\sim} \prod_{q(x)=P} H^1(\widehat{K}_x, H).$$

Quitte à remplacer Σ par sa projection sur $\mathbf{P}^1_k$, ces deux types d'isomorphismes permettent de supposer que $X = \mathbf{P}^1_k$.

Sans perte de généralité, on peut aussi supposer que $\infty \notin \Sigma$. Le K–groupe H étant fini, le groupe $H(K_s)$ n'est pas autre chose qu' un groupe fini abstrait muni d'une action continue (i.e. factorisant par un quotient $\mathrm{Gal}(L/K)$ pour L/K galoisienne finie) du groupe profini $\mathrm{Gal}(K_s/K)$. On utilise la description de cocycles[4] de l'ensemble

$$H^1(K, G) = Z^1\big(\mathrm{Gal}(K_s/K), H(K_s)\big)/H(K_s) = \quad \text{1-cocycles} / \sim .$$

Un 1-cocycle est une applications continue $z : \mathrm{Gal}(K_s/K) \to H(K_s)$ satisfaisant $z_{\sigma\tau} = z_\sigma\, \sigma(z_\tau)$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$; l'action de $g \in H(K_s)$ est donnée par $(h\,.\,z)_\sigma = h^{-1} z_\sigma\, \sigma(h)$.

[4] La fonctorialité par changement de corps $K \to K'$ est donnné alors par un choix de plongement $K_s \to (K')_s$.

On rappelle maintenant la structure de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$. Pour chaque point x de $\mathbf{A}_k$, on a $\widehat{K}_x \cong k((t-x))$ dont une clôture algébrique est $(\widehat{K}_x)_s \cong \varinjlim_n k((\sqrt[n]{t-x}))$. Le choix d'un plongement $K_s \to (\widehat{K}_x)_s$ définit un morphisme injectif $\phi_x : \widehat{\mathbb{Z}} = \mathrm{Gal}\big((\widehat{K}_x)_s/\widehat{K}_x\big) \to \mathrm{Gal}(K_s/K)$. On sait alors que le groupe de Galois absolu de K est le produit libre des groupes $\phi_x(\widehat{\mathbb{Z}})$ pour x parcourant k (Douady, voir [Sz, 3.4.8]).

On se donne pour chaque $x \in \Sigma$ un 1–cocycle $z_x : \mathrm{Gal}\big((\widehat{K}_x)_s/\widehat{K}_x\big) \to H(K_s) = H((\widehat{K}_x)_s)$. Alors ils se recollent de façon évidente en un 1–cocycle $z : \mathrm{Gal}(K_s/K) \to H(K_s)$, i.e z_x est le composé $\mathrm{Gal}\big((\widehat{K}_x)_s/\widehat{K}_x)\big) \to \mathrm{Gal}(K_s/K) \xrightarrow{z} H(K_s)$.

(b) On considère le diagramme commutatif d'applications caractéristiques

$$\begin{array}{ccccc} Y(K) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(K,H) & \longrightarrow & H^1(K,G)=1, \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod\limits_{x\in\Sigma} Y(\widehat{K}_x) & \xrightarrow{\prod \varphi_x} & \prod\limits_{x\in\Sigma} H^1(\widehat{K}_x,H) & & \end{array}$$

où l'on utilise à droite le théorème d'annulation de Steinberg. Soit $(y_x)_{x\in\Sigma} \in \prod\limits_{x\in\Sigma} Y(\widehat{K}_x)$. Suivant le (a), la verticale de droite est surjective. Il existe donc $y \in Y(K)$ satisfaisant

$$\varphi(y)_{\widehat{K}_x} = \varphi_x(y_x)$$

pour chaque $x \in \Sigma$. Ainsi il existe $g_x \in G(\widehat{K}_x)$ satisfaisant $y_x = g_x.y$ pour chaque $x \in \Sigma$. Mais $G(K)$ est dense dans $\prod\limits_{x\in\Sigma} G(\widehat{K}_x)$. On conclut que $(y_x)_{x\in\Sigma}$ appartient à l'adhérence de $Y(K)$. $\square$

Dans le même registre, on a la variante suivante d'un théorème de Borel-Serre [BS].

