J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
00-0 (2004), 000–000

Symbole galoisien l–adique et théorème de Suslin-Voevodsky

By

Philippe GILLE

Abstract

The present paper provides an alternative proof of a theorem of Suslin-Voevodsky. We use more classical tools, namely certain Severi-Brauer schemes and continuous étale cohomology.

Introduction. Soit k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\mathcal{G}_k$ le groupe de Galois absolu de k_s/k. Rost et Voevodsky ([V], [R]) ont démontré récemment la

Conjecture de Bloch-Kato [K]. *Pour tous entiers $q \geq 0$, $m \geq 1$, m inversible dans k, le symbole galoisien*

$$h^q_{m,k} : K_q^M(k)/mK_q^M(k) \to H^q(k, \mu_m^{\otimes q})$$

est un isomorphisme.

Rappelons brièvement les acteurs en présence : $K_q^M(k)$ désigne le q–ième groupe de K–théorie de Milnor, c'est–à–dire le quotient du produit tensoriel $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_q$ tels qu'il existe un indice i satisfaisant $a_i + a_{i+1} = 1$; on note alors $\{a_1, ..., a_q\}$ la classe (ou symbole) dans $K_q^M(k)$ de $a_1 \otimes ... \otimes a_q$. Le groupe $H^q(k, \mu_m^{\otimes q})$ désigne le q–ième groupe de cohomologie galoisienne de k à coefficients $\mu_m^{\otimes q} = \mu_m(k_s) \otimes_{\mathbb{Z}} ... \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_m(k_s)$ (q fois). Suivant le théorème 90 de Hilbert, on a un isomorphisme $k^\times/(k^\times)^m \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mu_m)$, $a \mapsto (a)$; le symbole galoisien est défini par $h^q_{m,k}\big(\{a_1, ..., a_q\}\big) = (a_1) \cup \cdots \cup (a_q)$.

1991 *Mathematics Subject Classification*(*s*). N/A
2000 *Mathematics Subject Classification*(*s*). N/A
Additional information
Communicated by N/A
Received Date
Additional information(s)
Revised Date
Revised Dates

On fixe un premier inversible l dans k. Le cas d'un corps fini étant trivial, on peut supposer le corps k infini. Nous nous intéressons à la formulation équivalente suivante de la conjecture due à Suslin-Voevodsky (pour $l = 2$, il y a une démonstration antérieure de Merkurjev [Me2]).

Théorème 0.1. ([SV], theorem 11.4) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) Le groupe $H^q(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q))$ est divisible pour tout corps F/k;
ii) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien
$h : K_q^M(F)/l \to H^q(F, \mu_l^{\otimes q})$ est bijectif;
iii) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien
$h : K_q^M(F)/l \to H^q(F, \mu_l^{\otimes q})$ est surjectif. □

Suivant Tate ([T],§2), l'assertion $i)$ peut être également formulée en termes de cohomologie galoisienne l–adique, à savoir

$i')$ $\quad H^{q+1}(F, \mathbb{Z}_l(q))_{tors} = 0 \quad$ pour toute extension F/k.

Par ailleurs, l'étape clef du théorème de Merkurjev-Suslin est le

Théorème 90 de Hilbert pour $\mathbf{K_2}$ ([MS]) : *Pour toute extension cyclique L/k de degré l, le complexe*

$$K_2^M(L) \xrightarrow{(1-\sigma)} K_2^M(L) \xrightarrow{N_{L/k}} K_2^M(k),$$

est exact, où $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$, et $N_{L/k}$ désigne la norme en K–théorie de Milnor ([BT], [K]).

Ici, l'objet principal d'étude est le complexe analogue pour la cohomologie galoisienne l-adique.

"Problème de Hilbert 90 l–adique" : *Le complexe*

$$H^q(L, \mathbb{Z}_l(q)) \overset{(1-\sigma)}{\longrightarrow} H^q(L, \mathbb{Z}_l(q)) \overset{\mathrm{Cor}_k^L}{\longrightarrow} H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$$

est exact.

Cette question est liée au théorème 90 de Hilbert pour la K-théorie de Milnor par le symbole galoisien l-adique $h_k : K_q^M(k) \to H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$ défini pour $q = 1$ par l'identification du groupe

$$H^1(k, \mathbb{Z}_l(1)) = \varprojlim_n H^1(k, \mu_{l^n}) = \varprojlim_n k^\times / k^{\times l^n}$$

au complété l–adique de $k^\times$ et défini pour $q \geq 2$ ([T], theorem 3.1) par

$$h_k^q : K_q^M(k) \to H^q(k, \mathbb{Z}_l(q)), \quad \{a_1, \cdots, a_q\} \mapsto h(a_1) \cup \cdots \cup h(a_q),$$

de sorte qu'il relève le symbole galoisien

$$h_{l^m,k}^q : K_q^M(k)/l^m \to H^q(k, \mu_{l^m}^{\otimes m}).$$

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_q^M(L) & \xrightarrow{(1-\sigma)} & K_q^M(L) & \xrightarrow{N_{L/k}} & K_q^M(k) \\ {\scriptstyle h_L^q}\big\downarrow & & {\scriptstyle h_L^q}\big\downarrow & & {\scriptstyle h_k^q}\big\downarrow \\ H^q(L,\mathbb{Z}_l(q)) & \xrightarrow{(1-\sigma)} & H^q(L,\mathbb{Z}_l(q)) & \xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} & H^q(k,\mathbb{Z}_l(q)) \end{array}$$

dont la seconde ligne est bien plus maniable[*1]. En supposant la conjecture acquise en degré $\leq q-1$, nous établissons un lien entre le problème de Hilbert 90 l-adique et le théorème 0.1 via l'assertion i'). Nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de Suslin-Voevodsky complété par de nouvelles formulations équivalentes de la conjecture de Bloch-Kato.

Théorème 0.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Le groupe $H^q(F,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q))$ est divisible pour tout corps F/k,

ii) Le bord $H^q(F,\mu_l^{\otimes q}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(F,\mu_l^{\otimes q})$, associé à la suite exacte $0 \to \mu_l^{\otimes q} \to \mu_{l^2}^{\otimes q} \to \mu_l^{\otimes q} \to 1$, est trivial pour tout corps F/k,

iii) Hilbert 90 l–adique en degré q,

iv) Hilbert 90 l–adique en degré q pour les symboles,

v) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien $h_{l,F} : K_q^M(F)/l \to H^q(F)$ est bijectif,

vi) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien $h_{l,F} : K_q^M(F)/l \to H^q(F)$ est surjectif.

Ensuite, c'est exclusivement sur la formulation équivalente ii) que l'on travaille avec une extension $L/k = L(\sqrt[l]{s})$. Le problème de Hilbert 90 l–adique pour les symboles admet un cas "versel", dont la variété sous-jacente est le produit des variétés de Severi-Brauer des $k(t)$–algèbres cycliques de degré l

$$A_\zeta\big(N_{L/k}(c_i), t\big),$$

de présentation $X^l = N_{L/k}(c_i)$, $Y^l = t$, $XY = \zeta YX$, où ζ désigne une racine primitive l-ième de l'unité et t une indéterminée. On note alors $F/k(t)$ le composé des corps de fonctions des variétés de Severi-Brauer des $k(t)$–algèbres $A_\zeta(N_{L/k}(c_i), t)$. Il existe des fonctions $g_i \in F' = F.k(t')$ avec $t' = \sqrt[l]{t}$ satisfaisant $N_{L/k}(c_i) = N_{F'/F}(g_i)$ et on vérifie (lemme 4.1) alors que $h_L\Big(\sum_i \{c_i, b_i\}\Big) - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0)$ est essentiellement un "spécialisé" (en une place $F \mapsto k$ au-dessus de la place $k(t) \mapsto k$ correspondant à s) de l'élément "versel"

$$h_{F'}\Big(\sum_i \{g_i, b_i\}\Big) - \mathrm{Res}_k^{F'}(\beta_0) \in \mathrm{Ker}\Big(H^q(F',\mathbb{Z}_l(q)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_F^{F'}} H^q(F,\mathbb{Z}_l(q))\Big).$$

[*1] De façon plus précise, la description de la l–torsion dans $H^2(k,\mathbb{Z}_l(2))$ est immédiate, alors que la description de la l–torsion de $K_2^M(k)$ nécessite le théorème de Hilbert 90 pour K_2^M.

Notons que la considération de coniques verselles intervient dans une preuve simple du théorème de Merkurjev [Me3].

Passons en revue l'article. La première section fait des rappels de cohomologie galoisienne l–adique et la seconde discute le problème de Hilbert 90 l-adique. La troisième section concerne les schémas de Severi-Brauer; ils interviennent dans la définition et l'étude des classes verselles utilisées dans la preuve du théorème 0.2 (section 4).

