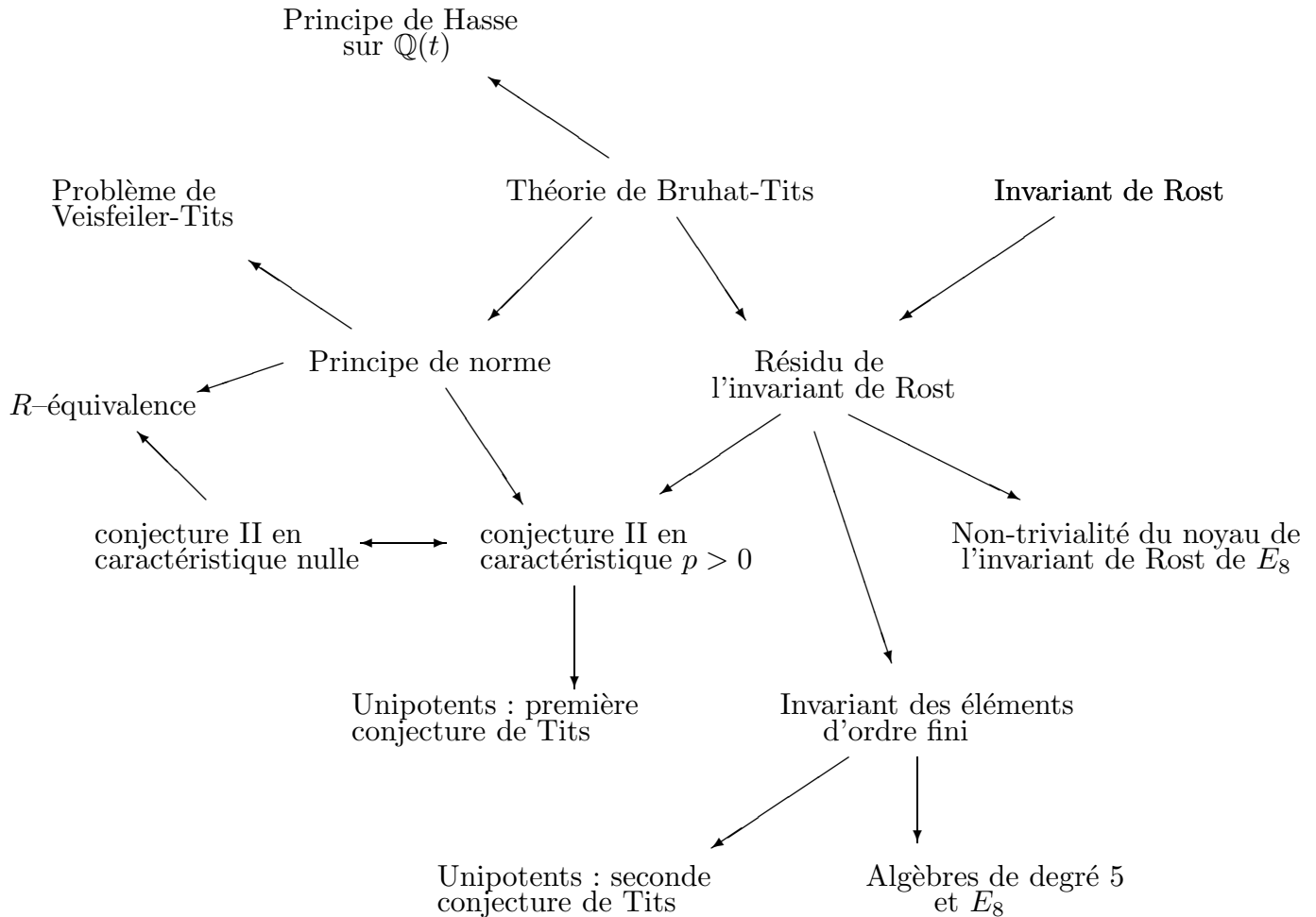


Autour de la conjecture II de Serre

Plan

I. — Introduction	3
I.1. — Groupes algébriques	3
I.2. — Cohomologie galoisienne	5
I.3. — La conjecture II	6
I.4. — Questions de rationalité	7
II. — R-équivalence et principe de norme	8
II.1. — Principe de norme	8
II.2. — R -équivalence pour les groupes adjoints	9
II.3. — Le problème de Veisfeiler-Tits	10
II.4. — Finitude de la R -équivalence pour les groupes réductifs définis sur les corps globaux	10
III. — Décomposition de Bruhat-Tits et arithmétique	11
III.1. — Immeubles affines et sous-groupes parahoriques	11
III.2. — La décomposition	13
III.3. — Une application arithmétique	14
IV. — Propriétés infinitésimales de invariant de Rost	15
IV.1. — Origine et définitions de l'invariant de Rost	15
IV.2. — Relèvement en caractéristique nulle	17
IV.3. — Résidu de l'invariant de Rost	18
V. — Progrès sur la conjecture II	19
V.1. — Résultats	19
V.2. — Méthodes	20
V.3. — Corps de nombres et corps géométriques de dimension 2	21
V.4. — Application à la R -équivalence sur les groupes réductifs	22
VI. — Conjectures de Tits sur les unipotents.	
Eléments d'ordre fini des groupes	22
VI.1. — Sous-groupes unipotents	22
VI.2. — Lien avec la cohomologie galoisienne	23
VI.3. — Un invariant des éléments d'ordre fini	24
VI.4. — Algèbres simples centrales de degré 5 et E_8	26
VII. — Autres travaux	27
VII.1. — Torseurs sur la droite affine	27
VII.2. — G -revêtements sur les corps p -adiques	27
VIII. — Quelques questions	28
Bibliographie	28

Leitfaden



I. — Introduction

Ce rapport porte sur plusieurs aspects de la théorie des groupes algébriques linéaires définis sur un corps quelconque k : cohomologie galoisienne, théorie de Bruhat-Tits, questions de rationalité, étude de certains sous-groupes normaux des groupes des points rationnels. Nos résultats principaux récents sont la démonstration de nouveaux cas de la conjecture II de J-P. Serre en cohomologie galoisienne et de deux conjectures J. Tits sur les éléments unipotents des groupes algébriques en caractéristique positive.

La suite de l'introduction a pour but de présenter le cadre où l'on travaille ainsi que la problématique du sujet.

I.1. — Groupes algébriques. Les groupes algébriques linéaires les plus familiers sont les groupes linéaires des matrices inversibles à coefficients réels ou complexes, les groupes orthogonaux et symplectiques; ils sont algébriques au sens où ils sont définis par des équations polynomiales. Par exemple, le groupe spécial linéaire $SL_{n,\mathbb{C}}$ des matrices complexes de rang n de déterminant 1 est donné par l'équation $\det(A) = 1$ et le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice A . Le point de vue algébrique permet de définir la notion de groupe algébrique linéaire non seulement sur le corps des complexes \mathbb{C} , mais sur tout corps commutatif k , par exemple le corps des réels \mathbb{R} , le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, le corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier), ou encore le corps de fractions rationnelles $\mathbb{C}(t)$. Par définition, un k -groupe algébrique linéaire est un

sous-groupe lisse d'un groupe linéaire GL_n déterminé par des équations polynomiales en les coefficients des matrices. Ainsi, on distingue le groupe algébrique, c'est-à-dire la donnée des équations, du groupe abstrait $G(k)$ des k -points, i.e. de l'ensemble des matrices à coefficients dans k satisfaisant les équations données.

La classification de tels objets est une question naturelle et dépend des corps pris en considération. On peut se ramener à la classification des groupes dits semi-simples, c'est-à-dire ne contenant pas de sous-groupe algébrique connexe abélien normal (i.e. commutatif et distingué).

Pour le corps \mathbb{C} des nombres complexes, la classification a été faite au début du siècle dernier par Cartan et Killing. Elle fait apparaître quatre séries infinies de groupes dits classiques, que l'on numérote par des types :

- type A_n : groupe spécial linéaire SL_{n+1} ,
- type B_n : groupe spécial orthogonal d'une forme quadratique de rang $2n + 1$,
- type C_n : groupe symplectique Sp_{2n} formé des matrices de rang $2n$ satisfaisant ${}^tXJX = J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- type D_n : groupe spécial orthogonal d'une forme quadratique de rang $2n$ formé des matrices de rang $2n$ satisfaisant ${}^tXJX = J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$;

En plus de ces quatre séries infinies, il y a cinq groupes dits exceptionnels, E_6 , E_7 , E_8 , F_4 et G_2 . Par exemple, le groupe E_6 est la composante connexe de l'élément neutre du groupe des transformations laissant invariante la forme cubique (V, f) où

$$V = M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \quad \text{et} \\ f(A, B, C) = \det(A) + \det(B) + \det(C) - \text{Tr}(ABC).$$

Les groupes E_7 , F_4 , G_2 sont aussi les groupes d'automorphismes de structures algébriques remarquables : respectivement algèbres de Freudenthal, algèbres de Jordan exceptionnelles, et algèbres d'octonions; on ne connaît pas de telle structure pour le groupe E_8 .

Un groupe semi-simple complexe est essentiellement¹ un produit des groupes précédents. Cette classification vaut en fait pour tout corps k algébriquement clos de caractéristique nulle (c'est-à-dire un corps pour lequel tout polynôme a une racine). Chevalley a démontré dans les années cinquante que cette classification vaut pour tout corps k algébriquement clos de caractéristique quelconque.

Lorque l'on ne suppose pas le corps algébriquement clos, il y a beaucoup plus de classes d'isomorphie de groupes. Par exemple, si $k = \mathbb{R}$, les groupes spéciaux orthogonaux des formes quadratiques $q_0 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ et $q_1 = -X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ ne sont pas isomorphes. Pourtant, lorsque l'on étend les scalaires à \mathbb{C} , ils deviennent isomorphes, car les deux formes quadratiques complexifiées sont isomorphes. On dit alors que $SO(q_0)$ est une \mathbb{C}/\mathbb{R} -forme de $SO(q_1)$. Ce point de vue est celui de la cohomologie galoisienne, théorie due à Serre [Se1].

¹ à isogénie centrale près.

I.2. — Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires

Le corps \mathbb{C} est la clôture algébrique de \mathbb{R} et la conjugaison complexe $z \rightarrow \bar{z}$ est l'unique automorphisme \mathbb{R} -linéaire d'ordre 2 de \mathbb{C} ; le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ des automorphismes \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{C} est donc le groupe à deux éléments. Plus généralement, il existe une clôture séparable k_s de k , c'est-à-dire un surcorps k_s de k tel que tout élément x de k_s soit racine simple d'un polynôme $P \in k[T]$ et tel que tout polynôme à coefficients dans k_s de discriminant non nul ait une racine dans k_s^2 . Le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(k_s/k)$ est par définition comme le groupe des transformations k -linéaires de k_s . Soit G/k un groupe algébrique linéaire. Comme les équations définissant G sont à coefficients dans le corps k , le groupe abstrait $G(k_s)$, formé des k_s -solutions des équations définissant G , est muni d'une action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(k_s/k)$ que l'on note $g \rightarrow {}^\sigma g$ pour $\sigma \in \text{Gal}(k_s/k)$. On dit qu'une application

$$z : \text{Gal}(k_s/k) \rightarrow G(k_s), \quad \sigma \mapsto z_\sigma$$

est un 1-cocycle si elle satisfait les propriétés suivantes :

- i) z vaut 1 sur un sous-groupe d'indice fini de $\text{Gal}(k_s/k)$,
- ii) $z_{\sigma\tau} = z_\sigma {}^\sigma z_\tau$ pour tous $\sigma, \tau \in \text{Gal}(k_s/k)$.