6.4.2 Proposition. – *Soit H/K un schéma en groupes fini. Alors pour tout ensemble fini $\Sigma \subset X(k)$, l'application de localisation $H^1(K,H) \to \prod_{x\in X(k)\smallsetminus\Sigma} H^1(\widehat{K}_x,H)$ est propre, c'est-à-dire a des fibres finies.*

Démonstration: La même technique de restriction des scalaires que pour la proposition 6.4.1 permet de se ramener au cas $X = \mathbf{P}^1_K$ pour lequel on va montrer que l'application $loc : H^1(K,H) \to \prod_{x\in k\smallsetminus\Sigma} H^1(\widehat{K}_x,H)$ est propre.

Par l'argument de torsion habituel [Se1, §I.5.3], il suffit de montrer que le noyau de *loc* est fini.

On garde les notations de la preuve de la proposition précédente. L'action de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ sur $G(K_s)$ est triviale en dehors d'un ensemble fini de points Σ_0 dont on peut supposer qu'il contient Σ. Sans perte de généralité, il est loisible de supposer que $\infty \notin \Sigma_0$. Nous affirmons que

$$1 \to H^1\big(\star_{x\in\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big) \to H^1(K,H) \to \prod_{x\in k\setminus\Sigma_0} H^1(\widehat{K}_x, H)$$

est une suite exacte d'ensembles pointés. Vu que $H^1(\star_{x\in\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s))$ est fini, cette affirmation entraîne alors la conclusion souhaitée. Ci-dessus, la trivialité du noyau de

$$H^1\big(\star_{x\in\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big) \to H^1\big(\star_{x\in\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big) \xrightarrow{\sim} H^1(K,H)$$

suit du fait que le noyau de $\star_{x\in k}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \star_{x\in k}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}})$ agit trivialement sur $H(K_s)$ [Se1, I.5.8.a]. Il est aussi clair que le composé $H^1\big(\star_{x\in\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big) \to H^1(K,H) \to \prod_{x\in k\setminus\Sigma_0} H^1(\widehat{K}_x, H)$ est l'application triviale. En d'autres mots, il reste à vérifier l'exactitude au milieu.

On se donne donc une classe $[z]$ du noyau de $H^1\big(\star_{x\in k}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big) \to H^1\big(\star_{x\in k\setminus\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big)$. On note Σ le support de $[z]$, i.e. le plus petit sous-ensemble de k tel que le 1-cocycle $z : \star_{x\in k}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}) \to H(K_s)$ factorise par le quotient $\star_{x\in\Sigma}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}) \to H(K_s)$. Si $\Sigma \not\subset \Sigma_0$, il existe alors $x \in \Sigma \setminus \Sigma_0$, il existe alors $h \in H(K_s)$ satisfaisant $z_\sigma = h^{-1}\,\sigma(h)$ pour tout $\sigma \in j_x(\widehat{\mathbb{Z}})$. Mais $j_x(\widehat{\mathbb{Z}})$ agit trivialement sur $H(K_s)$, donc $z_{|j_x(\widehat{\mathbb{Z}})} = 1$. Ceci montre que $\Sigma \subset \Sigma_0$ et donc que z provient de $H^1\big(\star_{x\in\Sigma_0}\, j_x(\widehat{\mathbb{Z}}), H(K_s)\big)$. □

6.5 Corps de fonctions, cas général

Regrouper les deux cas extrêmes précédent demande un dévissage utilisant la théorie de Springer-Grothendieck du H^2 non abélien [Sp1]. Nous renvoyons à [CTG, th. 4.3] pour la démonstration.

6.5.1 Théorème. – *On suppose que $K = k(X)$ avec k algébriquement clos de caratéristique nulle. Soit G/K un groupe algébrique affine connexe et Y un G–espace homogène. Pour tout ensemble fini (non vide) de places Σ de K, alors $Y(K)$ est dense dans $\prod_{x\in\Sigma} Y(\widehat{K}_x)$.*

7 Descente et revêtements galoisiens

Nous allons continuer sur le thème précédent en illustrant la technique de la descente par des torseurs pour étudier l'approximation faible [CTS3] [HS1] [HS2].