Remerciements. En premier lieu, je tiens à exprimer ma reconnaissance à Jean-Louis Colliot-Thélène et à Christophe Soulé d'avoir suivi et commenté les différentes étapes de ce travail; leur aide m'a été précieuse. Je remercie aussi Markus Rost de m'avoir indiqué une erreur dans la première version de ce texte (juillet 2003). Je remercie Tamás Szamuely pour sa lecture attentive du manuscrit et ses améliorations de rédaction.

Enfin, je tiens à remercier Jean Barge, Bruno Kahn, Marc Levine, Alexander Merkurjev et Fabien Morel pour les échanges dont j'ai bénéficié.

Notations.

• $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}(i) = \mu_{l^m}^{\otimes i}$, $i \geq 0$, $m \geq 1$), et $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}(-i) = \mathrm{Hom}_{k_s-gr}(\mu_{l^m}^{\otimes i}, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$, $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i) = \varinjlim \mu_{l^n}^{\otimes i}$,

• ${}_nA$ et A/n le noyau et le conoyau de la multiplication $A \xrightarrow{\times n} A$ par un entier n pour un groupe abélien A,

• A_{tors} la torsion d'un groupe abélien A et et $A\{l\}$ la composante l-primaire A_{tors},

• on note $\mathcal{A}_b^{\mathbb{N}}$ la catégorie abélienne des systèmes projectifs de groupes abéliens

$$\cdots \to A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_1 \to A_0.$$

On note $\varprojlim_n^1$ le premier foncteur dérivé du foncteur limite projective $\varprojlim_n$: $(\mathcal{A}_b)^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}_b$ (les foncteurs dérivés supérieurs sont nuls).

• Tous les groupes de cohomologie $H^*(S, \mathcal{F})$ sont des groupes de cohomologie étale (resp. continue étale) d'un schéma S pour un faisceau étale (resp. continu étale) $\mathcal{F}/S$. On note $\mathrm{Pic}(S) = H^1(S, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Picard de S et $\mathrm{Br}(S) = H^2(S, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer–Grothendieck de S [G].

• Si A est une k–algèbre étale, on note $R_{A/k}(\mathbb{G}_{m,A})$ la restriction des scalaires à la Weil de A à k du tore standard $\mathbb{G}_{m,A} = \mathrm{Spec}(A[t^{\pm 1}])$.

1. Cohomologie galoisienne l–adique

Nous travaillons d'abord avec les groupes de cohomologie l–adique définis par Tate [T] par les cochaînes continues, et ensuite avec la théorie de la cohomologie étale continue de Jannsen [J] qui généralise la cohomologie galoisienne continue.

1.1. Cohomologie l-adique des groupes profinis

Soit G un groupe profini. Si M est un $\mathbb{Z}_l$–module de type fini (muni de la topologie profinie) avec une action continue de G, on note $H^i(G, M)$ les groupes de cohomologie l-adique de Tate [T] définis avec des cochaînes continues $C^*(G, M)$. Le lien avec la cohomologie des groupes profinis usuelle est fait par la suite exacte de Milnor (*loc. cit.*, proposition 2.2)

$$0 \to \varprojlim_n{}^1 H^{q-1}(G, M/l^n) \to H^q(G, M) \to \varprojlim_n H^q(G, M/l^n) \to 0.$$

En particulier, comme les groupes $H^0(G, M/l^n)$ sont finis, le système $\big(H^0(G, M/l^n)\big)$ satisfait la condition de Mittag-Leffler et donc $H^1(G, M) = \varprojlim_n H^1(G, M/l^n)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} H^1(G, \mathbb{Z}_l) &= \varprojlim_n H^1(G, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \\ &= \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{gr,cont}(G, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{gr,cont}(G, \mathbb{Z}_l), \end{aligned}$$

le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{Z}_l$. On dispose de cup-produits, et pour tout sous–groupe ouvert $H \subset G$ d'une restriction $\mathrm{Res}^i : H^i(G, M) \to H^i(H, M)$ et d'une corestriction (ou transfert) $\mathrm{Cor}^i : H^i(H, M) \to H^i(G, M)$ satisfaisant $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = \times[G : H]$, $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Cor} = \times N_{G/H}$ où $N_{G/H} = \sum_{g \in G/H} [gH] \in \mathbb{Z}[G/H]$ et la formule de projection $\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(\alpha) \cup \beta) = \alpha \cup \mathrm{Cor}(\beta)$. L'isomorphisme de Shapiro pour le H-module restreint $\mathrm{Res}^H_G(M)$ (i.e. le module M, l'action de H provenant par restriction de celle de G) permet de travailler seulement avec le groupe G.

Lemme 1.1. *On note* $\epsilon : \mathbb{Z}_l[G/H] \to \mathbb{Z}_l$ *l'augmentation et* $p : \mathbb{Z}_l[G/H] \to \mathbb{Z}_l$ *la projection sur le facteur* $[H]$. *Alors pour tout entier* q, *le composé*

$$can : H^q(G, M \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l[G/H]) \to H^q(H, M \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l[G/H]) \xrightarrow{p_*} H^q(H, M)$$

est un isomorphisme et $\epsilon_* \circ (can)^{-1} = \mathrm{Cor} : H^q(H, M) \to H^q(G, M)$.

Démonstration. Le lemme est vrai pour la cohomologie usuelle ([Se1], §I.2.5 prop. 10 appliquée à $\mathrm{Res}^H_G(M)$). Il est donc vrai pour la cohomologie continue en utilisant la suite exacte de Milnor. □

On suppose que M est sans torsion. Alors la suite exacte $0 \to M \xrightarrow{\times l^m} M \to M/l^m \to 0$ induit la suite exacte

$$0 \to H^q(G, M)/l^m \to H^q(G, M/l^m) \xrightarrow{\delta} {}_{l^m}H^{q+1}(G, M) \to 0.$$

En passant à la limite sur m, on obtient alors une suite exacte ([T], §2)

$$0 \to H^q(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to H^q(G, M \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(G, M)_{tors} \to 0.$$

1.2. Cas d'un quotient cyclique

Cette section est à rapprocher de la proposition 15.2 de [MS].On suppose que H est un sous–groupe normal ouvert et que le quotient $G/H = \Gamma$ est cyclique d'ordre $d = l^r$. Soit σ un générateur de Γ. On note $N = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{d-1} \in \mathbb{Z}_l[\Gamma]$; on dispose du morphisme de norme $N : \mathbb{Z}_l \to \mathbb{Z}_l[\Gamma]$ envoyant 1 sur N et de l'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}_l[\Gamma] \to \mathbb{Z}_l$ définie par $\epsilon(\sum_i a_i\sigma^i) = \sum_i a_i$. On a la relation $\epsilon \circ N = \times d$ et la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_l \xrightarrow{N} \mathbb{Z}_l[\Gamma] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}_l[\Gamma] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_l \to 0.$$

On pose $I = \mathrm{Ker}(\epsilon)$ et $J = \mathrm{Coker}(N)$, on a alors un isomorphisme $(1-\sigma) : J \xrightarrow{\sim} I$. Les suites exactes $0 \to I \to \mathbb{Z}_l[\Gamma] \to \mathbb{Z}_l \to 0$, et $0 \to \mathbb{Z}_l \to \mathbb{Z}_l[\Gamma] \to J \to 0$ admettent des sections continues. Après tensorisation par M, elles donnent lieu, via le lemme 1.1, au diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
H^q(G,M) \arrow[r, "\mathrm{Res}^q"] & H^q(H,M) \arrow[r] & H^q(G, M\otimes_{\mathbb{Z}_l} J) \arrow[r] \arrow[d, "(1-\sigma)"', "\wr"] & \cdots \\
H^{q-1}(H,M) \arrow[r, "\mathrm{Cor}^{q-1}"] & H^{q-1}(G,M) \arrow[r, "\delta"] & H^q(G, M\otimes_{\mathbb{Z}_l} I) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H^{q+1}(G,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}^{q+1}} H^{q+1}(H,M)$$

$$\cdots \longrightarrow H^q(H,M) \xrightarrow{\mathrm{Cor}^q} H^q(G,M).$$

La flèche induite de $H^q(H,M) \to H^q(H,M)$ est donnée par $1-\sigma$, où l'action est celle de Γ sur $H^q(H,M)$. Une chasse au diagramme donne alors une suite exacte

$$H^q(G,M) \to H^q(H,M)^{1-\sigma} \to H^{q-1}(G,M)/\mathrm{Cor}^{q-1}\big(H^{q-1}(H,M)\big)$$

$$\xrightarrow{\phi} \mathrm{Ker}(\mathrm{Res}^{q+1}) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Cor}^q)/(1-\sigma)H^q(H,M) \to 0.$$

Pour déterminer la flèche ϕ, on voit $H^{q-1}(G,M)$ comme $H^{q-1}(G,M) \otimes_{\mathbb{Z}_l} H^0(G,\mathbb{Z}_l)$ et puisque les diagrammes précédents sont compatibles aux cup-produits, il apparaît que $\phi(\gamma) = \gamma \cup \theta$ avec $\theta = \phi(1) \in H^2(G,\mathbb{Z}_l)$. Pour déterminer θ, on peut momentanément supposer que $G = \Gamma$, c'est-à-dire $H = 1$, et la suite ci-dessus avec $q = 1$ et $\mathbb{Z}_l$ s'écrit

$$\mathbb{Z}_l \xrightarrow{\phi} H^2(\Gamma, \mathbb{Z}_l) \to 0,$$

i.e. θ est un générateur de $H^2(\Gamma,\mathbb{Z}_l) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$; il résulte que $\theta = m.\delta(\chi)$, où $\chi : G \to \Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est le caractère de noyau H envoyant σ sur 1 et m un entier premier à l. Quitte à remplacer ϕ par $m'\phi$ avec $mm' = 1\,[d]$, on peut donc supposer que $\phi = \cup\delta(\chi)$. Nous avons donc établi le résultat suivant.

