Familles d'algèbres de quaternions et d'octonions

Philippe GILLE

Ecole normale supérieure, Paris, CNRS

Algèbres de quaternions

- Par convention tacite, tous les anneaux et algèbres sont avec unité.
- Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est une algèbre de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ equipé de la norme $N(x+iy) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$.
- En particulier, on a la formule algébrique remarquable
$$(x_1^2 + y_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2.$$
- Elle vaut sur tout anneau commutatif.
- L'algèbre des quaternions de Hamilton $\mathbb{H}$ est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, est associative et munie d'une involution $q \mapsto \sigma(q)$. On a
$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.i \oplus \mathbb{R}.j \oplus \mathbb{R}.k$$
avec les règles de multiplication
$$i^2 = j^2 = -1; \quad ij = k = -ij.$$

Algèbres de quaternions

- On a $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,j = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.i \oplus \mathbb{R}.j \oplus \mathbb{R}.k$, l'involution étant définie par $\sigma(x + yi + zj + wk) = x - yi - zj - wk$.
- On observe que $N(q) = q\,\sigma(q) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ appartient à $\mathbb{R}$ est que tout quaternion non nul est inversible. Ainsi $\mathbb{H}$ est un corps gauche, c'est une algèbre (associative) à division de centre $\mathbb{R}$.
- On sait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{H}$ sont les seules $\mathbb{R}$-algèbres associatives à division de dimension finie sur leur centre $\mathbb{R}$.
- On a $\sigma(q_1\, q_2) = \sigma(q_2)\, \sigma(q_1)$, d'où la formule
$$N(q_1\, q_2) = N(q_1)\, N(q_2).$$
- En particulier, le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés et la formule obtenue est universelle.

Algèbre des octonions de Cayley

- L'algèbre des octonions de Cayley $\mathbb{O}$ est obtenue à partir de $\mathbb{H}$ par le même procédé que $\mathbb{H}$ de $\mathbb{C}$. Il s'agit du procédé de doublement de Cayley-Dickson.

- On pose
$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$
avec les règles de multiplication
$$(x, y) \,.\, (x', y') = \big(x \,.\, x' \;-\; y' \,.\, \sigma(y) \,,\, \sigma(x) \,.\, y' \;+\; x' \,.\, y \big)$$
pour $x, y, x', y' \in \mathbb{H}$.

- L'unité est $(1, 0)$; cette algèbre n'est pas associative. Elle satisfait la propriété plus faible
$$(u.v) \,.\, v = u \,.\, (v.v)$$
appelée alternativité.

Multiplicativité

- Sur $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, on définit l'involution $\tau(x, y) = (\sigma(x), -y)$ et la norme par

$$n_{\mathbb{O}}(x, y) = (x, y) \,.\, \tau(x, y) = N(x) + N(y).$$

- Cette norme est multiplicative, i.e. $N(u \,.\, v) = N(u)\, N(v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{O}$.

- Une nouvelle fois, un produit de sommes de huit carrés et une somme de huit carrés et cela de façon universelle.

- Peut-on continuer ce processus ? Que dire des autres dimensions ?

Groupes associés

- Le groupe d'automorphismes des algèbres précédentes est un sous–groupe de Lie de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

d	2	4	8
Algèbre	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
Groupe	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times$	K

- Dans le cas de $\mathbb{H}$, c'est un cas particulier du théorème de Skolem-Noether : les automorphismes d'une algèbre simple centrale sur un corps sont intérieurs.

- Dans le cas des quaternions, on a en fait un isomorphisme de groupes de Lie $\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$. Il s'agit d'une réalisation du fait que les diagrammes de Dynkin A_1 et B_1 coïncident.

Groupes associés

- C'est un fait que les involutions sont canoniques. Ainsi ce groupe d'automorphisme est un sous–groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.
- En effet, un automorphisme de $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{O}$) fixe 1 et préserve la partie imaginaire pure. Le groupe d'automorphisme est alors un sous–groupe de $O_{d-1}(\mathbb{R})$.
-

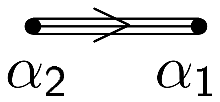
d	4	8
Algèbre	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
Groupe	$\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times$	K
Sous-groupe de	O_3	O_7

Le groupe compact de type G_2

- Le groupe K des automorphismes de $\mathbb{O}$ est connexe. C'est un sous–groupe strict de SO_7. Il est en effet de dimension 14 alors que SO_7 est de dimension 21.

- Ce groupe de Lie K est simple, c'est le plus petit des groupes exceptionnels. Son diagramme de Dynkin est noté

G_2



- Les groupes de Lie compacts sont classifiés. Leur classification permet de voir par exemple qu'il n'y pas de structure d'algèbre avec une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ par exemple.

