ERRATA ET COMPLÉMENTS

P. GILLE

La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, Publications Mathématiques de l'IHES 86 (1997), 199-235.

Nous corrigeons une erreur signalée par Jean-Louis Colliot-Thélène dans la démonstration du lemme III.2.8.b).

• Lemme III.2.8.a). Légèrement plus généralement, nous avons en fait.

a) Soit μ le groupe fondamental du groupe adjoint G_{ad} de G et notons $N = \widehat{\mu}(k)$. Alors toute extension de corps k'/k de degré multiple de N quasi-déploie le groupe G.

Notons au passage que la démonstration se simplifie radicalement en utilisant l'isomorphisme $H^2_{fppf}(k,\mu) \xrightarrow{\sim} H^0(k,\widehat{\mu})^D$ pour le k–groupe fini de type multiplicatif μ. Celui-ci est établi dans [Se1, §5.8] dans le cas où l'exposant de μ est premier à la caractéristique (i.e. μ est lisse); nous n'avons pas trouvé de référence pour le cas général.

• *Démonstration du lemme III.2.8.b).* .... Soit k_1/k une extension non ramifiée de degré N . D'après le a), on a $X(k_1) \neq \emptyset$, donc $O_L^\times \subset N_{k_1\otimes_k L/L}\bigl((k_1 \otimes_k L)^\times\bigr) \subset N_X(k,E)$. Par ailleurs, il existe une extension finie de corps L_2 de L de degré n totalement ramifiée. D'après le a), on a $X(L_2) \neq \emptyset$ donc $N_{L_2\otimes_k L/L}\bigl((L_2 \otimes_k L)^\times\bigr) \subset N_X(k,E)$. Or $L_2 \otimes_k L$ contient un facteur L_2 donc $(L_2 \otimes_k L)^\times \to L^\times \xrightarrow{w} \mathbb{Z}$ est surjective. Ceci permet de conclure que $N_X(k,E) = L^\times$ comme désiré.

****

Spécialisation de la R-équivalence pour les groupes réductifs, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (2004), 4465-4474.

• Théorème 2.1. It holds in arbitrary characteristic. As explained in §3.3., the assump- tion of characteristic $\neq 2$ occurs only for the construction of de Concini and Procesi wonderful compactification of and adjoint semisimple A–group scheme.

This is folklore and can ne obtained by a refinement of [CP, th. 3.13]. By descent, the relevant case is that of Chevalley groups over $\mathbb{Z}$ which is used for example [STBT]. Note that in the field case, there is a construction of the wonderful compactification in [§6.1, BK].

Date: January 20, 2026.

• Proof of Proposition 1.1, $(i) \Longrightarrow (ii)$. One other way it to appeal to the proof Lemma 3.2 of [F]. Then the boudary ∂X is included in a reunion of finite irreducible subvarieties $W_1, \dots, W_c$ of X and the quoted fact provides an integral curve $C \subset X$ containing x as a regular point such that $C \not\subset \partial X$.

• Another reference for Théorème 1.2, $(ii) \Longrightarrow (iii)$, is [G, proposition 6.(2)].

[BK] M. Brion, S. Kumar, *Frobenius Splitting Methods in Geometry and Representation Theory*, Progress in Mathematics 231, Birkhäuser.

[CP] C. de Concini, T. A. Springer, *Compactification of symmetric varieties, dedicated to the memory of Claude Chevalley*, Transform. Groups 4 (1999), 273-300.

[F] E. Frossard, *Groupe de Chow des fibrations en variétés de Severi–Brauer*, Compositio Math. 110 (1998), 187–213.

[Guo] N. Guo, *The Grothendieck–Serre conjecture over semilocal Dedekind rings*, Transformation Groups 27 (2022), 897–917.

[STBT] J. Shalika, R. Takloo-Bighash, Y. Tschinkel, *Rational points on compactifications of semi-simple groups*, J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), 1135-1186

****

with A. Pianzola, Isotriviality and étale cohomology of Laurent polynomial rings, Journal of Pure and Applied Algebra 212 (2008), 780-800.

Cartesian is not right in the statements of Lemma A.5 and of Proposition A.6. What we prove (and use in the paper) is the following.

Lemma A.4 *Let X be scheme and $\mathbf{G}$ an group scheme over X which is affine, flat, and locally of finite presentation. Let $X = U \cup V$ be a cover by Zariski open subsets. We consider the following commutative diagram of pointed sets*

$$\begin{array}{ccc} H^1_{fppf}(X,\mathbf{G}) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(U,\mathbf{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{fppf}(V,\mathbf{G}) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(U\cap V,\mathbf{G}) \end{array}$$

Given $\alpha \in H^1_{fppf}(U,\mathbf{G})$, $\beta \in H^1_{fppf}(V,\mathbf{G})$ such that $\alpha_{|U\cap V} = \beta_{|U\cap V}$ there exists $\gamma \in H^1_{fppf}(X,\mathbf{G})$ such that $\gamma_{|U} = \alpha$ and $\gamma_{|V} = \beta$.