Lemme 1.2. *La construction ci-dessus donne une exacte*

$$H^q(G,M) \overset{\mathrm{Res}}{\to} H^q(H,M)^\Gamma \to H^{q-1}(G,M)/\mathrm{Cor}^{q-1}\big(H^{q-1}(H,M)\big)$$

$$\xrightarrow{\cup\delta(\chi)} \mathrm{Ker}(\mathrm{Res}^{q+1}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Ker}(\mathrm{Cor}^q)/(1-\sigma)H^q(H,M) \to 0.$$

Cette suite exacte est plus précise que l'information donnée par la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^i(\Gamma, H^q(H,M)) \implies H^{i+j}(G,M)$ qui existe pour la cohomologie continue ([J], theorem 3.3).

Lemme 1.3. *a) On suppose que $dM = 0$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\big(H^{q+1}(G,M) \to H^{q+1}(H,M)\big) \arrow[rr, "\rho"'] & & \mathrm{Ker}\big(H^q(H,M) \overset{\mathrm{Cor}}{\to} H^q(G,M)\big)/(1-\sigma)H^q(H,M) \\
& H^q(G,M) \arrow[ul, "\chi\cup"] \arrow[ur, "\mathrm{Res}"'] &
\end{tikzcd}.$$

est commutatif.

b) On suppose que le complexe

$$H^q(G,M) \oplus H^q(H,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}\oplus(1-\sigma)} H^q(H,M) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^q(G,M)$$

est exact. Alors le complexe

$$H^{q-1}(G,M) \oplus H^q(G,M) \xrightarrow{\delta(\chi)\cup\ \oplus\chi\cup} H^{q+1}(G,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{q+1}(H,M)$$

est exact.

Démonstration. a) La compatibilité des flèches aux cup-produits nous ramène une fois de plus à traiter le cas $q = 0$ et $M = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Alors on a une injection

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\big(H^1(G,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \to H^1(H,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})\big) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Ker}\big(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \overset{\mathrm{Cor}=0}{\to} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\big) \\
& \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}. \arrow[u, "\mathrm{Res}", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

On observe que le caractère χ engendre le groupe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathrm{Ker}\big(H^1(G,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \overset{\mathrm{Res}}{\to} H^1(H,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})\big)$ et on fait grâce au lecteur de la vérification $\rho(\chi) = 1$. Le *b*) est un corollaire immédiat du *a*) et de la suite exacte précédente. □

1.3. Application à la cohomologie galoisienne

On passe maintenant à la cohomologie galoisienne du corps k, c'est-à-dire à la cohomologie du groupe de Galois absolu $\mathcal{G} = \mathcal{G}al(k_s/k)$. La section précédente s'applique aux modules $\mathbb{Z}_l(i) := \varprojlim \mu_{l^n}^{\otimes i}$.

On note $H^q(k) = H^q(k, \mu_l^{\otimes q})$ et $\gamma \mapsto [\gamma]$ la réduction $H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))/l \to H^q(k)$. Le lemme 1.2 produit la suite exacte suivante.

Lemme 1.4. *Soit $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ un caractère surjectif et L/k l'extension cyclique de k associée. Alors on a une suite exacte*

$$H^{n-1}(k, \mathbb{Z}_l(n)) \xrightarrow{\cup\delta(\chi)} \mathrm{Ker}\big[H^{n+1}(k, \mathbb{Z}_l(n)) \to H^{n+1}(L, \mathbb{Z}_l(n))\big] \xrightarrow{\rho}$$

$$\mathrm{Ker}\big[H^n(L, \mathbb{Z}_l(n)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} H^n(k, \mathbb{Z}_l(n))\big]/(1-\sigma)H^n(L, \mathbb{Z}_l(n)) \to 0. \qquad \square$$

1.4. Spécialisation

Lemme 1.5. *Soit X/k une variété connexe lisse et x un point fermé de X. Soient M un $\mathbb{Z}_l$–module galoisien continu de type fini et n un entier.*

1. $\mathrm{Ker}\Big[H^n(k, M) \to H^n(k(X), M)\Big] \subset \mathrm{Ker}\Big[H^n(k, M) \to H^n(k(x), M)\Big]$;
2. $\mathrm{Ker}\Big[H^q(k, M) \to H^q(k(X), M)\Big]$ *est annulé par* $n_X = p.g.c.d\{[k(x) : k] \mid x \in X_0\}$;
3. *Si* $X(k) \neq \emptyset$, *alors* $\mathrm{Ker}\Big[H^q(k, M) \to H^q(k(X), M)\Big] = 0$.

Démonstration. 1) Le complété de l'anneau local $O_{X,x}$ est k–isomorphe à $k(x)[[T_1, ..., T_s]]$ (cf. [GD], th. 0.19.4 page 102), dont le corps de fractions est un sous–corps de $k(x)((T_1)) \cdots ((T_d))$. Par suite, si $\alpha \in \mathrm{Ker}\Big[H^n(k, M) \to H^n(k(X), M)\Big]$, on a $\alpha \in \mathrm{Ker}\Big[H^n(k, M) \to H^n(k(x)((T_1))...((T_s)), M)\Big]$. Le morphisme de groupes de Galois absolus $\mathcal{G}al(k(x)((T))) \to \mathcal{G}al(k(x))$ admet une section ([Se1], §II.4, exercice 2.c), donc $H^n(k(x), M)$ s'injecte dans $H^n(k(x)((T_1))...((T_s)), M)$ et ainsi α s'envoie sur 0 dans $H^n(k(x), M)$.
2) Par transfert, pour tout $x \in X_0$, on a $\mathrm{Ker}\Big[H^n(k, M) \to H^n(k(X), M)\Big]$ d'où l'assertion.
3) Si $X(k) \neq \emptyset$, alors $n_X = 1$. L'assertion précédente donne immédiatement $\mathrm{Ker}\Big[H^q(k, M) \to H^q(k(X), M)\Big] = 0$. $\square$

2. Le complexe de Hilbert 90 l-adique

On considère l'hypothèse suivante :

$\mathbf{BK_l(q-1)}$: le symbole galoisien $\mathbf{K_r^M(F)/l \to H^r(F)}$ est bijectif pour tout $\mathbf{r \leq q-1}$ et pour toute extension $\mathbf{F/k}$.

2.1. Conséquences de l'assertion $\mathbf{BK_l(q-1)}$, I

Dans cette section, nous allons examiner quelques conséquences de l'assertion $BK_l(q-1)$. Pour tout entier positif n, on rappelle les suites exactes

$$0 \to H^n(k, \mathbb{Z}_l(q))/l \to H^n(k, \mu_l^{\otimes q}) \xrightarrow{\delta} {}_lH^{n+1}(k, \mathbb{Z}_l(q)) \to 0 \qquad (2.1)$$

et

$$0 \to H^n(k, \mathbb{Z}_l(q)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to H^n(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q)) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(k, \mathbb{Z}_l(q))_{tors} \to 0. \quad (2.2)$$

Par hypothèse, pour toute extension F/k, on a $K_r^M(F)/l \xrightarrow{\sim} H^r(F)$, donc $H^r(F, \mathbb{Z}_l(q-1))/l \xrightarrow{\sim} H^r(F)$ pour $r \leq q-1$. On a donc pour tout $r \leq q-1$ les annulations

$${}_lH^{r+1}(F, \mathbb{Z}_l(r)) = 0 \text{ donc } H^{r+1}(F, \mathbb{Z}_l(r))_{tors} = 0.$$

Pour toute extension E/F cyclique de degré l et de groupe $\langle\sigma\rangle$, le noyau $\mathrm{Ker}\Big(H^{r+1}(F, \mathbb{Z}_l(r)) \to H^{r+1}(E, \mathbb{Z}_l(q))\Big)$ est de l–torsion et le lemme 1.4 montre alors que le complexe

$$H^r(E, \mathbb{Z}_l(r)) \xrightarrow{1-\sigma} H^r(E, \mathbb{Z}_l(r)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_F^E} H^r(F, \mathbb{Z}_l(r))$$

est exact. C'est l'assertion "Hilbert 90 l-adique" en degré $r \leq q-1$.