Deux cocycles z et z' sont *cohomologues* s'il existe $g \in G(k_s)$ tel que $z'_\sigma = g^{-1} z_\sigma {}^\sigma g$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(k_s/k)$; c'est une relation d'équivalence. On définit alors l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(k, G)$ comme l'ensemble des 1-cocycles modulo la relation d'équivalence précédente. Cet ensemble est pointé par la classe du cocycle trivial, mais n'est pas muni d'une structure de groupe. Si G est un groupe semi-simple, le groupe $\text{Aut}_k(G)$ des automorphismes de G est un groupe algébrique; c'est une extension d'un groupe fini $\text{Out}(G)/k$ par le groupe adjoint $G_{ad} = G/Z(G)$, (G modulo son centre), i.e on a une suite exacte de k -groupes $1 \rightarrow G_{ad} \rightarrow \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Out}(G) \rightarrow 1$ ce qui veut dire que l'on a une suite exacte $1 \rightarrow G_{ad}(k_s) \rightarrow \text{Aut}(G)(k) \rightarrow \text{Out}(G)(k_s) \rightarrow 1$. La relation fondamentale est la correspondance

$$\text{Classe d'isomorphie de } k_s/k\text{-formes de } G \quad \langle \! \langle \! \langle \quad H^1(k, \text{Aut}(G)).$$

Cette correspondance signifie que la classification des groupes algébriques revient à la détermination de l'ensemble $H^1(k, \text{Aut}(G))$. En effet, si G/k est un groupe semi-simple, d'après le paragraphe précédent, il existe un groupe de Chevalley G_0/k tel que l'extension des scalaires de G à k_s soit isomorphe à l'extension des scalaires de G_0 à k_s ; le groupe G est donc une k_s/k -forme du groupe G_0/k qui est composé de groupes standards comme SL_n , Sp_{2n}, \dots , ou E_8 . Le problème de classification de G consiste donc dans la détermination de sa classe dans $H^1(k, \text{Aut}(G_0))$. Cela inclut la question suivante : existe-il suffisamment d'invariants pour voir si G est isomorphe à G_0 ? Pour simplifier, nous allons nous en tenir à cette question. Un premier invariant de G provient de la flèche naturelle $H^1(k, \text{Aut}(G_0)) \rightarrow H^1(k, \text{Out}(G_0))$. Comme $\text{Out}(G_0)$ est un groupe fini constant (eg. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), un élément de $H^1(k, \text{Out}(G_0))$ est la donnée d'une algèbre galoisienne de groupe $\text{Out}(G_0)$. Ceci impose une première obstruction pour distinguer G de G_0 , de type discriminant. Si cette première obstruction est nulle, on dit que G est une forme interne de G_0 et alors on dispose d'une classe (essentiellement unique) dans $H^1(k, G_{0,ad})$. On

² si k est de caractéristique nulle, alors k_s est algébriquement clos, tout polynôme à coefficients dans k_s a une racine dans k_s .

considère alors le revêtement universel $G_0^{sc} \rightarrow G_{0,ad}$ et on a une suite exacte de k -groupes $1 \rightarrow \mu \rightarrow G_0^{sc} \rightarrow G_{0,ad} \rightarrow 1$, où μ est un groupe algébrique abélien fini (typiquement $\mu_2 = \{\pm 1\}$). On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, G_0^{sc}) \rightarrow H^1(k, G_{0,ad}) \xrightarrow{\delta} H^2(k, \mu)$$

où les groupes $H^1(k, \mu)$, $H^2(k, \mu)$ sont les groupes de cohomologie galoisienne du module galoisien $\mu(k_s)$. De même que le groupe $H^2(k, \mu_2)$ est un sous-groupe du groupe $Br(k)$ classifiant les algèbres simples centrales sur k (eg. algèbres de quaternions), la classe de G/k dans le groupe $H^2(k, \mu)$ a une interprétation en termes d'algèbres simples centrales qui sont les algèbres de Tits du groupe G [T3]. Si cette classe dans $H^2(k, \mu)$ est nulle, on dispose alors d'une classe dans $H^1(k, G_0^{sc})$ (non unique).

De façon imagée, la classification des groupes algébriques se fait donc par un processus lexicographique. Pour voir si la k -forme G de G_0 est la forme triviale, on commence par regarder un invariant de degré 1 dans $H^1(k, \text{Out}(G_0))$, puis un invariant de degré 2 dans un $H^2(k, Z(G_0^{sc}))$. Si ces invariants sont nuls, il vient alors une classe (non unique) dans $H^1(k, G_0^{sc})$. Prenons l'exemple des groupes spéciaux orthogonaux. Si l'on considère le groupe orthogonal $SO(q)$ pour une forme quadratique non dégénérée q , le premier invariant de $SO(q)$ (et donc de la classe de similtude de q) est le discriminant de q , à valeur dans $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = k^\times/k^{\times 2}$, le second est un invariant à valeur dans $H^2(k, \mu_2) \subset Br(k)$, c'est l'invariant de Hasse-Witt. Si les deux premiers invariants sont nuls, on dispose d'une classe dans $H^1(k, Spin(q_0))$, où le groupe des spineurs $Spin(q_0)$ est le revêtement universel de $SO(q_0)$.

I.3. — La conjecture II

a) La conjecture II propose une condition suffisante (mais en fait nécessaire et suffisante) pour que l'ensemble $H^1(k, G_0^{sc})$ soit réduit à 1. Cela veut donc dire que les groupes algébriques semi-simples sont alors classifiés par des invariants de degrés 1 et 2.

CONJECTURE II (Serre, 1962). — *On suppose k parfait de dimension cohomologique ≤ 2 . Alors pour tout groupe G/k semi-simple simplement connexe, on a $H^1(k, G) = 1$.*

La condition de dimension cohomologique ≤ 2 dit que la cohomologie galoisienne des modules galoisiens finis est concentrée en degrés 0, 1 et 2; cette condition peut s'exprimer par $H^3(L, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ pour toute extension finie L/k et tout nombre premier l inversible dans k . Des exemples de tels corps sont $\mathbb{Q}(i)$ (et plus généralement les corps de nombres imaginaires purs), $\mathbb{C}(X, Y)$, le corps p -adique \mathbb{Q}_p . Cette condition est nécessaire d'après Merkurjev-Suslin [MS, Su]. La conjecture II est connue pour les groupes de type 1A_n d'après Merkurjev-Suslin et pour les groupes classiques et de type F_4 et G_2 d'après Bayer et Parimala [BP].

b) Les conjectures de Tits sur les unipotents.

Dans son article [T4], J. Tits a vu qu'il existait un lien entre les méthodes employées pour la conjecture II dans le cas des corps de nombres (le principe de Hasse) et l'étude des éléments unipotents des groupes algébriques en caractéristique $p > 0$. Il a formulé alors les deux conjectures suivantes qu'il a démontrées dans le cas des groupes classiques.

PREMIÈRE CONJECTURE [T9]. — *On suppose $[k : k^p] \leq p$. Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe. Alors tout sous-groupe unipotent U de $G(k)$ (i.e. constitué d'éléments unipotents, c'est-à-dire d'ordre une puissance de p) est inclus dans le radical unipotent d'un k -sous-groupe parabolique propre de G .*

SECONDE CONJECTURE [T4]. — Soit G/k un groupe déployé absolument presque k -simple. Alors tout automorphisme d'ordre p anisotrope (i.e. ne normalisant aucun k -sous-groupe parabolique propre) de G normalise un k -tore déployé maximal.

I.4. — Questions de rationalité

a) Si un groupe semi-simple G est déployé (i.e. est un groupe de Chevalley), alors le groupe G est une variété k -rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe un k -isomorphisme birationnel $\mathbb{A}_k^{\dim(G)} \approx G$; un tel isomorphisme est donné par la décomposition de Bruhat. En général, le groupe G n'est pas une variété k -rationnelle. Ce n'est déjà pas le cas pour les tores algébriques (Chevalley, cf. [Vo, § 4]). Pour les groupes semi-simples, il est facile de produire des exemples de groupes non rationnels, mais cela est beaucoup plus subtil pour les groupes absolument presque k -simples, c'est-à-dire les groupes dont le groupe adjoint est simple. Platonov [P] a montré que le groupe $SL_1(D)$ des éléments de norme réduite 1 d'une algèbre simple centrale D/k d'indice avec facteur carré, n'est pas en général une variété k -rationnelle; Suslin a conjecturé qu'un tel groupe n'est pas une variété rationnelle et cela a été démontré par Merkurjev [M2] pour les algèbres d'indice divisible par 4. Ces résultats ont été démontrés en utilisant la relation de R -équivalence sur le groupe $G(k)$.

b) R -équivalence. Soit X/k une variété algébrique. On note \mathcal{O} l'anneau semi-local de la droite affine \mathbb{A}_k^1 aux points 0 et 1. La R -équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble $X(k)$ des points k -rationnels de X engendrée par la relation élémentaire suivante (Manin [Mn]) : deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R -équivalents s'il existe $\phi \in X(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes pour la R -équivalence.

Si $X = G$, alors la R -équivalence est compatible avec la structure de groupe sur $G(k)$; l'ensemble $R(k, G) = Cl_R(e)$ est un sous-groupe normal de $G(k)$ et $G(k)/R = G(k)/R(k, G)$. De plus, si k est infini, on sait que la relation élémentaire est une relation d'équivalence. En particulier, l'ensemble groupe $G(k)/R$ est un invariant birationnel du groupe algébrique G/k [CTS1]. Si la variété de groupe est rationnelle, c'est-à-dire k -birationnelle à un espace affine, alors le groupe $G(k)/R$ est trivial.

La définition précédente peut s'étendre aux foncteurs contravariants de la catégorie Sch/k des k -schémas dans les ensembles. Soit

$$F : Sch/k \rightarrow \mathcal{E}ns$$

un tel foncteur. Deux points x et y de $F(k)$ sont dits directement R -équivalents s'il existe $\phi \in F(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. La R -équivalence sur l'ensemble $F(k)$ est alors la relation d'équivalence engendrée par cette relation élémentaire.

Quelques notations

- $\text{car}(k) \geq 0$ la caractéristique du corps k ,
- $H^i(k, M)$, le i -ième groupe de cohomologie galoisienne pour un faisceau galoisien M sur $\text{Spec}(k)$ [Se1], $H_{fppf}^i(k, M)$ la cohomologie plate d'un faisceau M sur $\text{Spec}(k)$ pour la topologie plate [Mi].
- $Br(k) = H^2(k, k_s^\times)$, le groupe de Brauer de k , si A/k est une algèbre simple centrale, on note $[A]$ sa classe dans $Br(k)$, l'exposant $\text{exp}(A)$ de A est l'ordre de $[A]$ dans $Br(k)$ et l'indice $\text{Ind}_k(A)$ de A est la racine carrée de la dimension d'une algèbre à division semblable à A (eg. [KMRT]).
- $\mu_{n,k}$ le faisceau galoisien des racines n -ièmes de l'unité ($(n, \text{car}(k)) = 1$),

- $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(i)_k = \mu_{l^n, F}^{\otimes i}$ (l premier, $l \neq \text{car}(k)$, $i \geq 0$),
- $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i)_k = \varinjlim \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(i)_F$ (l premier, $l \neq \text{car}(k)$, $i \geq 0$),
- $W(k)$ le groupe de Witt de k et $I(k)$ l'idéal fondamental de $W(k)$ [Sc],
- $K_2(R)$ le second groupe de K -théorie de Milnor d'un anneau R [BT], $\{a_1, a_2, \}$ le symbole pour $a_1, a_2 \in R^\times$ et \mathcal{K}_2 le faisceau sur X_{Zar} associé au préfaisceau $U \mapsto K_2(O_X(U))$,
- ${}_nA$ et A/n le noyau et le conoyau de la multiplication $A \xrightarrow{\times n} A$ par un entier n pour un groupe abélien A .

II. — R-équivalence et principe de norme

II.1. — Principe de norme

Soit $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une isogénie centrale de groupes réductifs connexes définis sur un corps k et soit L/k une extension finie de corps. Existe-t-il un principe de norme pour le groupe abélien $G(k)/\lambda(\tilde{G}(k))$, i.e. existe-t-il une application norme naturelle $N_{L/k} : G(L)/\lambda(\tilde{G}(L)) \rightarrow G(k)/\lambda(\tilde{G}(k))$? Nous avons donné une réponse partielle à cette question.

THÉORÈME II.1.1 [4,6]. — *Soient $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une k -isogénie centrale de groupes réductifs connexes définis sur un corps k , de noyau le k -groupe commutatif fini μ et L/k une extension finie de corps. Soit $R(k, G) \subset G(k)$ le sous-groupe (normal) des éléments R -équivalents à e . Notons $N_{L/k} : H_{fppf}^1(L, \mu) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ la corestriction de L à k et $\varphi_k : G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ l'application caractéristique associée à λ . Alors, on a*

$$N_{L/k}(\varphi_L(R(L, G))) \subset \varphi_k(R(k, G)).$$

En particulier, pour l'isogénie $Spin(q) \rightarrow SO(q)$, on obtient ainsi une nouvelle démonstration du principe de norme de Knebusch sur le groupe engendré par les valeurs non nulles d'une forme quadratique. Ce résultat s'applique en pratique à travers le corollaire suivant.

COROLLAIRE II.1.2 [4,6]. — *Soient $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une isogénie centrale de k -groupes semi-simples de noyau μ , et L/k une extension finie de corps. Supposons l'une des conditions suivantes vérifiée :*

- Le groupe $G_L(L)/R$ est trivial.*
- Le groupe $G_{ad,L}(L)/R$ est trivial.*
- La L -variété $G_{ad,L}$ est L -rationnelle.*
- Le groupe G_L est quasi-déployé.*

Alors λ satisfait le principe de norme pour l'extension L/k .

Les assertions sont liées par les implications $d) \implies c) \implies b)$.

Tenant compte des résultats ci-dessus, Merkurjev a établi une formule pour la R -équivalence pour certains groupes classiques.

THÉORÈME II.1.3 [M3]. — On suppose $\text{car}(k) \neq 0$. Soit (A, τ) une algèbre simple munie d'une involution τ de centre Z , on suppose que $k = Z^+ = \{z \in Z \mid \tau z = z\}$. On note $\mu : \text{Sim}(A, \tau) \rightarrow \mathbb{G}_m$ le morphisme associant aux groupes des similitudes de (A, τ) le facteur de similitude. On pose $G = \text{Sim}(A, \tau)^0$, la composante connexe de $\text{Sim}(A, \tau)$. Alors

$$G(k)/R \xrightarrow{\sim} \mu(\text{Sim}(A, \tau)^0(k))/N_{Z/k}(Z^\times). \text{Hyp}(A, \tau)$$

où $\text{Hyp}(A, \tau) \subset k^\times$ est le groupe engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour les extensions finies de corps L/k telles que (A_L, τ_L) est une algèbre à involution hyperbolique [KMRT, p. 75].

En particulier, si q est une forme quadratique de rang pair, on a un isomorphisme

$$GO(q)(k)/R \xrightarrow{\sim} PSO(q)(k)/R \xrightarrow{\sim} G(q)/k^{\times 2}. \text{Hyp}(q)(k),$$

où $GO(q)$ désigne le groupe de similitude de la forme q , $G(q)$ est le groupe des facteurs des similitudes de q et $\text{Hyp}(q)$ est le sous-groupe de k^\times engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour les extensions finies L/k telles que la forme q_L est déployée (i.e. somme orthogonale d'espaces hyperboliques $X^2 - Y^2$).