7.1 L'application caractéristique

Soit G un groupe fini et $f : Z/k \to Y/k$ un G–revêtement galoisien. De façon équivalente, on se donne une action libre (à droite) de G sur la variété Z et $Y = Z/G$ est le quotient de Z pour cette action. On dispose de l'application caractéristique

$$\varphi_k : Y(k) \to H^1(k, G);$$

elle applique un point $y \in Y(k)$ sur le G–torseur $P_y = f^{-1}(y)$. On sait que $P_y(k) \neq \emptyset$ si et seulement si $[P_y] = 1 \in H^1(k, G)$. Par suite, $\varphi_k^{-1}(1) = f_k(Z(k))$. En d'autres mots, l'application caractérsitique détecte si le point y provient de $Z(k)$.

7.2 Corps de fonctions, le cas projectif

On travaille maintenant sur le corps $K = k(X)$ (k-alg. clos, X courbe) muni d'un ensemble fini (non vide) de valuations Σ. Soit $Z \to Y$ un G-revêtement où Z, Y sont des variétés projectives lisses. On considère le diagramme commutatif d'applications caractéristiques

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} Z(K) & \longrightarrow & Y(K) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(K, G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x \in \Sigma} Z(\widehat{K}_x) & \longrightarrow & \prod_{x \in \Sigma} Y(\widehat{K}_x) & \xrightarrow{\prod \varphi_x} & \prod_{x \in \Sigma} H^1(\widehat{K}_x, G). \end{array}$$

L'ensemble $H^1(\widehat{K}_x, G)$ est fini et on note que φ_x est une application continue, c'est-à-dire que ses fibres sont ouvertes. On va voir ici comment une hypothèse de "bonne réduction" permet de contrôler l'image de φ_x.

7.2.1 Proposition. – *(1) Soit $x \in \Sigma$. On suppose que le G–revêtement galoisien $Z \times_K \widehat{K}_x \to Y \times_K \widehat{K}_x$ se prolonge en un G–revêtement galoisien*

$\mathfrak{Z}/\widehat{O}_x \to \mathfrak{Y}/\widehat{O}_x$ où $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sont des $\widehat{O}_x$-schémas projectifs. Alors $\varphi_x : Y(\widehat{K}_x) \to H^1(\widehat{K}_x, G)$ est l'application triviale.
(2) L'image de $\varphi_k : Y(K) \to H^1(K, G)$ est finie.

Démonstration : (1) D'après le critère valuatif de propreté, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z(\widehat{K}_x) & \xrightarrow{f} & Y(\widehat{K}_x) \\ \| & & \| \\ \mathfrak{Z}(\widehat{O}_x) & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y}(\widehat{O}_x). \end{array}$$

Soit $y \in \mathfrak{Y}(\widehat{O}_x)$ Comme $\widehat{O}_x$ est un anneau strictement hensélien, on a donc $\mathfrak{Z}_y \cong \mathrm{Spec}(\widehat{O}_x) \times_k G$, donc y appartient à $f\big(\mathfrak{Z}(\widehat{O}_x)\big)$. Le diagramme montre la surjectivité de l'application $Z(\widehat{K}_x) \to Y(\widehat{K}_x)$. Il résulte que l'application caractéristique $\varphi_x : Y(\widehat{K}_x) \to H^1(\widehat{K}_x, G)$ est l'application triviale.
(2) L'assertion (1) est donc vraie pour presque tout $x \in X(k)$, c'est-à-dire en dehors d'un ensemble fini Σ. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y(K) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(K, G) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle loc} \\ \prod_{x \in X(k) \setminus \Sigma} Y(\widehat{K}_x) & \xrightarrow{\prod \varphi_x} & \prod_{x \in X(k) \setminus \Sigma} H^1(\widehat{K}_x, G). \end{array}$$

D'après (1), la flèche horizontale inférieure est triviale. Par ailleurs, la proposition 6.4.2 indique que le noyau de *loc* est fini. On en déduit que l'image de l'application caractéristique φ est finie. □

7.2.2 Remarque. – a) Le schéma $\mathfrak{Y}$ n'est pas supposé nécessairement lisse sur $\widehat{O}_x$.
b) L'assertion (2) est bien sur un cas particulier d'un résultat plus général, voir [HS1, prop. 4.4]. Le cas le plus connu est celui de la multiplication $n : A \to A$ par un entier n pour une variété abélienne qui apparaît dans la preuve du théorème de Mordell-Weil.