Lemme 2.1. *On suppose l'assertion, $BK_l(q-1)$ vérifiée et la présence dans k d'une racine primitive l–ième de l'unité ζ. Le morphisme composé*

$$K_{q-1}^M(k)/l \xrightarrow{\{\zeta\}\times} {}_lK_q^M(k) \xrightarrow{h_k} {}_lH^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$$

est surjectif.

Démonstration. Si $q = 0$, le lemme est trivial, on peut donc supposer $q \geq 1$. On dispose d'un isomorphisme $\theta : \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q-1) \xrightarrow{\times\zeta} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q-1) \otimes \mu_l$. Suivant l'hypothèse de récurrence, on a un isomorphisme $H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))/l \xrightarrow{\sim} H^{q-1}(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q-1))$; le composé

$$\Theta : H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))/l \xrightarrow{\sim} H^{q-1}(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q-1)) \overset{\theta_*}{\xrightarrow{\sim}} H^{q-1}(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q)) \xrightarrow{\delta} {}_lH^q(k, \mathbb{Z}_l(q)).$$

est donc surjectif. Pour voir qu'il s'agit bien du cup-produit par (ζ), la méthode habituelle d'écrire $H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1)) = H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} H^0(k, \mathbb{Z}_l)$ ramène au cas $q = 0$. Alors le composé $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^0(k, \mu_l) \to {}_lH^1(k, \mathbb{Z}_l(1))$ envoie 1 sur $h(\zeta)$. Par hypothèse, le symbole galoisien $K_{q-1}^M(k)/l \to H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))/l = H^{q-1}(k)$ est surjectif, ce qui finit la démonstration. □

La première partie de la proposition suivante est due à Bloch sur un thème de Milnor-Tate ([Mr], corollary 5.8 p. 339) comparant les symboles galoisiens entre k et $k(t)$.

Proposition 2.2. *On suppose l'assertion $BK_l(q-1)$ vérifiée.*
a) ([B2] théorème 3.1)

$$\mathrm{Coker}\big[K_q^M(k)/l \to H^q(k)\big] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\big[K_q^M(k(t))/l \to H^q(k(t))\big]$$

$$\textit{et} \quad \mathrm{Ker}\big[K_q^M(k)/l \to H^q(k)\big] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big[K_q^M(k(t))/l \to H^q(k(t))\big].$$

b) ${}_lH^{q+1}(k,\mathbb{Z}_l(q)) = {}_lH^{q+1}(k(t),\mathbb{Z}_l(q))$.

Démonstration. *b)* Le lemme 1.5 montre l'injectivité de ${}_lH^{q+1}(k,\mathbb{Z}_l(q)) \to {}_lH^{q+1}(k(t),\mathbb{Z}_l(q))$. Pour la surjectivité, on utilise la surjection $\delta : H^q(k(t)) \to {}_lH^{q+1}(k(t),\mathbb{Z}_l(q))$. Soit $\gamma \in H^q(k(t))$. Suivant la remarque page 123 de [Se1] et l'hypothèse de récurrence appliquée aux corps résiduels $k(x)$, cet élément s'écrit

$$\gamma = \gamma_0 + \sum_{x\in\mathbb{A}^1_k} \mathrm{Cor}_k^{k(x)}\big((t-y_x)\cup h_l(r_x)\big),$$

où $\gamma_0 \in H^q(k)$, et $h_l(r_x) \in K_{q-1}^M(k(x))/l \xrightarrow{\sim} H^{q-1}(k(x))$ est le résidu en x de γ et $t-y_x$ une uniformisante au point x. Le symbole galoisien $K_q^M(k(t))/l \to H^q(k(t))$ factorise par $H^q(k(t),\mathbb{Z}_l(q))/l$. D'après la suite exacte (2), le bord δ est nul sur les symboles, donc $\delta\big(\gamma\big) = \delta(\gamma_0)$. □

2.2. Conséquences de l'assertion $\mathbf{BK_l(q-1)}$, II

On suppose dans cette section que k contient une racine primitive l–ième de l'unité ζ. Soit $L = k(\sqrt[l]{s})/k$ une extension cyclique de groupe $\Gamma = \langle\sigma\rangle = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. On note $V(L/k)$ l'homologie du complexe

$$H^q(L,\mathbb{Z}_l(q)) \xrightarrow{(1-\sigma)} H^q(L,\mathbb{Z}_l(q)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} H^q(k,\mathbb{Z}_l(q)).$$

De façon analogue, on note $V(L/k,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ l'homologie du complexe

$$H^q(L) \xrightarrow{(1-\sigma)} H^q(L) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} H^q(k).$$

Lemme 2.3. *On suppose l'assertion $BK_l(q-1)$ vérifiée.*
a) On a un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}\big[H^{q+1}(k,\mathbb{Z}_l(q)) \xrightarrow{\mathrm{Res}_k^L} H^{q+1}(L,\mathbb{Z}_l(q))\big] \overset{\rho}{\xrightarrow{\sim}} V(L/k).$$

b) Les complexes

$$H^{q-1}(L,\mathbb{Z}_l(q-1)) \xrightarrow{(1-\sigma)} H^{q-1}(L,\mathbb{Z}_l(q-1)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} H^{q-1}(k,\mathbb{Z}_l(q-1))$$

et

$$H^{q-1}(k) \oplus H^{q-1}(L) \xrightarrow{\left(\mathrm{Res}_k^L,(1-\sigma)\right)} H^{q-1}(L) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} H^{q-1}(k)$$

sont exacts.
c) Soit $\beta \in H^q(L,\mathbb{Z}_l(q))$ tel que $\mathrm{Cor}_k^L(l\beta) = 0$. Alors $l\,\beta \in (1-\sigma)H^q(L,\mathbb{Z}_l(q))$.
d) $\mathrm{Res}_k^L\big({}_lH^q(k,\mathbb{Z}_l(q))\big) \subset (1-\sigma)H^q(L,\mathbb{Z}_l(q))$.

Démonstration. *a*) Pour tout scalaire $c \in k^\times$, on note $\chi_c \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ le caractère associé à $(c) \in H^1(k, \mu_l) \approx H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Le lemme 1.4 montre que l'on a une suite exacte

$$H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q)) \xrightarrow{\cup\delta(\chi_s)} \mathrm{Ker}\big[H^{q+1}(k, \mathbb{Z}_l(q)) \to H^{q+1}(L, \mathbb{Z}_l(q))\big] \xrightarrow{\rho} V(L/k) \to 0.$$

Soit $\alpha \in H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q))$. Nous allons voir que $\alpha \cup \delta(\chi_s) = 0$. Dans ce but, on considère l'extension $k(t)$ et $\alpha \cup \delta(\chi_t) \in {}_lH^{q+1}(k(t), \mathbb{Z}_l(q))$. La proposition 2.2.b montre que $\alpha \cup \delta(\chi_t)$ est une classe constante, i.e. venant de $\gamma_0 \in {}_lH^{q+1}(k, \mathbb{Z}_l(q)))$. On a $(\chi_t)_{k((t-1))} = 0$ donc

$$\gamma_0 \in \mathrm{Ker}\Big(H^{q+1}(k, \mathbb{Z}_l(q)) \to H^{q+1}(k((t-1)), \mathbb{Z}_l(q)) \Big).$$

Le lemme 1.5 montre alors que $\gamma_0 = 0$. Ainsi $\alpha \cup \delta(\chi_t) = 0$. Or $(\chi_t)_{k((s-1))} = (\chi_s)_{k((s-1))} = 0$ et le même argument montre que $\alpha \cup \delta(\chi_s) = 0$.
b) La première assertion a déjà été démontrée au début du §2.1. On en tire la suite exacte

$$H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))/l \oplus H^{q-1}(L, \mathbb{Z}_l(q-1))/l \xrightarrow{\mathrm{Res}_k^L \oplus (1-\sigma)} H^{q-1}(L, \mathbb{Z}_l(q-1))/l$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Cor}_k^L} H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))/l.$$

L'assertion résulte alors de l'hypothèse de récurrence.
c) Par transfert, on peut supposer que k possède une racine primitive l–ième de l'unité ζ. Soit $\beta \in H^q(L, \mathbb{Z}_l(q))$ tel que $\mathrm{Cor}_k^L(l\beta) = l\,\mathrm{Cor}_k^L(\beta) = 0$. D'après le lemme 2.1, il existe $\gamma_0 \in H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))$ satisfaisant $\mathrm{Cor}_k^L(\beta) = h(\zeta) \cup \gamma_0$. Notant toujours $N = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{l-1}$, on observe que

$$\begin{aligned} l\,\beta &= \mathrm{Res}_k^L\big[\mathrm{Cor}_k^L(\beta)\big] + (l-N)\beta \\ &= h(\zeta) \cup \gamma_0 + (l-N)\beta \\ &= (1-\sigma).\Big(h(\sqrt[l]{s}) \cup \gamma_0\Big) + (l-N).\beta \end{aligned}$$

et que $l - N \in (1-\sigma)\mathbb{Z}[\Gamma]$; on en déduit $l\beta \in (1-\sigma).H^q(L, \mathbb{Z}_l(q))$. L'assertion *d*) a été démontrée au passage. □

Proposition 2.4. [MS, §15] *On suppose l'assertion $BK_l(q-1)$ vérifiée. La suite*

$$H^{q-1}(k) \xrightarrow{(s)\cup} H^q(k) \xrightarrow{\mathrm{Res}_k^L} H^q(L)$$

est exacte. □

Cette suite peut être prolongée à gauche (*loc. cit.*). Notons que si $l = 2$, la proposition résulte de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de modules galoisiens $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to R_{L/k}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.