Signalons enfin que Barquero et Merkurjev ont établi récemment le principe de norme pour les groupes classiques de types A_n , B_n et C_n [BaM].

II.2. — R-équivalence pour les groupes adjoints

Platonov avait conjecturé que les variétés de groupes des groupes semi-simples adjoints sont rationnelles, c'est-à-dire birationnellement isomorphes à un espace affine convenable \mathbb{A}^N . Par la paramétrisation de Cayley, c'est le cas des groupes $SO(q)$ pour des formes quadratiques de rang $2n + 1$ (type B_n). S'appuyant sur le théorème II.1.3, Merkurjev [M6] a donné une classification birationnelle complète des groupes adjoints de rang 3 (en rang 1 et 2, tous les groupes semi-simples définissent des variétés rationnelles, c'est un résultat de Chevalley), montrant notamment qu'il existe des groupes projectif-orthogonaux $PSO(q)$ non rationnels avec q une forme quadratique de dimension paire $2n \geq 6$ et de discriminant signé non trivial.

En dimension 6, une forme quadratique de rang 6 et de discriminant signé 1 n'est pas autre chose qu'une forme d'Albert $\langle a_1, b_1, -a_1b_1, -a_2, -b_2, a_2b_2 \rangle$ associée (à similarité près) à une algèbre de biquaternions $A = (a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2)$; dans ce cas, $PSO(q)$ est isomorphe au groupe $PGL(A)$ qui est une variété rationnelle. Le contre-exemple ci-dessous est donc de dimension minimale.

THÉORÈME II.2.1 [5]. — Il existe un corps k de dimension cohomologique 3 et une forme quadratique de rang 8 de discriminant signé 1 tels que $PSO(q)(k)/R \neq 1$. En particulier, la variété $PSO(q)$ n'est pas rationnelle.

On peut prendre aussi le corps $k = \mathbb{C}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ de dimension cohomologique 5. Quitte à ajouter des formes hyperboliques, le théorème produit des exemples en rangs pairs supérieurs. La méthode repose sur un calcul explicite avec des corps de séries formelles itérées, à la façon de Platonov [P], du groupe $G(q)/k^{\times 2}. \text{Hyp}(q)(k)$, quotient du groupe des facteurs de similitude par le groupe de normes de la quadrique projective X associée à q , c'est-à-dire le sous-groupe de k^\times engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour les extensions finies L/k satisfaisant $X(L) \neq \emptyset$. On utilise alors la cohomologie galoisienne des extensions multiquadratiques [ELTW] pour trouver des exemples explicites où $PSO(q)(k)/R \neq 1$.

Ce résultat fournit le premier exemple de groupe adjoint qui soit une forme interne de sa forme déployée et qui ne soit pas une variété k -rationnelle. Berhuy, Monsurro et Tignol

[BMT] ont donné récemment de tels exemples de groupes projectif-symplectiques (type C_n).

II.3. — Le problème de Veisfeiler-Tits

Il s’agit de la question suivante.

Question [Ve, T8]. *Soit G/k un groupe semi-simple absolument simple. Soient k_i/k une famille d’extensions finies de corps de degrés premiers entre eux. On suppose que G_{k_i} est déployé pour tout i . Le groupe G est-il déployé ?*

L’étude des principes de normes nous a permis de démontrer par une méthode uniforme les cas suivants, où les cas E_6 et E_7 sont nouveaux.

THÉORÈME II.3.1 [6]. — *Soit G un k -groupe algébrique connexe, semi-simple, absolument presque k -simple d’un des types A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7 . Soit $(k_i/k)_{i=1,\dots,r}$ une famille d’extensions finies de corps dont le pgcd des degrés est premier à l’ensemble $S(G)$ des entiers de torsion de G . Si les groupes G_{k_i} sont déployés ($i = 1, \dots, r$), alors le groupe G_k est déployé.*

Par ailleurs, la réponse est connue pour les groupes exceptionnels de type G_2 et F_4 . Seul le cas des groupes de type E_8 reste ouvert.

II.4. — Finitude de la R-équivalence pour les groupes réductifs définis sur les corps globaux

Le résultat principal de ma thèse est le théorème de finitude suivant.

THÉORÈME II.4.1 [5]. — *Soit G/k un groupe algébrique réductif défini sur un corps global k . Soit*

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\lambda} G \longrightarrow 1$$

un revêtement spécial, i.e. \tilde{G} est le produit d’un groupe semi-simple simplement connexe et d’un tore quasi-trivial. Soit $1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ . Alors l’application naturelle $H_{fppf}^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, S)$ induit une suite exacte de groupes

$$\tilde{G}(k)/R \longrightarrow G(k)/R \longrightarrow H^1(k, S) \longrightarrow 1,$$

et le groupe $G(k)/R$ est fini.

Cette suite exacte est établie avec le principe de norme. Il est à noter que la finitude du groupe $\tilde{G}(k)/R$ provient d’un théorème “ergodique” de Margulis [Mr]. Dans la partie arithmétique, on utilise la théorie du corps de classes avec un principe de Hasse de Kato et Saito [KS] et le cas des tores prouvé par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS1]. Dans presque tous les cas, le groupe $\tilde{G}(k)/R$ est trivial d’après des résultats de Platonov, Chernousov *et al* [PR §9, ChT, ChP].

COROLLAIRE II.4.2 [5]. — *Sous les hypothèses précédentes, on décompose $\tilde{G} = E \times \prod_i R_{k_i/k} \tilde{G}_i$ en facteurs simples avec E un k -tore quasi-trivial. Supposons de plus l'une des hypothèses suivantes vérifiées :*

- 1) *le corps k est un corps global de caractéristique $p > 0$, ou un corps de nombres imaginaire pur,*
- 2) *les facteurs simples anisotropes \tilde{G}_i/k_i sont soit d'un des indices ${}^1A_n, C_n$ ($n \geq 2$), 1D_n ($n \geq 4$), ${}^2D_n, E_7, E_8, F_4, G_2$, soit des groupes $SU(L_i/k_i, f)$ pour une forme hermitienne non dégénérée f pour l'extension quadratique L_i/k_i (indice 2A_n).*

Alors on a un isomorphisme $G(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S)$.

III. — Décomposition de Bruhat-Tits et arithmétique

Comme l'indique le Leiftaden, la théorie de Bruhat-Tits intervient de façon essentielle dans ce rapport et il est nécessaire d'en rappeler des éléments. Notre objectif est de décrire la décomposition de Bruhat-Tits dans le cas le plus simple (qui est essentiellement celui où on l'utilise), et d'indiquer comment la décomposition intervient dans notre étude du principe de Hasse sur $\mathbb{Q}(t)$.

III.1. — Immeubles affines et sous-groupes parahoriques

Soient K un corps complet pour une valuation discrète, O son anneau de valuation et k son corps résiduel. On note \tilde{K} l'extension non ramifiée maximale de K et \tilde{O} son anneau de valuation.

a) Sous-groupes parahoriques. Soit $G/\text{Spec}(\mathbb{Z})$ un schéma en groupe de Chevalley épinglé simplement connexe et presque simple. Rappelons qu'un épinglage est la donnée suivante [C2] :

- un \mathbb{Z} -tore maximal déployé $T/\text{Spec}(\mathbb{Z})$ de G ,
- un système de racines réduit irréductible $\Phi = \Phi(T, G) \subset \hat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (où $\hat{T} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-gr}}(T, \mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}})$ désigne le groupe des caractères de T) muni d'une base Δ définissant Φ^+ ,
- une famille de morphismes $(U_\alpha : \mathbb{G}_{a, \mathbb{Z}} \rightarrow G)_{\alpha \in \Phi}$ et un sous-groupe de Borel $B/\text{Spec}(\mathbb{Z})$ de G , tels que si l'on ordonne arbitrairement $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1, \dots, q}$, le produit sur G induit un isomorphisme de k -variétés

$$T \times \prod_{i=1, \dots, q} \mathbb{G}_a \xrightarrow{id \times \prod_{i=1, \dots, q} U_{\alpha_i}} B.$$

On note α_0 l'opposée de la racine maximale de Φ , $\hat{T}^0 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-gr}}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}}, T)$, $\Phi^\vee = (\alpha^\vee)_{\alpha \in \Phi} \subset \hat{T}^0$ le système de racines dual et $(\bar{\omega}_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ l'ensemble des poids fondamentaux, i.e. les éléments de $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ satisfaisant $\langle \omega_\alpha, \beta^\vee \rangle = \beta^\vee(\bar{\omega}_\alpha) = \delta_{\alpha, \beta}$. On note $V = \hat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $V' = \hat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ son dual. On rappelle qu'une racine affine $a = (\alpha, n)$ avec $\alpha \in \Phi$, $n \in \mathbb{Z}$ est la fonction affine $V \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(v) = \langle \alpha, v \rangle + n,$$

On considère l'ensemble de racines affines

$$\Delta_e = \{(\alpha, 0)\}_{\alpha \in \Delta} \cup \{(\alpha_0, 1)\},$$

qui est l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin complété de Δ . Les éléments de Δ_e définissent l'alcôve

$$C = \{ v \in V \mid a(v) > 0 \ \forall a \in \Delta_e \}.$$

Les sous-groupes parahoriques standard de $G(K)$ sont certains sous-groupes bornés abstraits de $G(K)$. Soit π une uniformisante de K . A toute partie non vide Ω de V , on associe le sous-groupe P_Ω de $G(K)$ comme le sous-groupe engendré par

$$T(O), U_\alpha(\pi^{n_\Omega(\alpha)}O) \quad (\alpha \in \Phi),$$

avec $n_\Omega(\alpha) = \text{Sup}\{[(\alpha, v)], v \in \Omega\}$. La théorie de Bruhat-Tits [BrT2] associe à toute partie bornée non vide Ω de V un schéma en groupes $\mathfrak{P}_\Omega/\text{Spec}(O)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- 1) $\mathfrak{P}_\Omega/\text{Spec}(O)$ est lisse,
- 2) $\mathfrak{P}_\Omega(O) = P_\Omega$,
- 3) $\mathfrak{P}_\Omega \times_O K = G_K$.

En particulier, si Θ est une partie non vide de Δ_e , on peut considérer le sous-groupe parahorique $\mathfrak{P}_\Theta/\text{Spec}(O)$ associé à

$$C(\Theta) = \{ v \in V \mid a(v) > 0 \ \forall a \in \Theta \}.$$

Le tore $T \times_{\mathbb{Z}} O$ est un O -tore maximal de \mathfrak{P}_Θ et les sous-schémas $(U_\alpha/K)_{\alpha \in \Phi}$ de G_K se prolongent en des O -schémas en groupes $\mathfrak{U}_{\Theta, \alpha} \subset \mathfrak{P}_\Theta$ (*loc. cit.*, §4.1). En particulier, si $\Theta = \Delta_e \setminus \Delta$, on a $\mathfrak{P}_\Theta/\text{Spec}(O) = G \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(O)$. Le groupe \mathfrak{P}_{Δ_e} est un sous-groupe d'Iwahori; les sous-groupes parahoriques $(\mathfrak{P}_\Theta/\text{Spec}(O))_{\Theta \subset \Delta_e}$ sont appelés les sous-groupes parahoriques standard de G_K ; les groupes abstraits $(\mathfrak{P}_\Theta(O))_{\Theta \subset \Delta_e}$ sont les sous-groupes parahoriques de $G(K)$ contenant le sous-groupe d'Iwahori $\mathfrak{P}_{\Delta_e}(O)$.

On note $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta/k$ la fibre spéciale de \mathfrak{P}_Θ qui est le groupe linéaire connexe engendré par le k -tore $k \times_{\mathbb{Z}} F$ et les $\overline{\mathfrak{U}}_{\Theta, \alpha}$ pour $\alpha \in \Phi$. On note $M_\Theta/k = (\overline{\mathfrak{P}}_\Theta)_{\text{red}}/k$, i.e le quotient de $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta$ par son radical unipotent, qui est isomorphe au sous-groupe de Levi de $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta/k$ engendré par T/k et les $\overline{\mathfrak{U}}_{\Theta, \alpha}$ pour $\alpha \in \Theta$.

Nous avons défini les sous-groupes parahoriques standards; il y a $r + 1$ (r est le rang de G) sous-groupes parahoriques maximaux. Les autres groupes parahoriques sont les conjugués par $G(K)$ de ces groupes.

b) Immeubles. L'immeuble de Bruhat-Tits \mathcal{I} de G/K est le complexe polysimplicial dont les sommets sont les sous-groupes parahoriques maximaux de $G(K)$ et une partie F de l'ensemble des sommets de F est l'ensemble des sommets d'un simplexe de \mathcal{I} si et seulement si l'intersection des $P \in F$ est un sous-groupe parahorique. Le groupe $G(K)$ opère sur \mathcal{I} et les stabilisateurs des simplexes de \mathcal{I} sont les sous-groupes parahoriques de $G(K)$. L'immeuble \mathcal{I} est un espace topologique contractile. L'exemple le plus simple est celui du groupe SL_2 sur le corps $\mathbb{F}_2((t))$, c'est l'arbre de Bruhat-Tits. Dans ce cas, on a

$$P_0 = SL_2(\mathbb{F}_2[[t]]) \text{ et } P_1 = \left(\begin{array}{cc} \mathbb{F}_2[[t]] & t\mathbb{F}_2[[t]] \\ t^{-1}\mathbb{F}_2[[t]] & \mathbb{F}_2[[t]] \end{array} \right) \cap SL_2(\mathbb{F}_2((t))).$$

L'immeuble \tilde{I} du groupe G/\tilde{K} est muni, outre l'action de $G(\tilde{K})$, de l'action du groupe de Galois \mathcal{G} .