Un peu de géométrie différentielle

- La multiplication sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$, induisent une structure de groupe de Lie sur les sphères S^1 et S^3.

- La multiplication des octonions induit une structure remarquable sur la sphère S^7 (qui n'est pas un groupe de Lie !). En particulier, le fibré tangent de S^7 est trivial.

- En d'autres mots, les sphères S^1, S^2 et S^7 sont parallélisables.

- Théorème : S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères parallélisables.

Un peu de géométrie différentielle

- Théorème : S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères parallélisables.

- Le cas le plus connu est celui de la sphère de Riemann S^2. Ce résultat est communément appelé le théorème de la “boule chevelue” ou encore du hérisson.

- Un dessin s'impose !

- Corollaire : Les dimensions $2, 4, 8$ sont les seules où l'on peut munir $\mathbb{R}^d$ d'une forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de sorte que

$$N\big(\, b(x,y)\,\big) = N(x)\, N(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

- Ce résultat est algébrique, il vaut sur tout corps d'exposant caractéristique impair (Hurwitz).

Quaternions sur un corps

- On fixe un corps de base k d'exposant caractéristique impair.

- Une algèbre de quaternions sur k est une algèbre

$$Q = (a, b) = k \oplus k.i \oplus k.j \oplus k.ij$$

avec règles de multiplication $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij + ji = 0$, où $a, b \in k^\times$.

- Elle est munie d'une involution (canonique)

$$\sigma(x + y\, i + z\, j + w\, ij) = x - y\, i - z\, j - w\, ij.$$

- La norme quaternionique est définie par

$$N_Q(x + y\, i + z\, j + w\, ij) = x^2 - a\, y^2 - b\, z^2 + ab\, w^2.$$

Quaternions sur un corps

- Sur $Q \cong k^4$, la forme quadratique N_Q est isométrique à la forme quadratique diagonale $\langle 1, -a, -b, ab \rangle = \langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, -b \rangle$ notée aussi $\langle\langle a, b \rangle\rangle$.

- Witt a démontré que $Q = (a, b)$ est isomorphe à $Q' = (a', b')$ si et seulement si les formes quadratiques $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ et $\langle\langle a', b' \rangle\rangle$ sont isométriques.

- En d'autres mots, Q est déterminée par N_Q.

- Dans le cas de de $\mathbb{R}$, il existe alors deux algèbres de quaternions $\mathbb{H}$ et $M_2(\mathbb{R})$ correspondant respectivement aux formes quadratiques $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$ $\langle\langle -1, -1 \rangle\rangle$.

Algèbres d'octonions sur un corps

- On considère une algèbre d'octonions C sur un corps k (on donnera une définition plus loin).
- C est de dimension 8 sur k et est munie d'une forme quadratique régulière N_C qui est multiplicative. N_C est une 3–forme de Pfister $\langle\langle a, b, c\rangle\rangle$.
- Van der Blij et Springer ont montré que C est déterminée par N_C.
- En somme, on une bijection entre les classes d'isomorphie de k–algèbres d'octonions (resp. de quaternions) sur k et les classes d'isométrie de k–formes quadratiques de Pfister de dimension 8 (resp. 4).

Algèbres de quaternions sur un anneau commutatif

- Une R-algèbre de quaternions Q est une R-algèbre d'Azumaya de rang 4.

- De façon équivalente, Q est une R-algèbre associative (avec unité), est un R–module localement libre de rang 4, et admet une norme $n_Q : Q \to R$ déterminée par les conditions

- (I) n_Q est une forme quadratique régulière ;

  (II) $n_Q(xy) = n_Q(x)\, n_Q(y)$ pour tous $x, y \in Q$.

- Exemple : $R = \mathbb{C}\big[\, t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1} \big]$. Le tore quantique de présentation

$$T_1^2 = t_1, \quad T_2^2 = t_2, \quad T_1 T_2 + T_1 T_2 = 0$$

est une R–algèbre de quaternions.

Le théorème de Knus-Ojanguren-Sridharan

- Le théorème de Knus et al's dit que N_Q détermine Q, c'est-à-dire généralise Witt.

- Loos-Petersson-Racine ont défini les R-algèbres d'octonions (2008, voir plus loin). Une telle R-algèbre est en particulier un R–module loalement libre de rang 8 muni d'une R–forme quadratique régulière.

- En mai 2012, Holger Petersson a donné à Lens un cours sur les algèbres de Jordan. Il a posé la question naturelle suivante : Le théorème de Van der Blij/Springer sur les corps vaut-il sur un anneau arbitraire ?