7.3 Un contre-exemple à l'approximation faible : une surface d'Enriques

Les surfaces d'Enriques complexes sont d'une certaine façon les surfaces les plus proches des surfaces rationnelles, elles satisfont en effet $H^1(S, O_S) =$

0, $H^2(S, O_S) = 0$.

Une surface d'Enriques complexe est le quotient d'une surface K3 par une involution sans point fixe. On s'intéresse ici au cas d'une surface d'Enriquez de type Kummer, c'est-à-dire que la surface K3 qui la domine est de type Kummer : c'est la désingularisation du quotient d'un produit de deux courbes elliptiques non isogènes par la relation antipodale.

On prend $K = k(t)$ avec k algébriquement clos de caractéristique nulle. On se propose de donner un exemple de surface d'Enriques Y/K telle que $Y(K) \neq \emptyset$ et ne satisfaisant pas l'approximation faible. Cet exemple est plus simple que l'exemple original [CTG, th. 5.5] et est inspiré directement de l'article de Harari-Skorobogatov [HS2].

On considère les K–courbes elliptiques E_1, E_2 qui sont les compactifications lisses des courbes affines suivantes :

$$(C_1) : y_1^2 = (x_1^2 + 1)(x_1^2 + 4) \neq 0, \qquad (C_2) : y_2^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + t) \neq 0.$$

La formule du j–invariant pour une courbe d'équation $y^2 = (x^2-1)(x^2-b)$ est $j = 2^8 \frac{(b^4-b^2+1)^3}{b^4(b^2-1)^2}$. Ainsi $j(E_1) \neq j(E_2)$ et E_1 et E_2 ne sont pas géométriquement isogènes. Par ailleurs E_2 (et E_1 !) admet un modèle lisse sur $\mathbf{P}^1_k \setminus \{0, \infty\}$.

Pour $i = 1, 2$, la courbe $C_i \subset E_i$ est préservée par l'involution antipodale (donnée par $(x_i, y_i) \mapsto (x_i, -y_i)$). On note Z/K la désingularisation minimale du quotient $(E_1 \times_K E_2)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par l'action antipodale. C'est une surface $K3$ qui contient la surface affine d'équation

$$(U) \qquad y^2 = (x_1^2 + 1)(x_1^2 + 4)(x_2^2 + 1)(x_2^2 + t) \neq 0$$

avec $y = y_1 y_2$.

On note $P_1 = (1, 0) - (-1, 0) \in E_1(K)$ (resp. $P_2 = (1, 0) - (-1, 0) \in E_2(K)$), c'est un point d'ordre 2 et la translation par P_i préserve C_i. En coordonnées cette translation est donnée par $(x_i, y_i) \mapsto (-x_i, -y_i)$. On note σ la translation par (P_1, P_2) dans $E_1 \times_K E_2$, c'est une involution de $E_1 \times_K E_2$, elle commute avec l'involution antipodale. De plus, l'involution τ de $(E_1 \times_K E_2)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'étend en une involution de Z qui n'a pas de point fixe [HS2, lemme 2.1]. Alors la variété quotient $Y/K = Z/\sigma$ est une surface d'Enriques. On note $p : Z \to Y$ le morphisme quotient.

7.3.1 Théorème. – *L'ensemble $Y(K)$ n'est pas dense dans $Y\big(k((t))\big) \times Y\big(k((\frac{1}{t}))\big)$.*

Démonstration : On va montrer que l'application caractéristique

$$\varphi_0 : Y(\widehat{K}_0) \to H^1(\widehat{K}_0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est surjective. On considère le point $Q = (0, 0, 2\sqrt{t})$ de $U\big(k((t))(\sqrt{t})\big) \subset Z\big(k((t)))(\sqrt{t})\big)$. Alors $\sigma(Q) = (0, 0, -2\sqrt{t})$ est conjugué à Q par Galois. Il suit que $p(Q) \in Y\big(k((t)))(\sqrt{t})\big)$ appartient à $Y\big(k((t))\big)$. Comme $p(Q)$ ne provient pas de $Z\big(k((t))\big)$, on a $\varphi_0(p(Q)) \neq 0$. Ceci montre la surjectivité de φ_0 et de même on montre que φ_1 est surjective.