III.2. — La décomposition

a) La décomposition de Bruhat-Tits est la bijection

$$\coprod_{\Theta \subset \Delta_e} H^1(k, M_\Theta)_{an} \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{K}/K, G).$$

La flèche $H^1(k, M_\Theta) \rightarrow H^1(K, G)$ est définie par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\text{ét}}(O, \mathfrak{P}_\Theta) & \rightarrow & H^1(K, G) \\ \downarrow \wr & & \\ H^1(k, \overline{\mathfrak{P}}_\Theta) & & \\ \downarrow \wr & & \\ H^1(k, M_\Theta) & & \end{array}$$

où la première flèche verticale est un isomorphisme d'après le lemme de Hensel. La seconde l'est aussi puisque le radical unipotent de $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta$ est k -groupe unipotent déployé. Comme dans le cas de l'injection $H^1(k, P) \rightarrow H^1(k, G)$ pour un sous-groupe parabolique P/k de G/k , l'injectivité de la flèche $H^1(k, M_\Theta) = H^1(\mathcal{G}, P_\Theta(\tilde{O})) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, G(\tilde{K}))$ est due au fait que $P_\Theta(\tilde{O}) = N_{G(\tilde{K})}(P_\Theta(\tilde{O}))$. L'injectivité de la somme est une conséquence immédiate de la correspondance parahoriques-paraboliqes, c'est-à-dire la correspondance bijective entre sous-groupes parahoriques de \mathfrak{P}_Θ et sous-groupes paraboliques de M_Θ . La surjectivité est vraiment le point central du lien entre cohomologie galoisienne et immeubles. En effet, soit z_s un 1-cocycle de \mathcal{G} à valeurs dans $G(\tilde{K})$. On définit l'action tordue du groupe \mathcal{G} sur l'immeuble \mathcal{I} par

$$s * x = z_s \cdot^s x \quad (x \in I).$$

Comme \mathcal{G} est un groupe compact et que \tilde{I} est un espace à courbure négative (précisément $CAT(0)$), il existe un point fixe x de \mathcal{I} pour l'action tordue de \mathcal{G} . Il existe $\theta \in C$ satisfaisant $x = g \cdot \theta$. Quitte à remplacer z_s par $z'_s = g^{-1} z_s \cdot^s g$, on peut donc supposer que $x = \theta$ et donc que

$$z_s \cdot \theta = \theta \quad (s \in \mathcal{G}).$$

Ainsi z provient de $P_\theta(\tilde{O}) = P_\Theta(\tilde{O})$ pour une partie Θ de Δ .

b) Partie sauvage. Si $\text{car}(K) = 0$, alors $K = k((t))$ et $cd(\tilde{K}) = 1$; on a alors $H^1(\tilde{K}, G) = 1$ d'après le théorème de Steinberg [St]. L'ensemble $H^1(K, G) = H^1(\tilde{K}/K, G)$ s'explique alors avec la décomposition de Bruhat-Tits. En général, $H^1(\tilde{K}, G) \neq 1$, et la section VI donnera des exemples de tels phénomènes sauvages qui ne concernent que les mauvaises caractéristiques pour le groupe G .

III.3. — Une application arithmétique

On suppose ici que k est un corps de nombres, Ω l'ensemble de ses places et k_v le complété de k à la place v . Si G/k est un groupe algébrique linéaire et C/k une courbe algébrique intègre de corps de fonctions $k(C)$, on s'intéresse aux défauts du principe de Hasse

$$\begin{aligned} \text{III}^1(k, G) &= \text{Ker} \left[H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, G) \right] \quad \text{et} \\ \text{III}^1(k(C), G) &= \text{Ker} \left[H^1(k(C), G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v(C), G) \right]. \end{aligned}$$

THÉORÈME III.3.1 [10]. — *Soit G/k un groupe semi-simple connexe. Soit $G' \rightarrow G$ le revêtement universel de G de noyau B . On note*

$$\text{III}^2(k(t), B) = \text{Ker} \left[H^2(k(t), B) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^2(k_v(t), B) \right].$$

a) *L'application*

$$\text{III}^1(k(t), G) \xrightarrow{\delta} \text{III}^2(k(t), B),$$

définie par ce revêtement, est une injection et identifie l'ensemble $\text{III}^1(k(t), G)$ à un sous-groupe de $\text{III}^2(k(t), B)$.

b) *Soit G/k un groupe semi-simple connexe appartenant à une des familles suivantes*

- i) les groupes simplement connexes,*
- ii) les groupes adjoints,*
- iii) les groupes absolument presque simples,*
- iv) les groupes déployés par une extension métacyclique et leurs formes internes.*

Alors

$$\text{III}^1(k(t), G) = 1.$$

Le groupe $\text{Im}(\delta)$ est en général ni fini, ni d'indice fini dans $\text{III}^2(k(t), B)$. L'origine de cette étude provient d'une question de Colliot-Thélène qui souhaitait une généralisation du cas du groupe orthogonal pour lequel on a une injection de groupes de Witt [CTCS]

$$W(k(t)) \hookrightarrow \prod_{v \in \Omega} W(k_v(t)).$$

Donnons une idée de la démonstration lorsque G/k est simplement connexe et absolument presque k -simple. On utilise la décomposition de Bruhat-Tits et le principe de Hasse pour les espaces homogènes complets (Harder [H4]) afin de démontrer l'assertion locale

suivante : la restriction $\ell : H^1(k, G) \rightarrow H^1(k((t)), G)$ induit une bijection $\text{III}^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \text{III}^1(k((t)), G)$, i.e. une bijection

$$\text{Ker} \left[H^1(k, G) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, G) \right] \xrightarrow{\sim} \text{Ker} \left[H^1(k((t)), G) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v((t)), G) \right].$$

En effet, dans le cas particulier où G est déployé, on est ramené à l'étude du principe de Hasse pour le groupe $H^1(k, M_\Theta)$ selon la décomposition de Bruhat-Tits. Pour passer du local au global, on remarque qu'en tout point M de la courbe C , le complété de $k(C)$ en M est k -isomorphe à un corps $l((t))$ avec l/k finie, on voit ainsi suivant le lemme de recollement de Harder [H2, lemme 4.1.3] qu'une classe de $\text{III}^1(k(C), G)$ s'étend à toute la courbe, c'est-à-dire provient de $H^1(C, G)$. Lorsque $C = \mathbb{P}_k^1$, on sait que l'image de $H^1(\mathbb{P}_k^1, G) \rightarrow H^1(k(t), G)$ consiste en les classes constantes $H^1(k, G)$ [H3] et cela produit une bijection $\text{III}^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \text{III}^1(k(t), G)$.

IV. — Propriétés infinitésimales de l'invariant de Rost

L'invariant de Rost, apparu en 1991-92, constitue un progrès important pour la cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires. Nous en avons étudié certains aspects en vue d'applications à la conjecture II et aux éléments d'ordre fini.

IV.1. — Origine et définitions de l'invariant de Rost

a) Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k -simple. Pour tout nombre premier l inversible dans k , Rost a défini un invariant

$$r_{l,F} : H^1(k, G) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)),$$

où $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$ désigne le faisceau galoisien $\varinjlim \mu_{l^r}^{\otimes 2}$ [R1,R2,Se3]. Cet invariant était attendu par Serre [Se2]. On suppose $\text{car}(k) = p > 0$; la théorie cohomologique dite de De Rham-Witt (et ses aspects galoisiens développés par Kato et Bloch-Kato) produit un analogue en caractéristique positive du faisceau galoisien $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$, noté $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$, qui est un complexe de faisceaux galoisiens concentré en degré 2, dont on peut considérer l'hypercohomologie. Dans son exposé au séminaire Bourbaki [Se3], Serre suggère l'emploi de l'objet $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$ pour définir la partie p -primaire de l'invariant, et réalise un tel invariant en caractéristique 2 pour le groupe déployé de type G_2 ; le cas de F_4 en caractéristique 3 a été ensuite traité par Petersson-Racine [PeR]. La construction générale de l'invariant

$$r_{p,F} : H^1(k, G) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$$

est due à Esnault, Kahn, Levine et Viehweg [EKLv]. Notant $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \bigoplus_{l \neq p} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2) \oplus \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$, cette construction donne donc lieu à un invariant, l'invariant de Rost de G/k noté $r_k : H^1(k, G) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

La partie l -primaire de l'invariant peut être définie de façon plus simple avec la cohomologie étale à coefficients $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$ (cf. [Se3]). Nous avons établi que les deux définitions les plus employées de l'invariant de Rost pour la partie modérée (selon Rost, il en existe quatre autres!) coïncident, de façon précise, elles diffèrent d'un entier universel premier à l [11, lemme 6]. L'invariant de Rost est donc une construction générale qui comprend les deux exemples fondamentaux suivants.

1) L'invariant de Merkurjev-Suslin [MS] : Si D/k est une algèbre simple centrale, l'invariant du groupe $SL_1(D)$, c'est-à-dire la flèche $k^\times / Nrd(D^\times) = H^1(k, SL_1(D)) \rightarrow H^3(k)$, est le cup-produit par $[D] \in Br(k) = H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$.

2) L'invariant de Rost du groupe déployé $Spin_{2n}$ est l'invariant d'Arason; en utilisant la flèche $H^1(k, Spin_{2n}) \rightarrow H^1(k, SO_{2n}) \rightarrow W(k)$, on voit aisément qu'elle définit une flèche $H^1(k, Spin_{2n}) \rightarrow I^3(k)/I^4(k)$ et l'invariant de Rost est alors le composé $H^1(k, Spin_{2n}) \rightarrow I^3(k)/I^4(k) \xrightarrow{e_3} H^3(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec le morphisme e_3 d'Arason [A].

b) Lien avec les extensions centrales de Brylinski-Deligne

La functorialité de l'invariant de Rost pour un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ simplement connexes (et absolument presque simples) est donnée par l'indice de Dynkin d_f du morphisme f , i.e on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, G) & \rightarrow & H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\ f_* \downarrow & & \times d_f \downarrow \\ H^1(k, G') & \rightarrow & H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). \end{array}$$

L'entier d_f est un entier géométrique donné par le morphisme $f^* : \mathbb{Z} = H_{Zar}^1(G', \mathcal{K}_2) \rightarrow H_{Zar}^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ et qui est lié aux représentations de G et G' .

A partir du générateur canonique de $H_{Zar}^1(G, \mathcal{K}_2)$, Brylinski et Deligne [BD] ont construit une extension centrale

$$0 \rightarrow K_2(k) \rightarrow \mathcal{E}_k \rightarrow G(k) \rightarrow 1,$$

fonctorielle en G (avec la même functorialité) et en k . Soit k'/k une extension galoisienne de groupe \mathfrak{g} . L'extension de groupes abstraits

$$0 \rightarrow K_2(k') \rightarrow \mathcal{E}_{k'} \rightarrow G(k') \rightarrow 1,$$

est \mathfrak{g} -équivariante. Prenant la suite exacte longue de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte ci-dessus, on définit l'invariant

$$\rho_k^{k'} : H^1(\mathfrak{g}, G(k')) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, K_2(k')).$$

Nous avons établi [11, lemme 5] que cet invariant dérive de l'invariant de Rost suivant le diagramme (-1) -commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g}, G(k')) & \xrightarrow{r_k} & \text{Ker}(H^3(k) \rightarrow H^3(k')), \\ & \searrow \rho_k^{k'} & \downarrow a_k^{k'} \\ & & H^2(\mathfrak{g}, K_2(k')) \end{array}$$

où $a_k^{k'}$ est la flèche introduite par Kahn dans [K1]. Ceci est particulièrement intéressant en caractéristique $p > 0$ car $a_k^{k_s}$ est un isomorphisme sur la partie p -primaire.

IV.2. — Relèvement en caractéristique nulle

Soit K un corps complet pour une valuation discrète d'anneau de valuation O et de corps résiduel k (non supposé parfait). Nous avons établi une propriété de relèvement pour l'invariant de Rost.

THÉORÈME IV.2.1 [11]. — *Soient G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k -simple. Alors, pour tout O -schéma en groupes \mathfrak{G} semi-simple simplement connexe de fibre spéciale isomorphe à G/k , il existe un automorphisme $h : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(K, \mathfrak{G}_K) & \xrightarrow{r_K} & H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\
 \ell \uparrow & & \uparrow i_F^K \circ h_* \\
 H_{\text{ét}}^1(O, \mathfrak{G}) & & \\
 \wr \downarrow & & \\
 H^1(k, G) & \xrightarrow{r_k} & H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))
 \end{array}$$

commute. Si $\text{car}(k) = \text{car}(K)$, $h = \text{id}$ convient. Si $\text{car}(k) = p > 0$ et $\text{car}(K) = 0$, $h = -\text{id}$ convient sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Donnons quelques précisions sur les flèches du diagramme ci-dessus. Le lemme de Hensel fournit l'isomorphisme $H_{\text{ét}}^1(O, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\sim} H^1(k, G)$ permettant ainsi de relever $H^1(k, G)$ dans $H^1(K, \mathfrak{G}_K)$, puisque d'après Bruhat–Tits [BrT3], l'application $\ell : H_{\text{ét}}^1(O, \mathfrak{G}) \rightarrow H^1(K, \mathfrak{G}_K)$ est une injection. Par ailleurs, suivant Kato [Ka1], le groupe $H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ se relève dans $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par un morphisme injectif $i_F^K : H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Pour la partie sauvage, la preuve du théorème IV.2.1 est une conséquence du diagramme (*) du §4.1.