Lemme 2.5. [GS, 7.5.10] $\delta(\chi_s) = -(\zeta) \cup (s) \in H^2(k)$. □

Démonstration de la proposition 2.4. L'assertion *b*) du lemme 2.3 jointe au lemme 1.3.b montre que le noyau de la restriction $H^q(k) \to H^q(L)$ est engendré par $\chi_s \cup H^{q-1}(k) + \delta(\chi_s) \cup H^{q-2}(k)$. Le lemme entraîne la proposition. □

3. Schémas de Severi-Brauer des algèbres cycliques

Le but de cette section est de rappeler une construction de cocycles explicites pour les algèbres cycliques en la généralisant au cadre des algèbres d'Azumaya, et du groupe de Brauer-Grothendieck [G].

3.1. Cocycles explicites

Soit S/k une variété lisse. Soient d un entier inversible dans k et $\pi : S' \to S$ un revêtement étale galoisien de groupe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ de classe $[\pi] \in H^1_{ét}(S, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$. Soit $a \in H^0(S, \mathbb{G}_m)$. On note $(a, S'/S, \sigma)$ la S-algèbre d'Azumaya "cyclique" (par analogie avec le cas où S est un corps) définie par

$$(a, S'/S, \sigma) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} O_{S'}\, z^i,$$

avec la multiplication $z^d = a$, $\lambda z = z({}^{\sigma}\lambda)$ $(\lambda \in O_{S'})$. On note

$$\widetilde{f_a} : \mathbb{A}^d_S \to \mathbb{A}^d_S$$

l'automorphisme défini sur la base $(e_i)_{0,\dots,d-1}$ de l'espace affine $\mathbb{A}^d$ par

$$\widetilde{f_a}(e_i) = e_{i+1} \quad (i = 0, \dots, d-2), \;\; \widetilde{f_a}(e_{d-1}) = a\, e_0.$$

On note f_a son image dans $\mathrm{PGL}_d(S)$; l'automorphisme f_a de $\mathbb{P}^{d-1}_S$ est d'ordre d.

Lemme 3.1. *L'élément f_a définit un 1–cocycle*

$$z(a) : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{PGL}_d(S) \to \mathrm{PGL}_d(S'), \;\; 1 \mapsto f_a$$

et la classe $[z(a)] \in H^1(S'/S, \mathrm{PGL}_d)$.

a) $[z(a)] = \Big[(a, S'/S, \sigma)\Big]$.

b) *On note $\Delta : H^1(S, \mathrm{PGL}_d) \to \mathrm{Br}(S)$ le bord associé à la suite exacte de S–groupes $1 \to \mathbb{G}_{m,S} \to \mathrm{GL}_{d,S} \to \mathrm{PGL}_{d,S} \to 1$. Alors on a*

$$\Delta([z(a)]) = -\delta([\pi]) \cup (a).$$

Démonstration. *a*) On note $\mathcal{A} = {}_{z(a)}M_d$ la S–algèbre Azumaya tordue par le cocycle $z(a)$. La démonstration dans le cas des corps [GS, 2.5.2] s'étend et produit un isomorphisme canonique $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} (a, S'/S, \sigma)$.
b) On peut supposer S connexe et vu que $\mathrm{Br}(S)$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(k(S))$ ([G], II, corollaire 1.8 page 73), on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(k)$ et $S' = \mathrm{Spec}(k')$

où k' est une $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$–algèbre étale. Le diagramme commutatif suivant de suites exactes de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$–groupes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & k^\times & \longrightarrow & \mathrm{GL}_d(k) & \longrightarrow & \mathrm{PGL}_d(k) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & (k')^\times & \longrightarrow & \mathrm{GL}_d(k') & \longrightarrow & \mathrm{PGL}_d(k') & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

donne lieu au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathrm{PGL}_d(k)) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, k^\times) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathrm{PGL}_d(k')) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, k'^\times), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les flèches de bord. ce diagramme s'identifie via la périodicité de la cohomologie des groupes cycliques à

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathrm{PGL}_d(k))/\mathrm{Int}\big(\mathrm{PGL}_d(k)\big) & \xrightarrow{\Delta_1} & k^\times/k^{\times d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathrm{PGL}_d(k')) & \xrightarrow{\Delta_2} & k^\times/N_{k'/k}(k'^\times). \end{array}$$

On note $f_{a,\sharp} : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{PGL}_d(k')$ le morphisme de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ groupes envoyant 1 sur f_a. On a $[z(a)] = f_{a,\sharp,*}(\pi)$ dans $H^1(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathrm{PGL}_d(k'))$, donc $\Delta_2([z(a)]) = \Delta_1(f_a) = \big[(\widetilde{f_a})^d\big] = a \bmod N_{k'/k}(k'^\times)$. Comme la flèche $k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) \to H^2(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, k'^\times) \to \mathrm{Br}(k)$ est le cup–produit par $\delta([\pi])$ ([GS], chapter 4, proposition 7.3), le bord de $[z(a)]$ dans $\mathrm{Br}(k)$ est la classe $-\delta([\pi]) \cup (a)$. □

Ainsi, le lemme associe à la donnée $(a, S'/S, \sigma)$ le 1–cocycle

$$z(a) : \mathcal{G}al(S'/S) \to \mathrm{PGL}_d(S')$$

défini par $z(a)_\sigma = f_a$. Le tordu du schéma $\mathbb{P}^{d-1}$ selon le cocycle $z(a)$ par l'action de PGL_d sur $\mathbb{P}^{d-1}$ définit le schéma de Severi-Brauer

$$X/S = X(a, S'/S, \sigma)/S =_{z(a)}\Big(\mathbb{P}^{d-1}_S\Big)$$

de la S–algèbre d'Azumaya cyclique $(a, S'/S, \sigma)$.

3.2. Un ouvert de X/S

Pour $j = 0, ..., d-1$, on note H_j l'hyperplan projectif de $\mathbb{P}^{d-1}$ défini par l'équation $x_j = 0$. Le fermé

$$\bigcup_{j=0,\dots,d-1} H_j \underset{k}{\times} S' \subset \mathbb{P}^{d-1}_{S'}$$

se descend via $z(a)$ à S et définit donc un sous-schéma fermé $Y = Y(a, S'/S, \sigma)/S$ de $X(a, S'/S, \sigma)/S$; on pose alors

$$U/S = U(a, S'/S, \sigma)/S = X \setminus Y.$$

Notant $U'/S' = U \times_S S' \xrightarrow{\sim} \big(\mathbb{P}^{d-1} \setminus \cup_j H_j\big) \times_S S' = (\mathbb{G}_{m,S'})^{d-1}$, on considère la fonction

$$g = x_0/x_1 \in H^0(U', \mathbb{G}_m).$$

Vu que ${}^{\sigma}g = g$, la norme pour l'action tordue de la fonction g n'est pas autre chose que

$$N_{U'/U}(g) = \prod_{i=0}^{d-1} (f_a^*)^i (x_0/x_1)$$

qui s'explicite en

$$N_{U'/U}(g) = x_0/x_1 \times a x_d/x_0 \times x_{d-1}/x_d \cdots \times x_{d-2}/x_{d-1} \times \cdots \times x_2/x_1 = a.$$

Il résulte que $a_{/U} \in N_{U'/U}\big(H^0(U', \mathbb{G}_m)\big)$.