Proposition A.5 *Let A be a discrete valuation ring and K its fraction field. Denote by $\widehat{A}$ and $\widehat{K}$ the completions of A and K respectively. Let $\mathbf{G}$ be a group scheme which is affine, flat and locally of finite presentation over A. We consider the diagram of pointed sets*

$$\begin{array}{ccc} H^1_{fppf}(A,\mathbf{G}) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(\widehat{A},\mathbf{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{fppf}(K,\mathbf{G}) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(\widehat{K},\mathbf{G}). \end{array}$$

Given $\alpha \in H^1_{fppf}(\widehat{A}, \mathbf{G})$, $\beta \in H^1_{fppf}(K, \mathbf{G})$ *such that* $\alpha_{\widehat{K}} = \beta_{\widehat{K}}$ *there exists* $\gamma \in H^1_{fppf}(A, \mathbf{G})$ *such that* $\gamma_{\widehat{A}} = \alpha$ *and* $\gamma_K = \beta$.

****

Le problème de Kneser-Tits, exposé Bourbaki n0 983, Astérisque 326 (2009), 39-81.

• Page 11 (pointed out by A. Sawant). We have only an exact sequence

$$E(k) \to W(k, \widetilde{\mathbf{G}}) \to W(k, \mathbf{G}) \to 1.$$

The exactness on the left does not hold in general. This follows by pushing a counterexample given by A. P. Monastyrnyĭ [57].

• Page 15, proof of Lemma 4.5 (pointed out by A. Zidani).
(i) We put $\mathfrak{M} = Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$, it is a reductive O–group scheme with anisotropic special fiber. There is more work to do to prove that $\mathfrak{M}(O) = \mathfrak{M}(K)$. First we claim that $\mathfrak{M}$ is K-anisotropic and we follow the proof of Lemma 4 of [Guo]. Since its scheme of O-parabolic subgroups $\mathrm{Par}(\mathfrak{M})$ is smooth projective [SGA3, XXVI.3.5], we have

$$\mathrm{Par}(\mathfrak{M})(K) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Par}(\mathfrak{M})(O) \twoheadrightarrow \mathrm{Par}(\mathfrak{M})(k)$$

so that all those sets are singletons. It follows that $\mathfrak{M}_K$ has no proper K-parabolic subgroups. Let $T = \mathrm{rad}(\mathfrak{M})$ be the maximal central O-torus of $\mathfrak{M}$ [SGA3, XXII.4.3.6]. Let k'/k be a finite Galois extension of group Γ which splits T_k. Let O'/O be the associated Galois extension and denote by K' its fraction field. According to [SGA3, X.3.3.(2)], $T_{O'}$ is split. We recall that the category of k–groups of multiplicative type split by k'/k (resp. O-groups of multiplicative type split by O', resp. K-groups of multiplicative type split by K') is anti-equivalent to the category of Γ-mmodules [SGA3, Proposition 1.1]. This provides the isomorphisms

$$\mathrm{Hom}_{K-gp}(\mathbb{G}_{m,K}, T_K) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{O-gp}(\mathbb{G}_{m,O}, T_O) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k-gp}(\mathbb{G}_{m,k}, T_k).$$

Since T_k is anisotropic, the righthanside group is zero, it follows that T_K is anisotropic as well. Since $\mathfrak{M}_K$ has no proper K-parabolic subgroups and no split central K-subtorus, $\mathfrak{M}_K$ is anisotropic[1]. Finally we can quote Proposition 6 of Guo's paper (or alternatively Lemma 5.2.(3) of Zidani's preprint) below to state that $\mathfrak{M}(O) = \mathfrak{M}(K)$.
(ii) The reference [7, Proposition 6.11] is replaced by [7, Corollaire 6.8].

• Page 18, Lemma 5.2, the implication (2) $\Longrightarrow$ (1) is not established and is unknown. The corrected statement is the following.

[1]Use for example Corollaire 7.3.2 of my paper *Sur la classification des schémas en groupes semi-simples*, "Autour des schémas en groupes, III", Panoramas et Synthèses 47 (2015), 39-110.