L'intérêt d'un tel diagramme est de pouvoir déduire des résultats en caractéristique positive de résultats connus en caractéristique nulle, comme l'a fait par exemple Kato pour l'étude des formes quadratiques en caractéristique 2 [Ka2]. En effet, si l'invariant $r_K : H^1(K, \mathfrak{G}_K) \rightarrow H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ a un noyau trivial (resp. est injectif) pour le groupe \mathfrak{G}_K , alors l'invariant $r_k : H^1(k, G) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ a un noyau trivial (resp. est injectif). Cela s'applique aux groupes exceptionnels (quasi)-déployés de type G_2 , F_4 , E_6 , et E_7 [Ga]. Remarquons que l'injectivité de l'invariant pour G_2 en caractéristique 2 est dû à Serre ([Se3], th. 11) et que ce résultat est en fait le point de départ de du théorème IV.2.1. Appliquant le théorème au groupe $SL_1(D)$, on peut donner en caractéristique positive un analogue à des résultats de Merkurjev–Suslin sur les normes réduites [Su].

THÉORÈME IV.2.2 [11]. — *Supposons $\text{car}(k) = p > 0$.*

a) *Soient $a \in k$, $b \in k^\times$. On note $D = [a, b]_k$ l'algèbre simple centrale définie par les relations suivantes $X^p - X = a$, $Y^p = b$, $YXY^{-1} = X + 1$. Pour tout $c \in k^\times$, il y a équivalence entre les assertions*

- 1) $[a.db/b \wedge dc/c] = 0 \in H^3(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2))$,
- 2) $c \in \text{Nrd}(D^\times)$.

b) Si D/k est une algèbre simple centrale d'indice n sans facteurs carrés, le morphisme

$$r : k^\times / \text{Nrd}(D^\times) \longrightarrow H^3(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

est injectif.

IV.3. — Le résidu de l'invariant de Rost

Selon une suggestion de Serre [Se2], on se propose de calculer le résidu de l'invariant de Rost, c'est-à-dire le composé $H^1(\tilde{K}/K, G) \xrightarrow{r_K} \text{Ker}(H^3(K) \rightarrow H^3(\tilde{K})) \xrightarrow{\partial} \text{Br}(k)$ pour un groupe semi-simple simplement connexe G/K , où ∂ est la flèche de résidu habituelle [Se1, p. 120] dans le cas modéré, et qui est définie aussi sur la partie sauvage par Kato [Ka1].

THÉORÈME IV.3.1 [11]. — Soit G/K un groupe simplement connexe absolument presque K -simple, déployé par \tilde{K} . Soit $\mathfrak{P}/\text{Spec}(O)$ un sous-groupe parahorique de G .

a) $CH^2(\mathfrak{P}) = 0$.

b) On note $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \times_O F$ la fibre fermée, et $M/k = \overline{\mathfrak{P}}_{\text{red}}$. Soit

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 1$$

la suite exacte de groupes algébriques associée dans [11, th. 3']. Cette suite exacte donne lieu à une application de bord $\delta : H^1(k, M) \rightarrow \text{Br}(k)$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, G(\tilde{K})) & \xrightarrow{r_K} & H_{nr}^3(K) \\ \uparrow & & \downarrow \\ H^1(O, \mathfrak{P}) & & \partial_K \\ \downarrow \wr & & \\ H^1(\mathcal{G}, \overline{\mathfrak{P}}(\tilde{F})) & & \\ \wr \downarrow & & \\ H^1(k, M) & \xrightarrow{\delta} & \text{Br}(k) \end{array}$$

est commutatif, à une diagonale de signes près.

Le b) est une conséquence formelle de l'assertion a) et du diagramme (*) du §4.1; la preuve du a) est largement inspirée de l'article [PrR] de Prasad-Raghunathan qui traite des extensions centrales des groupes p -adiques.

Une conséquence de ce théorème est la non-trivialité du noyau de l'invariant de Rost du groupe déployé E_8 .

PROPOSITION IV.3.2 [14]. — Soit k un corps de caractéristique nulle tel qu'il existe une forme de Pfister anisotrope de rang 16. Alors le noyau de l'invariant de Rost

$$r_{E_8} : H^1(k((t)), E_8) \rightarrow H^3(k((t)))$$

est non trivial.

V. — Progrès sur la conjecture II

Tout d'abord, nous rappelons la généralisation de la conjecture II de Serre [Se3] qui est plus forte pour la caractéristique positive. Pour cela, on définit la l -dimension séparable $\dim_l^{sep}(k)$ selon

- 1) si $\text{car}(k) \neq l$, $\dim_l^{sep}(k) = cd_l(k)$,
 - 2) si $p = \text{car}(k)$, $\dim_l^{sep}(k) = \text{Inf}\{r \geq 0 \mid H_p^{r+1}(k') = 0 \ \forall k'/k \text{ séparable finie}\}$,
- où $H_p^{q+1}(k) = H^1(k, \Omega_{k_s, \log}^q)$ désigne le groupe de cohomologie de Kato du faisceau galoisien des q -formes différentielles logarithmiques [I, Kal].

CONJECTURE II. — *Soit G/k semi-simple simplement connexe. Pour tout premier $l \in S(G)$, on suppose $\dim_l^{sep}(k) \leq 2$. Alors $H^1(k, G) = 1$.*

Selon Merkurjev-Suslin [Su], les corps de dimension cohomologique ≤ 2 sont caractérisés par la surjectivité des normes réduites. Utilisant le théorème IV.2.1, nous avons généralisé ce critère à la caractéristique positive.

THÉORÈME V.0.1 [11]. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) $\dim_l^{sep}(k) \leq 2$;
- b) *Pour toute extension séparable finie E/k et pour toute algèbre simple centrale l -primaire D/E , la norme réduite $\text{Nrd} : D^\times \rightarrow E^\times$ est surjective.*

V.1. — Résultats

Nous présentons nos résultats type par type pour G/k satisfaisant les hypothèses de la conjecture II.

THÉORÈME V.1.1 [12]. — a) *Si G/k est quasi-déployé sans facteur de type E_8 , alors $H^1(k, G) = 1$.*

b) *Si le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(k_s/k)$ est un pro- l -groupe (l premier), alors $H^1(k, E_8) = 1$.*

c) *Soit E/k une extension cyclique de corps de degré 2, 3 ou 5. Alors $H^1(E/k, E_8) = 1$.*

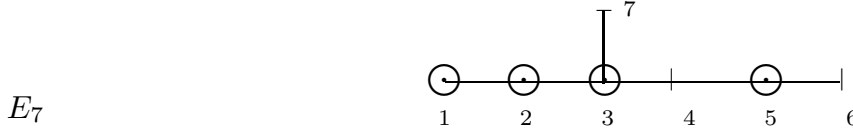
d) *On suppose $\text{car}(k) \neq 2$ et G de type ${}^{3,6}D_4$. On note L/k l'extension étale cubique associée à la forme quasi-déployée de G . Si l'algèbre d'Allen de G est d'indice 2, alors $H^1(k, G) = 1$ et le groupe G admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 3, 4\}$.*

e) *Si G/k est de type 1E_6 et si l'algèbre de Tits de G est d'indice 1 ou 3, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, si l'algèbre de Tits de G est d'indice 3, alors $H^1(k, G) = 1$ et G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$*



f) Si G/k est de type 2E_6 et si l'algèbre de Tits de G est d'indice 1 ou 3, alors $H^1(k, G) = 1$ et G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$.

g) Si G est de type E_7 et son algèbre de Tits est d'indice 1 ou 2, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{4, 6, 7\}$



h) Si G est de type E_7 et son algèbre de Tits est d'indice 4, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Remarque 1 : En se restreignant aux bonnes caractéristiques, Chernousov a démontré ces résultats par d'autres méthodes [Ch3, Ch4]. Ensuite, le point a) pour les groupes exceptionnels de type E_6 et E_7 est une conséquence immédiate d'un résultat récent de Garibaldi sur la trivialité du noyau de l'invariant de Rost pour ces groupes [Ga].

Remarque 2 sur E_8 : L'assertion b) est une conséquence immédiate du c). On ignore si un groupe de type E_8 est déployé par une extension résoluble de degré $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ (voir § VII). De plus, une réponse positive au problème de Veisfeiler-Tits (§ II.3) donnerait la conjecture II pour le groupe E_8 .

Remarque 3 sur les groupes de type ${}^{3,6}D_4, {}^{1,2}E_6, E_7$: On voit que la conjecture est démontrée pour les groupes dont les algèbres de Tits ont des indices petits. En général, il existe des groupes définis sur des corps de dimension cohomologique 2 de type ${}^{3,6}D_4$ (resp. ${}^{1,2}E_6, E_7$) dont les algèbres de Tits sont d'indices 8 (resp. 27, 8). C'est une conséquence de la théorie de la réduction de l'indice [M3, M4].

Remarque 4 : En ce qui concerne la caractéristique positive, nos résultats sont pour l'instant exclusifs et reposent sur la caractérisation IV.2.2 des corps de dimension ≤ 2 .

V.2. — Méthodes. Nous supposons ici G simple et quasi-déployé (et k de caractéristique nulle pour simplifier). L'idée de départ pour démontrer la conjecture II est issue du théorème de Steinberg [St] disant que toute classe de $H^1(k, G)$ provient d'un tore maximal T , c'est-à-dire appartient à l'image de $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$. Ensuite, on essaie de montrer que cette application se factorise par la R -équivalence, i.e. induit une flèche $H^1(k, T)/R \rightarrow H^1(k, G)$. Enfin on espère pouvoir se ramener au cas par cas à un tore T satisfaisant $H^1(k, T)/R = 1$ (ce dernier groupe est en général non nul [12, § 4.1]). On va décrire ici le cas favorable qui permet de donner l'idée principale, c'est-à-dire lorsque le corps k satisfait à la condition suivante (qu'il semble raisonnable de conjecturer pour tout corps de dimension cohomologique ≤ 2).

Propriété d'annulation par changement de base. Soit $\alpha \in H^3(k(t))$. Soient t_0, t_1 des points fermés de $\mathbb{P}^1(k)$ qui ne sont pas des pôles de α . Alors il existe une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ non constante et des points t'_0, t'_1 de $\mathbb{P}^1(k)$ satisfaisant $f^*(\alpha) \in H^3(k)$, $f(t'_0) = t_0$ et $f(t'_1) = t_1$.

Cette propriété est inspirée par la question de Serre ([Se1], question 6.2 p. 124, voir aussi [Me]) sur l'annulation par changement de base d'éléments de ${}_2Br(k(t))$. Si cette propriété

est satisfaite, on procède de la façon suivante. On considère une classe $\beta(t) \in H^1(k(t), T)$ sans pôles en 0 et 1 satisfaisant $\alpha(0) = 0$. Alors $\beta(1) \in RH^1(k, T)$. On considère le composé

$$H^1(k(t), T) \xrightarrow{i_*} H^1(k(t), G) \xrightarrow{r_{k(t)}} H^3(k(t))$$

et on applique la propriété à l'image $\alpha(t)$ de $\beta(t)$; il existe une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ satisfaisant $f^*(\alpha) \in H^3(k) = 0$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Alors $i_*\beta(f(t))$ a un invariant de Rost nul; par un argument de récurrence sur les types de groupes et utilisant le théorème IV.3.1 reliant invariant de Rost et théorie de Bruhat-Tits, on montre que la classe $i_*\beta(f(t)) \in H^1(k(t), G)$ est régulière [12, lemme 11], donc provient suivant un lemme de Harder [H2] de $H^1(\mathbb{P}_k^1, G)$ et donc est constante suivant [H3]. En spécialisant en 0, il résulte que $i_*\beta(f(t)) = 0$ et en spécialisant en 1, on voit que $i_*(\alpha(1)) = i_*\beta(f(1)) = 0$.

En général, on ne sait pas montrer cette propriété, mais on arrive à montrer que la flèche $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ est nulle sur certains sous-groupes de $RH^1(k, T)$.

V.3. — Corps de nombres et corps géométriques de dimension 2

a) Corps de nombres imaginaires purs. Pour ces corps, la propriété ci-dessus vaut et ainsi, la flèche $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ est nulle sur $RH^1(k, T)$. On utilise ensuite la rationalité de la variété des tores (approximation faible) à la manière de Harder pour montrer que l'on peut essentiellement se ramener au cas d'une classe provenant de $RH^1(k, T)$ (le défaut $H^1(k, T)/R$ est un groupe fini). Cette méthode permet de donner une preuve relativement uniforme (l'étude sur les tores se fait cas par cas) du principe de Hasse pour les groupes quasi-déployés. Il est à noter que Kunyavskii et Skorogobatov [KS] ont montré que les groupes semi-simples simplement connexe ou adjoints satisfont à l'approximation faible en utilisant un argument sur les tores maximaux de tels groupes, dû à Klyachko [Kl].

b) Corps géométriques de dimension 2. Plus généralement (et sans utiliser la propriété d'annulation par changement de base), le théorème V.1.1 implique le

COROLLAIRE V.3.1 [18]. — *On suppose $\text{car}(k) = 0$ et on note k^{ab} l'extension abélienne maximale de k . Soit G/k un groupe satisfaisant les hypothèses de la conjecture II.*

a) On suppose que pour toute extension finie k'/k et toute algèbre simple centrale D/k' d'exposant 2 ou 3, indice et exposant de D coïncident. Si G n'a pas de facteur de type E_8 , alors $H^1(k, G) = 1$.

b) Si $cd(k^{ab}) \leq 1$, alors $H^1(k, E_8) = 1$.

c) S'il existe une extension procyclique L/k satisfaisant $cd(L) \leq 1$, alors $H^1(k, G) = 1$.