On raisonne maintenant par l'absurde en supposant que $Y(K)$ est dense dans $Y\big(k((t))\big) \times Y\big(k((\frac{1}{t}))\big)$. Alors le diagramme **(*)** ci-dessus indique que le composé

$$Y(K) \xrightarrow{\varphi} H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = K^\times/(K^\times)^2 \to H^1(\widehat{K}_0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\widehat{K}_0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est surjectif. Soit alors $y \in Y(K)$ d'image $(1, 0)$. Alors $\varphi(y)$ est donné par la classe $K^\times/(K^\times)^2$ d'un polynôme $f(t) \in K$ sans facteur carré. La proposition 7.2.1.a indique que $\varphi_x = 0$ pour tout point $x \neq 0, \infty$. Ainsi $f(t) = 1$ ou t mais doit d'être d'ordre 1 en 0 et d'ordre pair à l'infini. Contradiction. $\square$

8 Un exemple en caractéristique positive

On fixe un nombre premier $p > 0$ et on s'intéresse aux extensions finies de $\mathbb{F}_p(t)$. Ce sont les corps globaux de caractéristique p et le corps de fonctions $\overline{\mathbb{F}}_p(t)$ apparaît comme une limite de tels corps. Ainsi le point de vue des corps de fonctions est plus proche dans ce cas du point de vue arithmétique. Sur le corps $K = \mathbb{F}_p(t)$, on considère le sous K-groupe U de $\mathbb{G}_{a,K}^2$ défini par les équations

$$u + tu^p + v^p \;=\; 0. \qquad (1)$$

Le critère jacobien indique que c'est un K–groupe lisse. Une seconde façon de le voir est détendre les scalaires à $K' = K(\sqrt[p]{t})$. En effet $U_{K'}$ est donné par l'équation $u + (\sqrt[p]{t}\,u + v)^p = 0$ qui s'écrit $u + w^p = 0$ avec le changement de coordonnées $w = \sqrt[p]{t}u + v$. Le groupe $U_{K'}$ est donc isomorphe au K–groupe additif $\mathbb{G}_{a,K'}$. Il est donc lisse et géométriquement connexe.

8.0.2 Proposition. – *(Tits [T, §2]) On suppose $p > 2$. Alors*

$$\{0\} = U\big(K\big) = U\big(\overline{\mathbb{F}}_p(t)\big).$$

L'énoncé est faux pour $p = 2$ puisque U est alors une conique affine ayant un point rationnel.

Démonstration: Il suffit de le faire pour $U\big(\overline{\mathbb{F}}_p(t)\big)$. Soient donc $(u,v) \in \big(\overline{\mathbb{F}}_p(t)\big)^2$ satisfaisant $u + tu^p + v^p = 0$. On dérive par rapport à t, cela donne

$$u' + u^p \;\; = \;\; 0. \tag{2}$$

Si $u = 0$ alors $(u,v) = (0,0)$. Si $u \neq 0$, on écrit $u = \frac{P}{Q}$ où P, Q sont des polynômes premiers entre eux. L'équation ci-dessus donne

$$P'Q - PQ' + P^p Q^{2-p} = 0.$$

Vu que $2 - p < 0$ par hypothèse, il suit que Q est un polynôme constant et u est un polynôme. L'équation (2) donne alors en regardant les degrés que $u = 0$ et donc que $v = 0$. □

8.0.3 Remarques. – (a) Sur $K = \mathbb{F}_p(t)$, le fait que le groupe $U(K)$ soit fini est un cas particulier d'un théorème général d'Oesterlé sur les groupes des points des groupes algébriques unipotents totalement ployés de dimension $\leq p - 2$ [O, th. 3.1].

(b) Ceci montre en particulier que le groupe U n'est pas une variété K–unirationelle.