LEMME 5.2. *On suppose que le corps de base k est infini. Soit $\mathbf{H}$ un k–groupe réductif. On considère les assertions suivantes :*

1. *Le morphisme $\mathbf{H}(A) \to \mathbf{H}(\kappa)$ est surjectif pour toute k-algèbre locale A de corps résiduel κ;*
2. *$\mathbf{H}(K)$ est dense dans $\mathbf{H}(K_v)$ pour tout k–corps valué (K, v);*
3. *$\mathbf{H}$ est une variété rétracte k-rationnelle.*

Alors on a les implications (1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2).

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) et 1) $\Longrightarrow$ 3) : Ce sont des conséquences immédiates de la proposition 5.1.

3) $\Longrightarrow$ 1): La proposition 5.1 produit un ouvert $\mathbf{V}$ de $\mathbf{H}$ ayant la propriété de relèvement. Vu que $\mathbf{V}(k)$ est Zariski-dense dans $\mathbf{H}$, il existe $h_1, ..., h_n \in \mathbf{V}(k)$ tel que $\bigcup h_i \mathbf{V} = \mathbf{H}$. Il est alors immédiat que $\mathbf{H}$ vérifie la propriété de relèvement. $\square$

- Page 16, after 7.5 (pointed out by A. Zidani). The sentence

Un k-tore est R-trivial si et seulement s'il est facteur direct d'un tore quasi-trivial

is wrong. The right statement is the following:

Un k-tore est R-trivial si et seulement s'il existe un k-tore S tel que $T \times S$ est k-rationnel.

Démonstration. Soit $1 \to S \to E \to T \to 1$ une résolution flasque de T. D'après [19, Théorème 2], l'application caractéristique $T(F) \to H^1(F, S)$ induit un isomorphisme $T(F)/R \xrightarrow{\sim} H^1(F, S)$ pour tout corps F/k. Ainsi T est R-trivial si et seulement si $H^1(F, S) = 1$ pour tout k–corps F.

On suppose que T est R-trivial. Alors $H^1(k(T), S) = 1$ et le point générique de T se relève en un élément de $E(k(T))$. Il suit que $T \times S$ est k-birationnel à E, et donc que $T \times S$ est k-rationnel.

La réciproque est évidente.

[Guo] N. Guo, *The Grothendieck-Serre's conjecture over semilocal Dedekind rings*, Transformations Groups **27** (2022), 897-917.

A. Zidani, *Arithmétique des sous-groupes de Bruhat-Tits sur un anneau de valuation discrète hensélien*, arXiv:2509.17929

****

Lecture Notes in Math. 2238.

(1) §6.2. Pour un foncteur en groupes $\mathcal{F}$, l'affirmation que la R_1-équivalence coïncide avec la relation élémentaire est fausse. Par exemple le cas du k-tore $G = (\mathbb{G}_{m,k})^2$. En effet on a $G(k)/R = 1$ alors que les points de $(k^\times)^2$ qui sont directement R_1-équivalents à l'origine $(1, 1)$ sont les (t_0^m, t_0^n) pour t_0 parcourant $k^\times$ et m, n parcourant $\mathbb{Z}$. Le lemme 1.6.5.(1) prend alors la forme suivante (le (2) restant échangé):

Lemme 1.6.5. *Soit M un k–groupe de type multiplicatif.*

(1) Soit $\alpha \in H^1_{\mathrm{fppf}}(k,M)$. Alors α est <u>directement</u> *R_1-équivalent à 1 si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$ et un plongement $i : \mu_n \to M$ telle que $\alpha \in \mathrm{Im}\big(H^1_{\mathrm{fppf}}(k,\mu_n) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(k,M)\big)$.*

Comme ce lemme est utilisé dans la démonstration du Corollaire 5.5.2.(1), on doit la modifier légèrement de la façon suivante. Sous les hypothèses du Corollaire 5.5.2.(1), on doit montrer que l'application $i_* : R_1H^1(k,T) \to H^1(k,G)$ est triviale. Si $\alpha \in H^1(k,T)$ est directement R_1-équivalent à 1, l'argument existant s'applique avec la nouvelle version du Lemme 1.6.5.(1) et montre que $i_*(\alpha) = 1$. Etant donné $\alpha \in R_1H^1(k,T)$, on a $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_c$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_c$ directement R_1-équivalent. Par récurence sur $c \geq 1$, l'argument habituel de torsion montre que $i_*(\alpha) = 1$.

(2) Nous apportons deux précisions à la démonstration du théorème 8.4.1.(2) sur la conjecture II de Serre en type E_8 dans le cas d'un corps parfait.