Lemme 3.2. *L'ouvert U/S est naturellement isomorphe à*

$$\{y \mid N_{S'/S}(y) = a\} \subset R_{S'/S}(\mathbb{G}_m)$$

Démonstration. On peut supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $S' = \mathrm{Spec}(S')$ affines. On a $U' = (\mathbb{G}_{m,S'})^d/\mathbb{G}_{m,S'} \subset \mathbb{P}^{d-1}_{S'}$. On considère l'isomorphisme

$$(\mathbb{G}_m)^d/\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\Big(\mathbb{G}_m^d \overset{\prod}{\to} \mathbb{G}_m\Big)$$

donné par $(x_i)_{i=0,\dots,d-1} \mapsto (x_1/x_0, x_2/x_1, ..., x_{d-1}/x_{d-2}, x_0/x_{d-1})$. Par suite

$$U' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\Big(\mathbb{G}_m^d \overset{\prod}{\to} \mathbb{G}_m\Big) \times_k S'.$$

Pour tout anneau B/A, on note $B' = B \otimes_A A'$ et en lisant l'action de f_a sur les nouvelles coordonnées, on obtient

$$U(B) = \{y = (y_0, ..., y_{d-1}) \in (B'^{\times})^d \mid y_0 y_1 ... y_{d-1} = 1, f_a({}^{\sigma}y) = y\}.$$

Si $y \in U(B)$, on a $y_1 = {}^{\sigma}y_0$, $y_2 = {}^{\sigma^2}y_0$, ..., $y_{d-2} = {}^{\sigma^{d-2}}y_0$, $y_{d-1} = a\,{}^{\sigma^{d-1}}y_0$. Par suite,

$$U(B) = \{y_0 \in (B'^{\times})^d \mid N_{S'/S}(y_0) = a^{-1}\} = V(B),$$

où $V = \{y \mid N_{S'/S}(y) = a^{-1}\} \subset R_{S'/S}(\mathbb{G}_m)$. On conclut que l'on a un S–isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} V$. $\square$

4. Formulation équivalente de la conjecture

Toute la fin de l'article va être consacrée à étudier le cas particulier suivant du théorème d'Hilbert 90 pour la cohomologie l-adique, en prenant avec soi l'assertion $BK_l(q-1)$. C'est l'assertion suivante dont on va montrer qu'elle est en fait équivalente à la conjecture de Bloch-Kato en degré q.

Hilbert 90 l-adique pour les symboles. *Pour toute extension de corps F/k, pour toute extension cyclique E/F de groupe $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \langle\sigma\rangle$ et tout*

$$\beta \in \mathrm{Im}\Big(K_q^M(E) \to H^q(E, \mathbb{Z}_l(q))\Big),$$

tel qu'il existe $\beta_0 \in H^q(F, \mathbb{Z}_l(q))$ satisfaisant

$$\mathrm{Cor}_F^E(\beta) = l\,\beta_0,$$

on a

$$\beta - \mathrm{Res}_F^E(\beta_0) \;\in (1-\sigma).H^q(E, \mathbb{Z}_l(q)).$$

Notons tout de suite la conséquence modulo l de cette assertion, c'est-à-dire l'exactitude du complexe

$$H^q(F, \mathbb{Z}_l(q))/l \oplus H^q(E, \mathbb{Z}_l(q))/l \xrightarrow{\mathrm{Res}_F^E \oplus (1-\sigma)} \mathrm{Im}\Big(K_q^M(E)/l \to H^q(E, \mathbb{Z}_l(q))/l\Big)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Cor}_F^E} H^q(F, \mathbb{Z}_l(q))/l.$$

4.1. Utilisation du lemme de Bass-Tate

On considère le cas $F = k$ et d'une extension cyclique $E = L = k(\sqrt[l]{s})$. Le problème d'Hilbert 90 pour les symboles est un problème de l–torsion, il est donc loisible d'effectuer par transfert une extension finie de corps de degré premier à l. Cela pemet, en utilisant le lemme de Bass-Tate ([BT], Corollary 5.3 p. 577), de ramener la démonstration du "théorème 90 de Hilbert pour les symboles" au cas particulier où

$$\beta = h\Big(\sum_{i=1,\ldots,n} \{c_i, b_i\}\Big), \;\; c_i \in L^\times,\; b_i \in K_{q-1}^M(k), \quad \zeta \in k.$$

Par hypothèse, il existe $\beta_0 \in H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$ satisfaisant $\mathrm{Cor}_k^L(\beta) = l\,\beta_0$, c'est-à-dire

$$h\Big(\sum_{i=1,\ldots,n} \{a_i, b_i\}\Big) = l\,\beta_0 \in H^q(k, \mathbb{Z}_l(q)),$$

où l'on a posé

$$a_i = N_{L/k}(c_i) \in k^\times \;\; (i = 1, ..., n).$$

Sous cette forme-là, nous allons voir qu'il existe un cas "versel" du problème de Hilbert 90 pour les symboles au sens du §5.1 de [GMS]. Le candidat nous est donné par la théorie des extensions déployantes génériques d'Amitsur ([A], §11).

4.2. Le cas versel

On note $T = \mathbb{G}_m$, $\pi : T' = \mathbb{G}_m \stackrel{\times l}{\to} \mathbb{G}_m = T$ le morphisme de Kummer; on note $T = \mathrm{Spec}(k[t^{\pm 1}])$, $T' = \mathrm{Spec}(k[t'^{\pm 1}])$ et on a $\pi^*(t) = (t')^l$. Le morphisme π est un revêtement étale galoisien de groupe $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$, où $\sigma.t' = \zeta.t'$. On considère les schémas de Severi-Brauer définis au §3

$$X_i/T := X\big(a_i, T'/T, \sigma\big)/T$$

des T-algèbres d'Azumaya cycliques $A_\zeta(t, a_i)$ et $X_i' = X_i \underset{T}{\times} T' \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_k^{l-1} \underset{T}{\times} T'$. On note U_i/T l'ouvert de X_i défini au §3.2 (resp. $U_i' = U_i \underset{T}{\times} T'$) et on rappelle l'existence d'une fonction $g_i \in H^0(U_i', \mathbb{G}_m)$ satisfaisant

$$N_{U_i'/U_i}(g_i) = a_i.$$

On pose

$$X = X_1 \underset{T}{\times} X_2 \underset{T}{\times} \cdots \underset{T}{\times} X_n, \quad X' = X \underset{T}{\times} T' \xrightarrow{\sim} \big(\mathbb{P}_k^{l-1}\big)^n \underset{k}{\times} T'$$

et

$$U = U_1 \underset{T}{\times} U_2 \underset{T}{\times} \cdots \underset{T}{\times} U_n, \ \ U' = U \underset{T}{\times} T' \xrightarrow{\sim} \big(\mathbb{G}_{m,T'}\big)^{n(l-1)}.$$

On peut alors définir l'objet clef de cette construction géométrique, à savoir la classe verselle

$$\beta^{versel} := \sum_{i=1,\dots,n} h_{U'}(g_i) \cup h_{U'}(b_i) \ \in H^q(U', \mathbb{Z}_l(q)),$$

où $H^q(U', \mathbb{Z}_l(q))$ désigne la cohomologie étale continue de Jannsen [J] et $h_{U'} : H^0(U', \mathbb{G}_m) \to H^1(U', \mathbb{Z}_l(1))$ le symbole. Cette théorie généralise la cohomologie galoisienne continue de Tate; elle est munie de transferts pour les morphismes finis étales. La formule de projection donne alors

$$\mathrm{Cor}_U^{U'}(\beta^{versel}) = \Big(\sum_{i=1,\dots,n} h(a_i) \cup h(b_i)\Big)_{/U} = l \times \beta_{0,U} \quad \in \quad H^q(U, \mathbb{Z}_l(q))$$

et β^{versel} définit une classe

$$[\beta^{versel} - \beta_{0,U'}] \in V(U'/U),$$

où

$$V(U'/U) := \mathrm{Ker}\Big(H^q(U', \mathbb{Z}_l(q)) \stackrel{\mathrm{Cor}}{\to} H^q(U, \mathbb{Z}_l(q))\Big)/(1-\sigma).H^q(U', \mathbb{Z}_l(q))\,.$$

On voit $s \in k^\times$ comme un point k–rationnel de T. Le qualificatif "versel" est alors justifié par le

Lemme 4.1. *Pour tout $x \in U(k)$ au-dessus $s \bmod (k^\times)^l \subset T(k)$ et tout k–isomorphisme $\kappa : \mathrm{Spec}(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(k(x)) \underset{U}{\times} U'$, on a*

$$[\beta^{versel} - \beta_{0,U'}](x) \overset{\kappa^*}{\xrightarrow{\sim}} [\beta - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0)] \in V(L/k).$$

Démonstration. On note $\mathrm{Spec}(k(x')) = \mathrm{Spec}(k(x)) \times_U U'$ et on se donne un isomorphisme $\kappa^* : k(x') \xrightarrow{\sim} L$. Alors

$$\begin{aligned}\big[\beta^{versel} - \beta_{0,U'}\big](x) &= \big[\beta^{versel}(x') - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0)\big] \\ &= \Big[h\big(\sum_i \{g_i(x'), b_i\}\big)\Big] \in V\big(\,k(x')/k(x)\big) \xrightarrow{\sim} V(L/k).\end{aligned}$$

Or $N_{L/k}(g_i(x')) = N_{U'/U}(g_i)(x) = a_i = N_{L/k}(c_i)$, donc le théorème 90 classique montre que $g_i(x')c_i^{-1} \in (1-\sigma).L^\times$. Par suite, on a

$$\beta^{versel}(x') - \beta = h\Big(\sum_i \{g_i(x'), b_i\} - \{c_i, b_i\}\Big) \in (1-\sigma)H^q(L, \mathbb{Z}_q(q)),$$

d'où $[\beta^{versel} - \beta_{0,U'}](x) = [\beta - \beta_{0,L}] \in V(L/k)$. □

On rappelle la notation $k(t) = k(T)$, $k(t') = k(T')$ avec $(t')^l = t$ et on note $k(X)$ (resp. $k(X')$) le corps de fonctions de la variété X/k (resp. X'/k). On a le diagramme d'extensions

$$\begin{array}{ccccc} & & k(X') & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ k(t') & & & & k(X), \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & k(t) & & \end{array}$$

où $k(t')/k(t)$ et $k(X')/k(X)$ sont galoisiennes de groupe $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \langle\sigma\rangle$. Notons que l'extension $k(X')/k$ est transcendante pure.