- En d'autres mots, les R–algèbres d'octonions sont-elles déterminées par leurs formes normes ?

Où en est-on ?

- Notre propos est d'étudier dans quelle mesure les algèbres de composition sont déterminées par leurs normes.

	Quaternions	Octonions
/ Corps	Witt	Van der Blij/Springer
/ Anneaux	Knus-Ojanguren-Sridharan	?

- Plan : on va discuter plus en détail le cas des algèbres de quaternions avant d'aborder celui des octonions.

La preuve originale

- A chaque espace quadratique régulier (V, q) sur R, on sait associer son algèbre de Clifford $C(q)$ ainsi que sa partie paire $C_0(q)$. Etant donné une R–algèbre de quaternions Q, Knus et al ont construit un isomorphisme canonique $C_0(Q, N_Q) \cong Q \times Q$.
- Ceci montre bien que N_Q détermine Q. Le fait sous–jacent est $A_1 \times A_1 = D_2$ qui s'exprime ici de la façon suivante.
- On a une suite exacte de schémas en groupes

$$1 \to \mu_2 \to \mathrm{SL}_1(Q) \times \mathrm{SL}_1(Q) \xrightarrow{f} \mathrm{SO}(Q, N_Q) \to 1$$

  where $f(x, y).q = xq\,y^{-1}$ pour chaque $q \in Q$.
- Il suit que $\mathrm{PGL}_1(Q) \times \mathrm{PGL}_1(Q)$ est le groupe adjoint de $\mathrm{SO}(Q, N_Q)$. On sait alors que le schéma en groupes projectifs $\mathrm{PGL}_1(Q)/R$ détermine Q. On conclut ainsi que N_Q détermine Q.

Algèbres d'octonions

- La définition ci-dessous est celle de Loos-Petersson-Racine.
- Une R–algèbre d'octonions est une R–algèbre (non associative, à unité) C qui est un R–module localement libre de rang 8 et admet une norme $n_C : C \to R$ satisfaisant les conditions suivantes :
- (I) n_C est une forme quadratique régulière ;

  (II) $n_C(xy) = n_C(x)\, n_C(y)$ pour tous $x, y \in C$.
- Cette notion est stable par changement de base, cela n'est pas formel.
- Le R-schéma en groupes des automorphismes de C/R est semi-simple de type G_2 au sens de la théorie de Demazure-Grothendieck.

Une évidence

- Le cas des anneaux locaux. La théorie de Demazure-Grothendieck des schémas en groupes réductifs nous apprend que dans le cas local, cette théorie est essentiellement la même que la théorie des groupes algébriques réductifs de Borel-Tits sur un corps. Par exemple, on dispose de la décomposition de Bruhat, d'une classification cohomologique, etc...

- **Théorème** (Bix, 1981) *Le théorème de Van der Blij/Springer vaut pour un anneau local*.

- Dans le cas d'un anneau local d'une variété lisse sur le corps k, on peut arriver à la même conclusion en utilisant beaucoup de choses : la pureté de Balmer-Walter pour les groupes de Witt des schémas jointe aux résultats de Chernousov-Panin sur la pureté des G_2–torseurs.

Notre contre-exemple

- Soit $G/\mathbb{R}$ le groupe algébrique d'automorphismes de $\mathbb{O}$. On considère son plongement dans le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_8/\mathbb{R}$.

- C'est un fait que la variété algébrique quotient SO_8/G est affine, c'est-à-dire donnée par un anneau $A/\mathbb{R}$ lisse sur $\mathbb{R}$.

  Théorème. *Il existe une algèbre d'octonions C/A telle que $C \not\cong \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} A$ et $n_C = n_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{R}} A$.*

- La réponse à la question de Petersson est donc négative.

Remarques finales

- La démonstration est “topologique”, elle est basée sur le fait que la fibration topologique $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_8(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})$ n'est pas triviale. Ceci se détecte au moyen des groupes d'homotopie. On a en effet $\pi_6(G(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\pi_6(\mathrm{SO}_8(\mathbb{R})) = 0$.

- Du coté des quaternions, la fibration analogue est

$$\mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/\left(\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times\right) = \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$

  Elle est triviale.

- On ne connait pas d'autre façon de construire des contre-exemples. On aimerait avoir une explication purement algébrique.

- La variété du contre-exemple est de dimension $14 = 28 - 14$. On peut raffiner avec SO_7 afin d'obtenir 7.

- A partir de quelle dimension existe-il des contre-exemples ?
- Le cas de dimension 1 est ouvert...