En revanche, le groupe $U\big(\mathbb{F}_p((t))\big)$ est infini (et non dénombrable) puisque c'est le groupe des points d'une variété analytique lisse non vide sur $\mathbb{F}_p((t))$. Ceci produit un exemple extrème où l'approximation faible ne vaut pas, aussi bien dans le cas d'un corps global que dans le cas géométrique.

En conclusion, l'approximation faible pour des groupes algébriques "généraux" (et a fortiori les espaces homogènes) en caractéristique positive ne semble pas intéressante. D'autres invariants arithmétiques sont bien plus adaptés, voir les travaux de J. Oesterlé pour les groupes unipotents [O] et ceux récents de B. Conrad [Co32].

Références

[BCTSS] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, P. Swinnerton-Dyer, *Variétés rationnelles non stablement rationnelles*, Annals of Math. **121** (1985), 283-318.

[BS] A. Borel et J.-P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comment. Math. Helv. 39 (1964), 111-164.

[Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups*, second edition, Springer.

[Bov1] M. Borovoi, *On weak approximation in homogeneous spaces of algebraic groups*, Soviet Math. Doklady **42** (1991), 247-251.

[Bov2] M. Borovoi, *The defect of weak approximation for homogeneous spaces, II*, Dal'nevost. Mat. Zh. **9** (2009), 15-23.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21** (1990), Springer.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 5 à 7*, Springer.

[BTG] N. Bourbaki, *Topologie générale, chapitres 1 à 4*, Hermann, 1971.

[BT1] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **27** (1965), 55–150.

[Ca] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. Ecole normale supérieure **25** (1992), 539-545.

[CP] V. Chernousov et V. P. Platonov, *The rationality problem for semisimple group varieties*, J. reine angew. math. **504** (1998), 1–28.

[C1] C. Chevalley, *On algebraic group varieties*, J. Math. Soc. Japan **6** (1954), 303-324.

[C2] C. Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tôhoku Math. J. **7** (1955), 14–66.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes réductifs connexes*, J. reine angew. math. **618** (2008), 77–133.

[CTG] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille, *Remarques sur l'approximation faible sur les corps de fonctions* , Arithmetic of higher dimensional varieties, Progress in Math. **226** (2004), 121-134, Springer.

[CTSS] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, P. Swinnerton-Dyer, *Double fibres and double covers : Paucity of rational points*, Acta Arith. **79** (1997), 113-135.

[CTGP] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, *Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields*, Duke Math. J. **121** (2004), 285–341.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 175–229.

[CTS2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205.

[CTS3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375–392.

[CTS4] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, in Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186.

[Co32] B. Conrad, *Finiteness theorems for algebraic groups over function fields*, Compositio Mathematica **148** (2012), 555-639.

[CGP] B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad, *Pseudo-reductive groups*, Cambridge University Press (2010).

[DG] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson (1970).

[EGA2] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique II*, Pub. Math. IHES **8** (1961).

[EGA4] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV.2, IV.3, et IV.4*, Pub. Math. IHES **24**, **28** (1965) et **32** (1967).

[Ga] O. Gabber, *On pseudo-reductive groups and compactification theorems*, à paraître à Oberwolfach Reports.

[G1] P. Gille, La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **86** (1997), 199–235.

[G2] P. Gille, *Le problème de Kneser-Tits*, Séminaire Bourbaki **383**, Astérisque **326** (2009), 39-81.

[G3] P. Gille, *Questions de rationalité sur les groupes algébriques linéaires*, Notes de cours de master (2008), URL de l'auteur.

[GiS] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101** (2006), Cambridge University Press.

[GMB] P. Gille et L. Moret-Bailly, *Fibrés principaux sur un corps valué*, en préparation.

[GHS] T. Graber, J. Harris, J.M. Starr, *Family of rationnally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 57-67.

[GPR] B. Green, F. Pop, P. Roquette, *On Rumely's local-global principle*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **97** (1995), 43–74.

[Gre] M.J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings.* Pub. Math. I.H.E.S. **31** (1966), 59–64.

[Gro] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébriques IV : les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki **6** (1960-1961), Exposé No. 221, 28 p.