Remarque 4.2. Le corps $k(X)$ n'est pas en général une extension transcendante pure de k. En effet, un ouvert de X/k est donné par le tore des normes communes

$$S = \Big\{N_{k_1/k}(y_1) = N_{k_2/k}(y_2) = \cdots = N_{k_n/k}(y_n) = t \neq 0\Big\} \subset \Big(\prod_{i=1,\dots,n} R_{k_i/k}\mathbb{G}_m\Big) \underset{k}{\times} T,$$

où $k_i = k(\sqrt[l]{a_i})$. Ce tore S n'est pas en général une variété stablement k–rationnelle, on le voit en utilisant la R–équivalence sur les tores [CTS]. Le groupe $S(k)/R$ des classes de R–équivalence est isomorphe au groupe

$$\Big(\bigcap_{i=1,..,n} N_{k_i/k}(k_i^\times)\Big) / \,(k^\times)^l.N_{M/k}(M^\times),$$

où $M = k_1.k_2...k_n$ ([Gi]) et ce groupe est en général non trivial lorsque $n \geq 3$ pour $l = 2$ (*loc. cit*, [STW]) et $n \geq 2$ pour $l \neq 2$ ([Me1], §2). Ainsi, dans ces cas, la variété X n'est pas stablement k–rationnelle.

En travaillant avec les coefficients finis, nous allons voir que la trivialité de la classe verselle générique $[\beta^{versel}_{k(X')} - \mathrm{Res}_k^{k(X')}(\beta_0)] \in V(k(X')/k(X))$ implique davantage que la trivialité de $[\beta - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0)] \in V(L/k)$,

Lemme 4.3. *On suppose l'asssertion $BK_l(q-1)$ vérifiée et que*

$$\big[\beta^{versel}_{k(X')} - \mathrm{Res}_k^{k(X')}(\beta_0)\big] \in (1-\sigma).H^q(k(X')),$$

ce qui est le cas en particulier si le problème de Hilbert 90 l-adique est résolu pour $k(X')/k(X)$ et la classe $\beta^{versel}_{k(X')} - \mathrm{Res}_k^{k(X')}(\beta_0)$. Alors on a :

a) $\beta_0 \in \mathrm{Im}\big(K_q^M(k) \to H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))\big) + l\, H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$,

b) $\sum_{i=1}^{n} \{a_i, b_i\} \in lK_q^M(k)$,

c) $\beta - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0) \in (1-\sigma).\mathrm{Im}\big(K_q^M(L) \to H^q(L, \mathbb{Z}_l(q))\big) + l\, H^q(L, \mathbb{Z}_l(q))$,

d) $[\beta - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0)] = 0 \in V(L/k)$,

e) $\big[\beta^{versel}_{k(X')} - \mathrm{Res}_k^{k(X')}(\beta_0)\big] = 0 \in V\Big(k(X')/k(X)\Big)$.

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$\big[\,\beta^{versel}_{k(X')} - \beta_{0,k'(X)}\big] = (1-\sigma)\gamma,$$

avec $\gamma \in H^q(k(X'))$. Le corps $k(X')$ est transcendant pur sur k. La proposition 2.2.a montre qu'il existe $e \in K_q^M(k(X'))$ et $\gamma_0 \in H^q(k)$ tels que

$$\gamma = h_l\big(e\big) + \gamma_{0,k(X')} \in H^q(k(X')).$$

Comme γ_0 est σ–invariant, il vient

$$[\beta^{versel}_{k(X')} - \beta_{0,k(X')}] = (1-\sigma).h_l(e) \text{ dans } H^q(k(X')). \tag{4.1}$$

La cohomologie étale à coefficients finis commute aux limites inductives filtrantes à morphismes de transition affines ([SGA4], exp. VII, corollaire 5.8), donc il existe un ouvert W de U tel que

$$[\beta^{versel}_{W'} - \beta_{0,W'}] = (1-\sigma)h_l(e) \text{ dans } H^q(W', \mu_l^{\otimes q}).$$

avec $e \in \mathrm{Im}\big(H^0(W', \mathbb{G}_m)^q \xrightarrow{symbole} K_q^M(k(X'))\big)$. Par spécialisation en un point k–rationnel x' de $W'(k)$ au dessus de $(s_0)^l s \in k^\times$ pour un scalaire s_0 convenable, puisque $\beta^{versel}(x')$ est une somme de symboles, on obtient que

$$[\beta_0] \in \mathrm{Im}\big(K_q^M(k)/l \to H^q(k)\big).$$

La première assertion est démontrée. On a donc $\beta_0 = h(e_0) + l\epsilon_0$ avec $\epsilon_0 \in H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$. Par suite, on a

$$h\Big(\sum_i \{g_i, b_i\} \; - (1-\sigma)e - e_{0,k(X')}\Big) \in lH^q(k(X'), \mathbb{Z}_l(q)).$$

D'après Bloch (proposition 2.2.a), on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}\big[K_q^M(k)/l \to H^q(k)\big] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big[K_q^M(k(X'))/l \to H^q(k(X'))\big].$$

Ainsi, quitte à modifier e_0 par un élément de $\mathrm{Ker}\big[K_q^M(k) \to H^q(k)\big]$, on peut supposer que

$$\sum_i \{g_i, b_i\} \; - (1-\sigma).e - e_{0,k(X')} \; \in lK_q^M(k(X')).$$

En appliquant la norme pour l'extension $k(X')/k(X)$, il vient

$$\sum_i \{a_i, b_i\} \; \in lK_q^M(k(X)).$$

On spécialise alors en un point de $X(k)$, et on tire l'assertion b), i.e.

$$\sum_i \{a_i, b_i\} \; \in lK_q^M(k).$$

On spécialise maintenant l'identité (4.1) en x' (au dessus de $x \in W(k)$ et de $s_0\sqrt[l]{s}$), alors

$$[\beta^{versel}(x') - \mathrm{Res}_k^L(\beta_0)] = (1-\sigma).h_l(e(x')) \, dans \; H^q(L),$$

et l'on déduit l'assertion c), c'est-à-dire

$$\beta - \beta_{0,L} \in (1-\sigma).\mathrm{Im}\big(K_q^M(L) \to H^q(L, \mathbb{Z}_l(q))\big) + l\, H^q(L, \mathbb{Z}_l(q)).$$

Le lemme 2.3.c appliqué à la classe $\beta - \beta_{0,L}$ montre l'assertion d), i.e.

$$\beta - \beta_{0,L} \in (1-\sigma)H^q(L, \mathbb{Z}_l(q)).$$

En particulier, cette identité vaut pour la classe verselle elle-même en remplaçant L/k par $k(X')/k(X)$. On obtient ainsi e). □

Les conséquences de ce lemme sont étonnantes.

Proposition 4.4. *On suppose que l'assertion $BK_l(q-1)$ est vérifiée et que l'assertion Hilbert 90 l–adique pour les symboles vaut pour k en degré q.*

a) Le symbole galoisien $K_q^M(k)/l \to H^q(k)$ est injectif.

b) La suite

$$K_q^M(k)/l \oplus K_q^M(L)/l \xrightarrow{\mathrm{Res}_k^L \oplus (1-\sigma)} K_q^M(L)/l \xrightarrow{N_{L/k}} K_q^M(k)/l$$

est exacte.

c) La suite

$$K_{q-1}^M(k)/l \xrightarrow{\{s,\ \}} K_q^M(k)/l \xrightarrow{N_{L/k}} K_q^M(L)/l$$

est exacte.

Démonstration. *a*) On suppose que $\sum_i \{a_i, b_i\}$ appartient au noyau de $K_q^M(k) \to H^q(k, \mathbb{Z}_q(q))/l \hookrightarrow H^q(k)$, avec $a_i \in k^\times$, $b_i \in K_{q-1}^M(k)$. En d'autres mots, il existe un élément $\beta_0 \in H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$ satisfaisant

$$h\Big(\sum_i \{a_i, b_i\}\Big) = l\,\beta_0.$$

Le lemme 4.3.b montre que $\sum_i \{a_i, b_i\} \in l K_q^M(k)$.

b) Soit $c \in K_q^M(L)$ satisfaisant $h_l\big(\mathrm{Cor}_k^L(\beta)\big) = 0$. Il existe donc $\beta_0 \in H^q(k, \mathbb{Z}_l(q))$ satisfaisant $h\big(N_{L/k}(c)\big) = l\,\beta_0$. Il est loisible d'effectuer une extension de degré premier à l et donc de se trouver exactement dans la situation du lemme 4.3. Suivant le lemme 4.3.a+c, il existe $c_0 \in K_q^M(k)$, $e \in K_q^M(L)$ tel que

$$h_l(c) = h_l(c_0)_L + (1-\sigma) h_l(e).$$

Comme le symbole galoisien est injectif, il vient

$$c = c_{0,L} + (1-\sigma).e \in K_q^M(L)/l.$$

c) L'injectivité du symbole galoisien et la proposition 2.4 impliquent immédiatement l'exactitude de la suite $K_{q-1}^M(k)/l \xrightarrow{\{s,\ \}} K_q^M(k)/l \xrightarrow{\mathrm{Res}_k^L} K_q^M(L)/l$. □

4.3. Version l–adique du théorème de Suslin-Voevodsky

La proposition 4.4 est l'ingrédient principal de la démonstration de la formulation équivalente suivante de la conjecture de Bloch-Kato (cf. introduction).