Ceci concerne les corps K des types suivants :

- (gl) Un corps de fonctions K de deux variables sur le corps k_s , c'est-à-dire le corps des fonctions $K = k_s(X)$ d'une surface connexe, projective et lisse X sur le corps k_s ;
- (ll) Le corps des fractions K d'un anneau local A , excellent, intègre, strictement hensélien de dimension deux, de corps résiduel k_s , un tel corps est de dimension cohomologique 2 suivant Gabber-Kato (cf. [Sai]);

- (sl1) Un corps $K = l((t))$, corps de séries formelles d'une variable sur un corps l de dimension cohomologique 1. On s'intéresse principalement aux cas où l est soit le corps des fonctions d'une courbe sur k_s , soit le corps des séries formelles en une variable $k_s((u))$; dans ces cas le corps l est même C'_1 (Tsen, Lang; voir [Pf]);
- (sl2) Un corps $K = k_s((t))(C)$, corps de fonctions d'une courbe algébrique $C/k_s((t))$;

En effet, suivant la décomposition de Bruhat-Tits, la conjecture II est satisfaite pour les corps de type (sl1). Les corps de type (gl), (sl1) et (sl2) sont C'_2 , selon Artin *et al.* [Ar1, Ar2], indices et exposants coïncident pour les algèbres d'exposants 2 ou 3-primaires. Pour les corps de type (ll), cela est vrai en général suivant un théorème de Colliot-Thélène-Parimala-Ojanguren. Les corps K de type (sl1), (sl2) satisfont $cd(K^{ab}) \leq 1$ donc la conjecture II vaut pour les corps de type (sl2).

V.4. — Application à la R-équivalence sur les groupes réductifs

THÉORÈME V.4.1 [12]. — Soit $G'/k \rightarrow G/k$ une isogénie spéciale de groupes réductifs de noyau le k -groupe de type multiplicatif μ , i.e. G' est le produit direct d'un groupe semi-simple simplement connexe et d'un tore quasi-trivial. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leq 2$ pour tout $p \in S(G)$. Alors l'application caractéristique $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ est surjective, et on a une suite exacte naturelle de groupes

$$G'(k)/R \longrightarrow G(k)/R \longrightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)/R \rightarrow 1.$$

Soit $1 \rightarrow \mu \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ (F tore flasque, P tore quasi-trivial; [CTS2] ligne (0.6.2)). Alors le groupe $H_{fppf}^1(k, \mu)/R$ est isomorphe au groupe $H^1(k, F)$. Ce groupe est fini pour des corps K de type (ll), (sl) ou (gl). De plus, suivant Chernousov et Platonov [ChP], les groupes simplement connexes (sans facteurs de type E_8 dans le cas gl) G/K sont des variétés rationnelles. On en déduit le

COROLLAIRE V.4.2 [18]. — Soit K un corps de type (ll), (sl1) ou (gl). Soit G un K -groupe linéaire connexe, supposé sans facteur de type E_8 si K est de type (gl). Alors le groupe $G(K)/R$ est un groupe abélien fini isomorphe à $H^1(K, \mu)/R$.

VI. — Conjectures de Tits sur les unipotents. Éléments d'ordre fini des groupes

Nous expliquons maintenant comment nos résultats de la section V ont permis de démontrer les deux conjectures de Tits sur les unipotents (cf. §I.4.b).

VI.1. — Sous-groupes unipotents

On suppose $\text{car}(k) = p > 0$. Soit G/k un groupe réductif. Alors tout élément d'ordre p de $G(k)$ est unipotent. Un sous-groupe U de $G(k)$ est dit unipotent s'il est formé d'unipotents. Si k est algébriquement clos, tout sous-groupe unipotent U est contenu dans le radical unipotent d'un k -sous-groupe parabolique de G , on dit alors que U est bon. Si k n'est pas algébriquement clos, cela n'est plus vrai; par exemple, si $p = 2$, et $a \in k^\times \setminus k^{\times 2}$, l'élément $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $PGL_2(k)$ d'ordre 2 n'appartient pas à un sous-groupe de Borel. Nous avons démontré le résultat suivant conjecturé par J. Tits [T9].

THÉORÈME VI.1.1 [13]. — *On suppose $[k : k^p] \leq p$ et G semi-simple simplement connexe. Alors tout sous groupe unipotent de $G(k)$ est k -plongeable dans le radical unipotent d'un k -sous-groupe parabolique de G .*

Le cas $p = 2$ est dû à Tits [T4, §4.5]. Cela était connu pour le cas où p n'est pas un premier de torsion de G et pour les types A_n et C_n (*loc. cit.*, §3.5 et §4.4). Par ailleurs, la condition $[k : k^p] \leq p$ est nécessaire comme le montre le résultat suivant.

THÉORÈME VI.1.2 [T9, prop. S1] et [T10, th. 7]. — *On suppose G semi-simple simplement connexe déployé et presque simple. Si $[k : k^p] \geq p^2$ et p divise l'indice de Dynkin d_G de G , alors le groupe $G(k)$ contient un élément unipotent k -mauvais d'ordre p .*

Nous avons aussi établi la seconde conjecture de Tits [T4].

THÉORÈME VI.1.3 [13] (et [14] pour E_8 et $p = 5$). — *On suppose que G/k est déployé et presque simple. Soit α un automorphisme anisotrope d'ordre p de G , c'est-à-dire ne normalisant aucun k -sous-groupe parabolique propre de G . Alors α normalise un k -tore déployé maximal de G .*

Les cas $p = 2$ (pour tous les types), $p = 3$ et G de type D_4 ou E_6 , et le type A_n sont dûs à Tits [T4]. Nous nous sommes risqués à conjecturer un résultat analogue dans le cas modéré pour un premier l premier à la caractéristique de k .

CONJECTURE VI.1.4 [13]. — *On suppose que G/k est déployé et presque simple et que k contient une racine primitive l -ième de l'unité. Soit α un automorphisme anisotrope d'ordre l de G . Alors α normalise un k -tore déployé maximal de G .*

Nous avons démontré cette conjecture [13] excepté un seul cas, le cas $l = 5$ et $G = E_8$ que l'on discute dans la section V.3.

VI.2. — Lien avec la cohomologie galoisienne

Soit g un élément d'ordre l premier de $G(k)$. Soit $K = k((t))$, soit K_s une clôture séparable et $K_{mod} \subset K_s$ l'extension modérément ramifiée maximale de K . Soit L/K une extension cyclique d'ordre p (resp. l) totalement ramifiée, d'anneau de valuation O_L par exemple, donnée par l'équation d'Artin-Schreier $X^p - X = \frac{1}{t}$ si $l = p$ (resp. l'extension de Kummer $X^l = t$ si $l \neq p$). Soit σ un générateur de $\Gamma = \text{Gal}(L/K)$ et soit $\chi \in \text{Hom}_c(\text{Gal}(K_s/K), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = H^1(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ le caractère correspondant à L/K . On définit le 1-cocycle f_g à valeurs dans $G(k)$ par $f_g(\sigma^i) = g^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. On définit la classe de cohomologie galoisienne

$$\gamma_\chi(g) := g_*(\chi) \in H^1(\Gamma, G(L)) \subset H^1(K, G),$$

qui est représentée par le cocycle f_g . Cette classe a les propriétés suivantes.

PROPOSITION VI.2.1 [13]. — *a) On suppose $l = p$, i.e g est unipotent. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) g est k -bon, i.e. g appartient au radical unipotent d'un k -groupe parabolique de G/k ,

ii) $\gamma_\chi(g) = 1$ dans $H^1(K, G)$,

iii) $\gamma_\chi(g)_{K_{mod}} = 1 \in H^1(K_{mod}, G)$,

où K_{mod} désigne la clôture modérément ramifiée de K .

b) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) g est k -anisotrope, i.e. n 'appartient à aucun k -sous-groupe parabolique propre de G ,
- ii) le groupe tordu ${}_f G/K$ est K -anisotrope.

c) On suppose g k -anisotrope. Soit g' un élément d'ordre l de $G(k)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) g' est $G(k)$ -conjugué à g ,
- ii) $\gamma_\chi(g) = \gamma_\chi(g')$ dans $H^1(K, G)$.

Cette proposition, fondée sur la théorie de Bruhat-Tits, permet de ramener des questions sur les éléments d'ordre fini de $G(k)$ à des questions de cohomologie galoisienne.

Les cas connus de la conjecture II en caractéristique $p > 0$ permettent de démontrer le théorème VI.1.1. En effet, supposons $[k : k^p] \leq p$ et G/k simplement connexe. Soit U un sous-groupe unipotent de $G(k)$. D'après des réductions dues à Borel-Tits (proposition 3.1 de [BoT2] et cor. 3.3 de [T4]), on peut supposer que $k = k_s$ et que U est engendré par un élément u d'ordre p . On sait suivant Kato [Ka1] que $\dim_p^{sep}(K) \leq 2$. Comme le groupe d'inertie sauvage $\text{Gal}(K_s/K_{mod})$ est un pro- p -groupe, le théorème V.1.1 entraîne

$$H^1(K_{mod}, G) = 1.$$

La proposition VI.2.1 montre alors que l'élément u est k -plongeable dans le radical unipotent d'un k -sous-groupe parabolique de G .

VI.3. — Un invariant des éléments d'ordre fini

On suppose que G/k est semi-simple simplement connexe déployé et presque simple. Le groupe $G(k)$ est presque simple et a fortiori parfait [C1]. Matsumoto a démontré que $H_2(G(k), \mathbb{Z}) = K_2(k)$ et ainsi on dispose de l'extension centrale de Steinberg–Matsumoto [Ma, th. 5.10]

$$(\mathcal{E}) \quad 0 \rightarrow K_2(k) \rightarrow St(G, k) \rightarrow G(k) \rightarrow 1,$$

où $St(G, k)$ désigne le groupe de Steinberg de G et de k . On note $[\mathcal{E}] \in H^2(G(k), K_2(k))$ la classe de cette extension universelle. Soit $g \in G(k)$ un élément unipotent d'ordre n , que l'on voit comme un morphisme $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G(k)$. On définit l'obstruction $M_G(g) \in K_2(k)/gK_2(k)$ par

$$M_G(g) := g^*([\mathcal{E}]) \in H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, K_2(k)) = K_2(k)/nK_2(k).$$

Le lien entre la partie précédente et la présente est fait par l'invariant de Rost, car si g est d'ordre l , on a la formule

$$r_K(\gamma_\chi(u)) = \chi \cup M_G(u) \text{ dans } H_p^3(K) \subset H^3(K).$$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE VI.3.1 [14]. — *Supposons que l'invariant de Rost*

$$r_{K_{mod}} : H^1(K_{mod}, G) \rightarrow H^3(K_{mod})\{p\}$$

a un noyau trivial. Alors pour tout élément unipotent u d'ordre p les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $M_G(u) = 0$ dans $K_2(k)/pK_2(k)$,*
- ii) u est k -bon.*

Tits a défini la notion des mauvais éléments unipotents pour les groupes G_2 (resp. F_4 , E_8) en caractéristique 2 (resp. 3, 5). On note H le sous-groupe maximal déployé de $G = G_2$ (resp. F_4 , E_8) de type $A_1.A_1$ (resp. $A_2.A_2$, $A_4.A_4$) et T un tore maximal déployé de H . Il existe un élément $w \in N_H(T)/T$ d'ordre 2 (resp. 3, 5), unique à conjugaison près, tel que w agisse de façon anisotrope sur T , (i.e. T^w est fini) et un tel w se relève en un élément d'ordre 2 (resp. 3, 5) dans $N_H(T)(k)$. Pour $x, y \in k^\times$, on pose

$$g_{x,y} := Ad\left(\alpha^*(\sqrt[l]{y})\right).(\alpha^\vee(x) \times \tilde{w}) \quad \text{dans } G(k(\sqrt[l]{y})),$$

où α est la racine définissant H . Alors $g_{x,y}$ est un élément d'ordre l de $N_G(T)(k)$ et

$$M_G(g_{x,y}) = \{x, y\} \quad \text{dans } K_2(k)/lK_2(k).$$

La même formule permet en caractéristique nulle de définir de mauvais éléments d'ordre 2 (resp. 3, 5).

Le théorème principal de l'article [14] montre que dans ces trois cas importants, cet invariant classe les classes de conjugaison des éléments anisotropes aussi bien en caractéristique $p > 0$ qu'en caractéristique nulle.