[Has1] B. Hasset, *Weak approximation and rationally connected varieties over function fields of curves*, dans Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques, Panoramas et Synthèses **31** (2010), 115-153, Société Mathématique de France.

[HT] B. Hasset, Y. Tschinkel, *Weak approximation over function fields*, Invent. math. **163** (2006), 171-190.

[Ha] D. Harari, *Weak approximation of algebraic varieties*, Arithmetic of higher dimensional varieties, édité par B. Poonen et Y. Tschinkel, Progress in Mathematics **226** (2004), 43-60.

[HS1] D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Math. **130** (2002), 241–273.

[HS2] D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surface*, Inter. Math. R. Notice **52** (2005), 3203–3228.

[KMM] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, *Rationally connected varieties*, J. Alg. Geometry **1** (1992), 429-448.

[Kn] M. Kneser, *Schwache Approximation in algebraischen Gruppen*, dans Coll. Théorie des groupes algébriques (Bruxelles, 1962), Librairie universitaire, Louvain, 1962, 41-52.

[KS] K. Kato et S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. **118** (1983), 241–275.

[Ku] F.-V. Kuhlmann, *Valuation Theory*, livre en préparation, page personnelle de l'auteur.

[MB1] L. Moret-Bailly, *Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos*, à paraître dans Mathematica Scandinavica.

[MB2] L. Moret-Bailly, *An extension of Greenberg's theorem to general valuation rings*, Manusc. Math. **139** (2012) n^{o} 1, 153–166.

[O] J. Oesterlé, *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique* $p > 0$, Inv. Math. **78** (1984), 13–88.

[Mn] Y. I. Manin, *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, seconde édition, North–Holland (1986).

[N] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 13 (1962).

[Pl] V. P. Platonov, *On the Tannaka-Artin problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. Math **221** (1975) ;

[PR] V. P. Platonov et A.A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics 139 (1994), Academic Press.

[Sa] D. J. Saltman, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984), 165–215.

[Sr] J.S. Starr, *Arithmetic ver function fields*, dans Arithmetoc Geometry, Clay Math. Proc. **8** (2009), 375-418.

[SGA1] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., Revêtements étales et groupe fondamental, dirigé par A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 224. Springer (1971).

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, Schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Documents mathématiques vol. 7, Société mathématique de France.

[Se1] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, cinquième édition révisée et complétée, Lecture Notes in Math. **5**, Springer-Verlag.

[Se2] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, deuxième édition, Lecture notes in Math. **1500** (1992), Springer.

[Se3] J.-P. Serre, *Topics in Galois theory*, Research notes in Math. (1992), Jones et Barlett publishers.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144** (2001).

[Sp1] T.-A. Springer, *Non-abelian H^2 in Galois cohomology*, dans Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proceedings of Symposia in pure mathematics **9** (1967), 164-182, AMS.

[Sp2] T.-A. Springer, *Linear algebraic groups*, second edition (1998), Birkhaüser.

[St] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson, Yale University (1968), New Haven.

[Sz] T. Szamuely, *Galois groups and fondamental groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **117** (2009), Cambridge University Press.

[T] J. Tits, *Résumé de cours 1991/92*, Annuaire du Collège de France.

[To] B. Totaro, *The Chow ring of a classifying space*, dans Algebraic K-theory, Proceedings of Symposia in pure mathematics **67** (1997), 467-493, AMS.

[V1] V. E. Voskresenskiĭ, *The reduced Whitehead group of a simple algebra*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), 247–248.

[V2] V. E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Translations of Mathematical Monographs **179** (1998), American Mathematical Society.

[X] C. Xu, *Weak approximation for low degree del Pezzo surfaces*, prépublication, Arxiv (2009).

[Wa] A. R. Wadsworth, *Valuation theory on finite dimensional division algebras*, Valuation theory and its applications, Vol. I (Saskatoon, SK, 1999), 385–449, Fields Inst. Commun. **32** (2002), Amer. Math. Soc.

[Wg] S. Wang, *On the commutator group of a simple algebra*, Amer. J. Math. **72** (1950), 323–334.

[W] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society (1962).