(a) Le lemme 8.4.2 est énoncé avec un corps de base k de caractéristique nulle alors que l'on besoin du cas parfait. L'extension ne pose pas de problème comme on va le vérifier. Le nouvel énoncé est donc le suivant où G_0 désigne le k–groupe déployé de type E_8.

Lemma 8.4.2 *On suppose k de caractéristique libre. On note H_0 le sous–groupe maximal déployé de G_0 de type $E_6 \times A_2$. Soit L/k une extension cyclique de degré 3. On suppose que $H^1(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Alors*

$$H^1(L/k,G_0)_{an} \subseteq \mathrm{Im}\big(H^1(k,H_0) \to H^1(k,G_0)\big)$$

($H^1(L/k,G_0)_{an}$ désigne le sous–ensemble des classes de cohomologie anisotropes, i.e. les classes $[z]$ telles que le groupe tordu ${}_zG_0$ soit anisotrope).

Démonstration. On note σ un générateur de $\mathrm{Gal}(L/k)$. Soit $z \in Z^1(k,G_0)_{an}$ et $G = {}_zG_0$ le groupe tordu. Soit P_L un L–parabolique de G_L de type E_7 et

$$C = \big(P_L \cap \sigma(P_L) \cap \sigma^2(P_L)\big) \subset G_L.$$

Le groupe C_L est défini sur k et suivant [149, lemma 6.32] , on sait que $\dim_k(C) \geq 77$. Nous allons montrer que C_L est un sous–groupe de Levi d'un L–sous–groupe parabolique de G inclus dans P_L, en particulier qu'il est lisse. En effet, soit Q_L un L–sous–groupe parabolique de G contenant C_L et contenu dans P_L que l'on suppose minimal pour cette propriété. Alors $C = \big(Q_L \cap \sigma(Q_L) \cap \sigma^2(Q_L)\big)$. Par minimalité de Q_L, on a $Q_L = R_u(Q_L).(Q_L \cap \sigma(Q_L))$, donc Q_L et $\sigma(Q_L)$ son opposés [22, prop. 4.10]; le groupe $M_L := Q_L \cap \sigma(Q_L)$ est donc un sous–groupe de Levi de Q_L contenant C_L. De plus, $C_L = M_L \cap \sigma^2(Q_L)$ est un L–parabolique de M_L [82 , prop. 3.1.1.(3)]. En particulier C est lisse et connexe. On note U le k-radical unipotent de C, on sait que U_L est le L–radical unipotent de C_L [53, prop. 1.1.9] donc il est L–déployé et U est k-déployé en vertu de [53, B.3.5].

Si $C_L \neq M_L$, alors U est non trivial, ce qui contredit l'anisotropie de G. Il résulte que C_L est un sous–groupe de Levi de Q_L. Le groupe C est donc réductif, et son diagramme de Dynkin absolu est un sous–diagramme de E_7. Un examen facile des cas possibles sous les hypothèses $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $\dim_k(C) \geq 77$ entraîne alors que C est de type E_6. Le groupe $H := C_G(C).C$ est semi–simple de type $E_6 \times A_2$. Soit T/k un k–tore maximal de H. Alors le système de racines $\Phi(G_{k_s}, T_{k_s})$ de type E_8 admet le sous–système $\Phi(H_{k_s}, T_{k_s})$ de type $E_6 \times A_2$. Comme tous les sous–systèmes $E_6 \times A_2$ du système de racines E_8 sont conjugués par le groupe de Weyl, il résulte que le groupe H_{k_s} est conjugué (par un élement de $G(k_s)$) au sous–groupe standard H_{0,k_s} de type $E_6 \times A_2$. D'après le lemme 1 de [159, §III.2], ceci entraîne

$$[z] \in \mathrm{Im}\Big(H^1(k, N_{G_0}(H_0)) \to H^1(k, G_0)\Big).$$

On a une injection $N_{G_0}(H_0)/H_0 \to \mathrm{Aut}(H_0)/H_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc le groupe $N_{G_0}(H_0)/H_0$ est 2–primaire et l'hypothèse $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ entraîne que $H^1(k, N_{G_0}(H_0)/H_0) = 1$. Il résulte que $[z] \in \mathrm{Im}\Big(H^1(k, H_0) \to H^1(k, G_0)\Big)$.

(b) La fin de la démonstration du théorème 8.4.1 fait appel à un théorème de Chernousov (cas de degré 5) énoncé sur un corps de nombres. Selon Tits [180, cours 1990-91, §4.1], celui-ci vaut dès que $F = F^6$ ce qui comble la lacune mentionnée.

Ces deux commentaires donnent en fait un peu plus, à savoir que dans 8.4.1.(2), on peut demander soit k parfait, soit k de caractéristique $\neq 2, 3$.

****