THÉORÈME VI.3.2 [14]. — *On suppose que $G = G_2$ (resp. F_4 , E_8) et $l = 2$ (resp. 3, 5). On suppose de plus que k contient une racine primitive l -ième de l'unité ou bien que $p = \text{car}(k) = l$.*

- a) Soit g un élément de $G(k)$ d'ordre l . Les assertions suivantes sont équivalentes :*
 - i) g est k -mauvais,*
 - ii) g est k -anisotrope,*
 - iii) $M_G(g) \neq 0$ dans $K_2(k)/lK_2(k)$.*

b) Soient g, g' des éléments k -anisotropes d'ordre l dans $G(k)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $M_G(g) = M_G(g')$ dans $K_2(k)/lK_2(k)$,*
- ii) g et g' sont conjugués dans $G(k)$.*

c) Excepté (peut-être) le cas E_8 , $l = 5$ inversible dans k , les $G(k)$ -classes de conjugaison des éléments k -anisotropes d'ordre l sont en bijection avec les symboles $\{x, y\} \in K_2(k)/lK_2(k)$. Toute classe de conjugaison est représentée par un élément de Tits $g_{x,y}$.

d) Supposons $G = E_8$, $l = 5$ inversible dans k . Soit g un élément anisotrope d'ordre 5. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $M_G(g)$ est un symbole $\{x, y\} \in K_2(k)/5K_2(k)$,*
- ii) g est conjugué à un élément anisotrope de Tits $g_{x,y}$,*
- iii) g normalise un k -tore maximal déployé de G .*

VI.4. — Algèbres simples centrales de degré 5 et E_8

Une algèbre simple centrale D/k est cyclique si elle admet un corps neutralisant cyclique. On s'intéresse au cas $l = 5$ du problème classique suivant.

Le problème de cyclicité : *Toute k -algèbre simple centrale de degré premier l est-elle cyclique ?*

Pour cette question, on peut supposer le premier l inversible dans k et même k de caractéristique nulle. La question de cyclicité a une réponse positive lorsque $l = 2$ et 3. Pour $l = 2$, les algèbres simples centrales sont les algèbres de quaternions et le cas $l = 3$ est un résultat classique de Wedderburn [W]. Le cas $l = 5$ est donc le premier cas où l'on ignore la réponse. Toutefois, il y a quelques résultats connus sur ce problème. Soit D/k une algèbre simple centrale de degré 5.

- 1) Il existe $a, b \in k^\times$ et $c \in k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ tels que $D \otimes_k k(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt[3]{c})$ est cyclique (Brauer [B]).
- 2) Si D/k est déployée par une extension galoisienne de groupe diédral $D_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors D est cyclique (Rowen-Saltman [RoS]).
- 3) Soit K un corps contenant une racine primitive cinquième de l'unité, complet pour une valuation discrète de corps résiduel k . Si toutes les algèbres simples centrales de degré 5 sur k sont cycliques, il en est de même sur K (Tignol [Tg]).

Rappelons que Rowen n'est pas optimiste quant à la cyclicité des algèbres de degré 5 [Ro]. Nous avons montré que le problème de cyclicité peut se formuler à partir du groupe E_8 .

THÉORÈME VI.4.1 [17]. — *On suppose que k contient une racine primitive cinquième de l'unité. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) les k -algèbres simples centrales de degré 5 sont cycliques,*
- ii) tout élément anisotrope d'ordre 5 du groupe déployé E_8 normalise un k -tore déployé maximal.*

La démonstration repose sur le théorème VI.3.2 et sur le résultat suivant de Rost-Springer qui utilise dans sa démonstration un argument de Chernousov [Ch2].

THÉORÈME VI.4.2 ([RS], th. 17). — *On considère le sous-groupe maximal*

$$H = SL_5 \times SL_5 / \mu_5 \subset E_8,$$

le plongement $\mu_5 \rightarrow \mu_5 \times \mu_5$ étant défini par $x \mapsto (x, x^2)$. La suite exacte $1 \rightarrow \mu_5 \rightarrow SL_5 \times SL_5 \rightarrow H \rightarrow 1$ donne lieu à un bord $\delta : H^1(k, H) \rightarrow H^2_{fppf}(k, \mu_5) = {}_5Br(k)$. Il existe une unique bijection $f_k : H^1(k, PGL_5) \rightarrow \text{Ker}(H^1(k, H) \rightarrow H^1(k, E_8))$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, PGL_5) & \xrightarrow{f_k} & \text{Ker}(H^1(k, H) \rightarrow H^1(k, E_8)), \\ \delta_0 \downarrow & \swarrow \delta & \\ {}_5Br(k) & & \end{array}$$

où δ_0 est la flèche de bord associée à la suite exacte $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow GL_5 \rightarrow PGL_5 \rightarrow 1$.

Ce point de vue et les travaux de Chernousov pour le principe de Hasse des groupes de type E_8 [Ch1] nous permettent de donner une nouvelle preuve du résultat de Brauer 1).

Remarque sur les algèbres de degré 3 : Si l'on suppose maintenant que k contient une racine primitive troisième de l'unité, que $G = F_4$ et que $H = SL_3 \times SL_3/\mu_3$ (plongement diagonal) est le sous-groupe maximal de type $A_2.A_2$ de G , la même approche permet de montrer la cyclicité des algèbres simples centrales de degré 3, c'est-à-dire le théorème de Wedderburn. De façon analogue, on obtient que la cyclicité des algèbres simples centrales de degré 3 est équivalent au fait que tout élément anisotrope d'ordre 3 de F_4 normalise un tore maximal déployé. Comme cette dernière assertion est connue ([13], th. 3 et th. VI.3.2.c), cela démontre la cyclicité des algèbres simples centrales de degré 3. Cependant, la démonstration du théorème de Rost-Springer dans ce cas est bien plus facile, car on dispose alors d'un plongement $PGL_3 \rightarrow H$, ce qui n'était pas le cas pour E_8 .

VII. — Autres travaux

VII.1. — Torseurs sur la droite affine

Nous avons donné dans [4,7] une nouvelle démonstration du théorème fondamental suivant.

THÉORÈME VII.1.1 [RgRm] (1983). — *L'application naturelle $H^1(k, G) \rightarrow H_{\acute{e}t}^1(\mathbb{A}_k^1, G)$ induit une bijection*

$$H^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[H_{\acute{e}t}^1(\mathbb{A}_k^1, G) \rightarrow H_{\acute{e}t}^1(\mathbb{A}_{k_s}^1, G)].$$

L'existence de mauvais unipotents (th. VI.1.2) s'applique à la construction de toseurs remarquables sur la droite affine. Raghunathan avait conjecturé que les G -torseurs (G simplement connexe) sur la droite affine \mathbb{A}_k^1 sont constants, c'est-à-dire proviennent de G -torseurs sur $\text{Spec}(k)$ [Rg, p. 189]. En fait, les mauvais unipotents donnent lieu à des contre-exemples de cette conjecture.

PROPOSITION VII.1.2 [13]. — *On suppose que G/k possède un mauvais unipotent u d'ordre p . Soit $\mathcal{P} : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ le revêtement d'Artin-Schreier, qui est galoisien de groupe \mathbb{F}_p agissant par $t = \mathcal{P}(x) = x^p - x$. On définit le 1-cocycle $h = (h_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{F}_p}$ pour ce revêtement par*

$$h_\sigma = u^\sigma \in G(k[x]) \quad (\sigma \in \mathbb{F}_p)$$

Alors le cocycle h définit un G -torseur sur \mathbb{A}_k^1 non isomorphe à un toseur constant.

VII.2. — G -revêtements sur les corps p -adiques

Soit G/k un groupe algébrique affine. On s'intéresse à la R -équivalence pour le foncteur

$$F(X) = H_{fppf}^1(X, G),$$

défini par le procédé de Čech [Mi, III.4]. Comme G est affine, on sait que l'ensemble pointé $H_{fppf}^1(X, G)$ classe les classes d'isomorphie de G -torseurs sur X ; l'ensemble $H_{fppf}^1(k, G)/R$ correspond donc aux classes d'isomorphie de k -torseurs sous G modulo R -équivalence. Nous démontrons le résultat suivant répondant à une question posée par Colliot-Thélène (lors d'un exposé au MSRI en octobre 1999) pour les G -revêtements, i.e. pour les G -torseurs lorsque G est un groupe fini vu comme k -groupe algébrique constant.

THÉORÈME VI.2.1 [15]. — Soient G un groupe fini et p un nombre premier ne divisant pas l'ordre de G . Soit K un corps local non archimédien, d'anneau de valuation O et de corps résiduel fini $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^r}$.

a) On a $H^1(K, G)/R = 1$; en d'autres termes, tout G -revêtement est R -équivalent au G -revêtement trivial.

b) On suppose que $\text{car}(K) = 0$. Soit $G \subset GL(V)$ une représentation linéaire fidèle de G et X/K une compactification lisse de la K -variété $GL(V)/G$. Alors $X(K)/R = 1$.

Cet article a été complété par Moret-Bailly qui a montré l'énoncé suivant :

THÉORÈME VI.2.2 [MB]. — Sous les hypothèses précédentes, il existe un ouvert de la droite affine V et un G -torseur E/V tels que l'application $V(K) \rightarrow H^1(K, G)$ est surjective.

Ainsi, deux toseurs de $H^1(K, G)$ sont élémentairement R -équivalents. Par ailleurs, Colliot-Thélène a construit avec le groupe $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et le corps \mathbb{Q}_2 un G -revêtement non élémentairement R -équivalent au revêtement trivial [CT, prop. A2, preuve]. Donc l'hypothèse sur l'ordre de G ne peut être levée dans le théorème.

COROLLAIRE VI.2.3 [15]. — Soient F un corps de nombres, G un groupe fini, V/F une représentation linéaire fidèle de G et X/F une compactification lisse de $GL(V)/G$. Alors pour toute place finie v de F première à l'ordre de G , on a

$$H^1(F_v, G)/R = 1 \quad \text{et} \quad X(F_v)/R = 1,$$

F_v désignant le complété de F à la place v .

Notons \overline{F} une clôture algébrique de F . Le corollaire donne en particulier un exemple de variété X/F qui n'est pas une variété rationnelle (i.e. $X \times_F \overline{F}$ n'est pas une variété rationnelle, i.e. birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}_{\overline{F}}^r$), mais qui satisfait $X(F_v)/R = 1$ pour presque toute place v . En effet, d'après les travaux de Saltman sur le problème de Noether [Sal], il existe un groupe fini G tel que pour toute représentation fidèle V/F de G , les variétés V/G et $GL(V)/G$ ne sont pas rationnelles.

VIII. — Quelques questions

Nous avons rassemblé ici quelques questions directement liées à ce travail.

a). — **Le problème de Veisfeiler-Tits.** Le cas de E_8 reste en suspens (cf. §II.3). Récemment, B. Totaro a donné la généralisation suivante à cette question.

Question [To]. Soit G/k un groupe réductif et X un espace homogène sous G . Soit d un entier tel qu'il existe un zero-cycle sur X de degré d . Existe-t-il une extension séparable L/k de degré divisant d satisfaisant $X(L) \neq \emptyset$?

Totaro a donné des cas de toseurs pour lequel cette question admet une réponse positive. Nous avons remarqué que pour le groupe PGL_l (l premier), une réponse positive à cette question pour l'espace homogène ${}_z(PGL_l/(T \rtimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))$, T étant un tore déployé maximal de PGL_l et $z \in Z^1(k, PGL_l)$ un cocycle représentant une algèbre simple centrale A/k de degré d , entraîne la cyclicité de A/k .

b). — Extensions déployantes résolubles des groupes absolument simples

Question. Soit G/k un groupe semi-simple absolument simple. Existe-il une extension finie de corps résoluble L/k déployant G et dont le degré est un produit d'entiers de $S(G)$?

Selon Tits [T6], cette question a une réponse positive en tous types excepté E_8 . Le cas de E_8 reste mystérieux et une réponse positive à cette question entraînerait la conjecture II pour E_8 en accord avec le théorème V.1.1.

c). — Sur la R -équivalence.

Est-il vrai que le groupe $G(k)/R$ est abélien pour tout groupe semi-simple G/k ? Dans tous les exemples connus, c'est le cas, voir notamment les travaux de Chernousov-Merkurjev [ChM].

Bibliographie

- [A] J.K. ARASON. — *The Cohomologische invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448–491.
- [Ar1] M. ARTIN. — *Local structure of maximal orders on surfaces*, Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981), Lecture Notes in Math. **917** (1982), 146–181.
- [Ar2] M. ARTIN. — *Two-dimensional orders of finite representation type*, Manuscripta Mathematica **58** (1987), 445–471.
- [BaM] H. BASS et J. TATE. — *The Milnor ring of a global field*, Algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math. **342** (1973), Springer-Verlag.
- [BT] P. BARQUERO et A.S. MERKURJEV. — *Norm Principle for Reductive Algebraic Groups*, Prépublication (2001).
- [BP] E. BAYER et R. PARIMALA. — *Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2* , Invent. math. **122** (1995), 195–229.
- [BMT] G. BERHUY, M. MONSURRO et J.P. TIGNOL. — *Rost invariant for symplectic groups*, travail en cours.
- [BK] S. BLOCH et K. KATO. — *p -adic Étale Cohomology*, Pub. Math. IHES **66** (1986), 107–152.
- [BoT1] A. BOREL et J. TITS. — *Groupes réductifs*, Pub. Math. IHES **27**, (1965), 55–152.
- [BoT2] A. BOREL et J. TITS. — *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques des groupes réductifs*, Invent. math. **12**, (1971), 95–104.
- [Bou] N. BOURBAKI. — *Groupes et Algèbres de Lie, Ch. IV, V et VI*, Masson (1981).
- [B] R. BRAUER. — *On normal division algebras of degree 5*, Proc. Nat. Ac. Sci. **24** (1938), 243–246.
- [BrT1] F. BRUHAT et J. TITS. — *Groupes algébriques simples sur un corps local*, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 23–36 Springer, Berlin.
- [BrT2] F. BRUHAT et J. TITS. — *Groupes réductifs sur un corps local II*, Publ. Math. IHES **60** (1984).
- [BrT3] F. BRUHAT et J. TITS. — *Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671–698.
- [BD] J.-L. BRYLINSKI et P. DELIGNE. — *Central extensions by K_2* , preliminary version (1997).
- [C1] C. CHEVALLEY. — *On algebraic group varieties*, J. Math. Soc. Japan **6** (1954), 303–324.
- [C2] C. CHEVALLEY. — *Sur certains groupes simples*, Tohoku Math. Jour. **7** (1955), 14–66.
- [Ch1] V.I. CHERNOUSOV. — *The Hasse principle for groups of type E_8* , Dokl. Akad. Nauk. SSSR **306** (1989), 1059–1063 (en russe), et Math. USSR-Izv. **34** (1990), 409–423 (en anglais).
- [Ch2] V. CHERNOUSOV. — *Remark on the Serre mod-5 invariant for groups of type E_8* , Math. Zametki **56**, n^o 1 (1994), 116–121, traduction anglaise Math. Notes **56**, n^o 1(1994), 730–733.
- [Ch3] V. CHERNOUSOV. — *Lettre, 5 décembre 1998*.
- [Ch4] V. CHERNOUSOV. — *The kernel of the Rost invariant, Serre's Conjecture II and the Hasse principle for quasi-split groups of type E_6, E_7* , prépublication (2001).
- [ChP] V. CHERNOUSOV et A.S. MERKURJEV. — *R -equivalence in spinor groups*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 509–534.
- [ChP] V. CHERNOUSOV et V.P. PLATONOV. — *The rationality problem for semisimple group varieties*, J. reine angew. Math. **504** (1998), 1–28.

- [ChT] V. CHERNOUSOV et L.M. TIMOSHENKO. — *On the group of R -equivalence classes of semisimple groups over arithmetic fields*, Algebra i Analiz **11** (1999), 191–221, traduction anglaise dans St. Petersburg Math. J. **11** (2000), 1097–1121.
- [CTS1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC. — *La R -équivalence sur les tores*, Ann. Scient. ENS, vol. **10** (1977), 175–230.
- [CTS2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC. — *Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori : Applications*, J. of Alg. **106** (1987), 148–205.
- [CTCS] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CORAY et J.-J. SANSUC. — *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **320** (1980), 150–191.
- [CT] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE. — *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Annals of Math. **151** (2000), 359–373.
- [EKL] H. ESNAULT, B. KAHN, M. LEVINE et E. VIEHWEG. — *The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles*, J. AMS **11** n° 1 (1998), 73–118.
- [ELTW] R. ELMAN, T.Y. LAM, J.-P. TIGNOL et A. WADSWORTH. — *Witt ring and Brauer groups under multiquadratic extensions*, Am. J. Math. **105** (1983), 1119–1170.
- [Ga] S. GARIBALDI. — *The Rost invariant has trivial kernel for quasi-split groups of low rank*, Prépublication (2000).
- [H1] G. HARDER. — *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen­gruppen I*, Math. Zeit. **90** (1965), 404–428, II Math. Zeit. **92** (1966), 396–415, III J. für die reine angew. Math. **274/5** (1975), 125–138.
- [H2] G. HARDER. — *Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen*, Invent. math. **4** (1967), 165–191.
- [H3] G. HARDER. — *Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven*, Invent. math. **6** (1968), 107–149.
- [H4] G. HARDER. — *Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen*, Jahresbericht d. DMV **70** (1968), 182–216.
- [I] L. ILLUSIE. — *Complexes de de Rham Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **12** (1979), 501–661.
- [K] B. KAHN. — *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.
- [Ka1] K. KATO. — *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, Lect. Notes in Math. **967** (1982), 215–238.
- [Ka2] K. KATO. — *Symmetric Bilinear Forms, Quadratic Forms and Milnor K -theory in Characteristic Two*, Invent math. **66** (1982), 493–510.
- [Kl] A. A. KLYACHKO. — *Tori without affect in semisimple algebraic groups*, Arithmetic and geometry of manifolds, Interuniv. Collect. Sci. Works, Kujbyshev (1989), 67–78.
- [Kn] M. KNESER. — *Lectures on Galois cohomology of Classical Groups*, Lectures on Math. **47**, Bombay (1969).
- [Kn] M. KNESER. — *Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p -adischen Körpern*, I, Math. Zeit. **88** (1965), pp. 40–47, II, Math. Zeit. **89** (1965), 250–272.
- [KS] B. E. KUNYAVSKIĪ et A. N. SKOROBOGATOV. — *Weak approximation in algebraic groups and homogeneous spaces*, Contemporary Mathematics **131**, Part. 3 (1992), 447–451.
- [KMRT] M.-A. KNUS, A.S. MERKURJEV, M. ROST, et J.-P. TIGNOL. — *The Book of Involutions*, AMS (vol. 44) (1998).
- [KS] K. KATO et S. SAITO. — *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. **118** (1983), 241–275.
- [Mr] G.A. MARGULIS. — *Finiteness of quotient groups of discrete groups*, Func. Anal. App. **13** (1979), 178–187.
- [Ma] I. MATSUMOTO. — *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **2** (1969), 1–62.
- [M1] A.S. MERKURJEV. — *Simple algebras and quadratic forms*, Izv. Akad. Nauk SSSR **92** (1991), 218–224.
- [M2] A.S. MERKURJEV. — *Generic element in SK_1 for simple algebras*, K-Theory **7** (1993), 1–3.
- [M3] A.S. MERKURJEV. — *Norm Type of Algebraic Groups*, (en russe) Algèbre et Analyse **7** (1995), 77–105.
- [M4] A.S. MERKURJEV. — *K -theory of simple algebras*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992) 65–83, Proc. Sympos. Pure Math., 58, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

- [M5] A.S. MERKURJEV. — *Maximal indices of Tits Algebras*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 215–228.
- [M6] A.S. MERKURJEV. — *R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **84** (1996), 189–213.
- [MS] A.-S. MERKURJEV et A.-A. SUSLIN. — *K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011–1046, trad. anglaise : Math. USSR Izv. **21** (1983), 307–340.
- [Me] J.-F. MESTRE. — *Annulation par changement de variable d'éléments de ${}_2Br(k(x))$ ayant quatre pôles*, C.R. Acad. Sci. Paris **319** (1994).
- [Mi] J.S. MILNE. — *Étale Cohomology* (1980), Princeton.
- [Mn] Yu.I. MANIN. — *Cubic forms*, 2^{nde} édition, North-Holland (1986).
- [MB] L. MORET-BAILLY. — *R-équivalence simultanée de toseurs : un complément à l'article de P. Gille*, Journal of Number Theory (à paraître, 2001).
- [PeR] H.P. PETERSSON et M. L. RACINE. — *The Serre-Rost invariant of Albert algebras in characteristic three*, Indag. Math., N. S., **8** (1997), 543–548.
- [P] V.-P. PLATONOV. — *The Tannaka-Artin problem, and groups of projective conorms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **222** (1975), no. 6, 1299–1302.
- [PR] V.-P. PLATONOV et A.-S. RAPINCHUK. — *Algebraic Groups and Number Theory (trad. anglaise)*, Academic Press (1994).
- [Pf] A. PFISTER. — *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series **217** (1995), Cambridge University Press, Cambridge.
- [PrR] G. PRASAD et M. S. RAGHUNATHAN. — *Topological central extensions of semi-simple groups over local fields I*, Annals of Math. **119** (1984), 143–201.
- [Rg] M.S. RAGHUNATHAN. — *Principal bundles on affine space*, C.P. Ramanujan-A tribute, Stud. Math. Ann. **8** (1978), Bombay; Tata Inst. Fundam. Research.
- [RgRm] M.S. RAGHUNATHAN et A. RAMANATHAN. — *Principal bundles on the affine line*, Proc. Indian Acad. Sci. **93** (1984), 137–144.
- [R1] M. ROST. — *A mod 3-invariant for exceptional Jordan algebras*, C. R. Acad. Sci. Paris **315** (1991), 823–827.
- [R2] M. ROST. — *Cohomological invariants*, en préparation.
- [RS] M ROST et T. A. SPRINGER. — *On subgroups of type A_4 in E_8* , travail en cours.
- [Ro] L.H. ROWEN. — *Are p -algebras having cyclic quadratic extensions necessarily cyclic ?*, J. Algebra **215** (1999), 205–228.
- [RoS] L.H. ROWEN et D. SALTMAN. — *Dihedral algebras are cyclic*, Proc. Am. Math. Soc. **84** (1982), 162–164.
- [Sa] J.-J. SANSUC. — *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques sur un corps de nombres*, J. für die reine angew. Math. **327** (1981), 13–81.
- [Sai] S. SAITO. — *Arithmetic on two-dimensional local rings*, Invent. Math. **85** (1986), 379–414.
- [Sal] D. SALTMAN. — *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.
- [Sc] W. SCHARLAU. — *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen in Wissenschaften **270** (1985), Springer-Verlag.
- [Se1] J-P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, 5^{ième} édition (1994), Springer-Verlag.
- [Se2] J-P. SERRE. — *Lettre à Rost du 3 décembre 1992*.
- [Se3] J-P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne : Progrès et problèmes*, Séminaire Bourbaki, exposé 783 (1993-94), Astérisque **227** (1995).
- [SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151-153. Springer (1970).
- [St] R. STEINBERG. — *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Pub. Math. IHES **25** (1965), 281–312.
- [Sp] T.A. SPRINGER. — *Regular element of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159–198.
- [Su] A.A. SUSLIN. — *Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism*, J. Soviet. **30** (1985), 2556–2611.
- [Tg] J.-P. TIGNOL. — *Metacyclic division algebras of degree 5*, Ring Theory (1989), in Honor of S.A Amitsur, Proc. Symp. and Workshop, Jerusalem/Isr. 1988/89, Isr. Math. Conf. Proc. **1**, 344–355 (1989).

- [T1] J. TITS. — *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Symp. Pure. Math (1966), 33-62 .
- [T2] J. TITS. — *Normalisateurs de tores I*, J. of Algebra **4** (1966), 96–116.
- [T3] J. TITS. — *Représentations linéaires irréductibles d’un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. reine und angew Math. **247** (1971), 196–220.
- [T4] J. TITS. — *Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups. II*, Lecture Notes in Math. **1271** (1986), 33-62.
- [T5] J. TITS. — *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, Journal of Algebra **131** (1990), 648–677.
- [T6] J. TITS. — *Résumé de cours du Collège de France 1991–92*, Annuaire du Collège de France.
- [T8] J. TITS. — *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples*, C.R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 1131–1138.
- [T9] J. TITS. — *Résumés de cours 92-93*, Annuaire du Collège de France.
- [T10] J. TITS. — *Résumés de cours 93-94*, Annuaire du Collège de France.
- [To] B. TOTARO. — *Splitting field for E_8 -torsors*, prépublication (2001).
- [Ve] B. Ju. VEISFEILER. — *A certain property of semisimple algebraic groups*, Funkcional. Anal. i Priložen. **2** (1968), 84–85.
- [Vo] V.E. VOSKRESENSKIĬ. — *Algebraic groups and their birational invariants*, Trans. of Math. of Monographs, vol **179** (1998), AMS.
- [W] J. H. M. WEDDERBURN. — *On division algebras*, Trans. AMS **22** (1921), 129–135.

LISTE DE TRAVAUX

- [1] *Analogies entre espaces hyperboliques réels et l’arbre de Bruhat-Tits sur \mathbb{Q}_p* , séminaire de théorie spectrale et géométrie, Chambéry–Grenoble (1990-91), 95–101.
- [2] *R-équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne*, C. R. Acad. Paris **316** (1993), 315–320.
- [3] *Un théorème de finitude arithmétique sur les groupes réductifs*, C. R. Acad. Paris **316** (1993), 701–704.
- [4] Thèse de doctorat “*Torseurs sur la droite affine et R-équivalence*”, Orsay (1994).
- [5] *Examples of Non-rational Varieties of Adjoint Groups*, Journal of Algebra **193** (1997), 728–747.
- [6] *La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Publications Mathématiques de l’IHES **86** (1997), 199–235.
- [7] *Torseurs sur la droite affine*, à paraître à Transformation Groups (2001).
- [8] *Éléments unipotents des groupes algébriques semi-simples simplement connexes en caractéristique $p > 0$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), no. 12, 1123–1128.
- [9] *Le groupe fondamental sauvage d’une courbe affine en caractéristique $p > 0$* , Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998), 217–231, Progr. Math., **187**, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [10] *Décomposition de Bruhat-Tits et principe de Hasse*, J. für die reine angew. Math. **518** (2000), 145–161.
- [11] *Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive*, K-Theory **21** (2000), 57–100.
- [12] *Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2* , Compositio Math. **125** (2001), 283–325.
- [13] *Unipotent subgroups of reductive groups of characteristic $p > 0$* , à paraître à Duke Math. J (2002).
- [14] *An invariant of elements of finite order in semisimple simply connected algebraic groups*, à paraître dans J. of Group Theory (2002).
- [15] *La R-équivalence sur les G -revêtements sur les corps locaux non archimédiens*, Journal of Number Theory **91**, 284–292 (2001).
- [16] *Quadriques*, addenda à la semaine de Luminy “cohomologie motivique” organisée par Bost-Loeser-Morel.
- [17] *Algèbres simples centrales de degré 5 et E_8* , à paraître au Bulletin Canadien de Mathématiques (2002).
- [18] avec J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, *Arithmétique des groupes algébriques linéaires sur certains corps géométriques de dimension 2*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), 827–832.