Théorème 4.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Le groupe $H^q(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q))$ est divisible pour tout corps F/k,

ii) Le bord $H^q(F, \mu_l^{\otimes q}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(F, \mu_l^{\otimes q})$, associé à la suite exacte $0 \to \mu_l^{\otimes q} \to \mu_{l^2}^{\otimes q} \to \mu_l^{\otimes q} \to 1$, est trivial pour tout corps F/k,

iii) Hilbert 90 l–adique en degré q,

iv) Hilbert 90 l–adique en degré q pour les symboles,

v) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien $h_{l,F} : K_q^M(F)/l \to H^q(F)$ est bijectif,

vi) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien $h_{l,F} : K_q^M(F)/l \to H^q(F)$ est surjectif.

Remarque 4.6. Pour le cas $l = 2$, l'équivalence principale $ii) \Longleftrightarrow v)$ est due à Merkurjev [Me2]. De plus, la preuve du théorème et de la proposition 4.4 sont largement inspirées de la section 2 de [Me0].

Le théorème classique de Hilbert 90 donne la dernière assertion pour $q = 1$. Les autres sont réglées par le lemme suivant.

Lemme 4.7. *Le théorème* 4.5 *est vrai en degré* 1*.*

Démonstration. $i)$ On a $H^1(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)) = \varinjlim_n k^\times/(k^\times)^{l^n}$ où les flèches de transition sont $k^\times/(k^\times)^{l^n} \overset{\times l}{\to} k^\times/(k^\times)^{l^{n+1}}$. Par suite, le groupe $H^1(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$ est divisible.
$ii)$ Le morphisme $H^1(k, \mathbb{Z}/l^2(1)) \to H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(1))$ est la projection $k^\times/(k^\times)^{l^2} \to k^\times/(k^\times)^l$, donc le bord $H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(1)) \to H^2(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(1))$ est nul.
$iii)$ et $iv)$: Cela est fait au début du §2.1 comme conséquence de $i)$. □

Lemme 4.8. *On suppose* $q \geq 2$*. Chaque assertion* $i)$,...,$vi)$ *en degré* q *du théorème* 4.5 *implique la même en degré* $q - 1$*.*

Démonstration. $i)$ On note $K = k((t))$ et on rappelle la suite exacte ([Se1], p. 121)

$$0 \to H^q(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q)) \to H^q(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q)) \overset{\partial}{\to} H^{q-1}(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q-1)) \to 0.$$

Si $H^q(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q))$ est divisible, il en est donc de même de $H^{q-1}(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q-1))$.
$ii)$ C'est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^q(K, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}(q)) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q)) \\
\partial\downarrow & & \partial\downarrow \\
H^{q-1}(k, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}(q-1)) & \xrightarrow{\delta} & H^q(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q-1)).
\end{array}$$

$iii)$ Dans le cadre de la cohomologie continue ([J], theorem 3.3), on dispose d'une suite exacte analogue

$$0 \to H^q(k, \mathbb{Z}_l(q)) \to H^q(K, \mathbb{Z}_l(q)) \overset{\partial}{\to} H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1)) \to 0.$$

Soit L/k une extension cyclique de degré l. Soit σ un générateur de $\mathcal{G}al(L/k)$. On considère le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc}
H^q(L((t)), \mathbb{Z}_l(q)) & \xrightarrow{1-\sigma} & H^q(L((t)), \mathbb{Z}_l(q)) & \xrightarrow{N_{L/k}} & H^q(k((t)), \mathbb{Z}_l(q)) \\
\partial\downarrow & & \partial\downarrow & & \partial\downarrow \\
H^{q-1}(L, \mathbb{Z}_l(q-1)) & \xrightarrow{1-\sigma} & H^q(L, \mathbb{Z}_l(q-1)) & \xrightarrow{N_{L/k}} & H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))
\end{array}$$

Ce morphisme est en fait scindé par le cup-produit $\alpha \to h(-t) \cup \alpha$. Ainsi "Hilbert 90" pour $L((t))/k((t))$ en degré q entraîne-t-il "Hilbert 90" pour L/k en degré $q - 1$.

iv) On raffine l'argument précédent en supposant cette fois "Hilbert 90 pour les symboles" pour $L((t))/k((t))$ en degré q. Soit donc $b \in K_{q-1}^M(L)$ tel qu'il existe $\beta_0 \in H^{q-1}(k, \mathbb{Z}_l(q-1))$ satisfaisant $N_{L/k}\big(h(b)\big) = l\,\beta_0$. On écrit alors

$$h\big(\{-t, b\}\big) = h(-t) \cup \beta_0 + (1-\sigma).\gamma, \quad \gamma \in H^q(L((t)), \mathbb{Z}_l(q)).$$

On décompose $\gamma = \gamma_1 + h(-t) \cup \gamma_2$ avec $\gamma_1 \in H^q(L, \mathbb{Z}_l(q))$ et $\gamma_2 \in H^{q-1}(L, \mathbb{Z}_l(q-1))$. Il vient

$$h\big(\{-t, b\}\big) = h(-t) \cup \Big(\beta_0 + (1-\sigma)\gamma_2\Big) \;+\; (1-\sigma).\gamma_1.$$

On applique le résidu $\partial : H^q(L((t)), \mathbb{Z}_l(q)) \to H^{q-1}(L, \mathbb{Z}_l(q-1))$ et on conclut que $h(b) = \beta_0 + (1-\sigma)\gamma_2$. On a donc bien "Hilbert 90 pour les symboles" en degré $q-1$. Enfin, pour *v*) et *vi*), c'est classique (cf. [Ka], proposition 1.2). $\square$

Démonstration. Les lemmes 4.7 et 4.8 nous permettent de procéder par récurrence sur $q \geq 2$. Nous montrons les implications *i*) $\Longrightarrow$ *iii*) $\Longrightarrow$ *iv*) $\Longrightarrow$ *v*) $\Longrightarrow$ *vi*) $\Longrightarrow$ *i*) et ensuite *i*) $\Longrightarrow$ *ii*) $\Longrightarrow$ *iv*).

i) $\Longrightarrow$ *iii*) : Fait au début du §2.1.
iii) $\Longrightarrow$ *iv*) : Évident.
iv) $\Longrightarrow$ *v*) : L'injectivité du symbole galoisien résulte de la proposition 4.4. Montrons la surjectivité. Soit $\gamma \in H^q(k)$. Alors il existe une extension galoisienne finie $\widetilde{k}/k$ contenant $\sqrt[l]{\zeta}$ telle que $\gamma_{\widetilde{k}} = 0$. Quitte à effectuer une extension finie de degré premier à l, on peut supposer que le groupe $\mathcal{G}al(\widetilde{k}/k)$ est un l–groupe fini, donc qu'il admet une suite de composition à quotients cycliques d'ordre l. Par induction, on est ramené au cas d'une extension L/k cyclique d'ordre l contenant $\sqrt[l]{\zeta}$ et telle que

$$\gamma_L = h_l(e) \in H^q(L), \quad e \in K_q^M(L).$$

On a

$$0 = \mathrm{Cor}_k^L(\gamma) = h_k\big(N_{L/k}(e)\big) \in H^q(k)$$

donc $N_{L/k}(e) = 0 \in K_q^M(k)/l$. Suivant la proposition 4.4.b, il existe $e_{0,1} \in K_q^M(k)$ et $e_1 \in K_q^M(L)$ tels que

$$e = \mathrm{Res}_k^L(e_{0,1}) + (1-\sigma).e_1 \in K_q^M(L).$$

Quitte à remplacer γ par $\gamma - h_l(e_{0,1})$, on peut supposer que

$$(*) \qquad \gamma_L = N.h_l\big((1-\sigma).e_1\big) \in \; H^q(L).$$

Premier cas : $l = 2$: Vu que $N = 1 + \sigma = 1 - \sigma \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\Gamma]$, on a

$$h_l(e) = h_l(e_1) \in H^q(L).$$

Quitte à remplacer γ par $\gamma - \mathrm{Cor}_k^L(h_l(e_1))$, on peut supposer que

$$\gamma \in \mathrm{Ker}\big(H^q(k) \to H^q(L)\big).$$

Il résulte que γ est une somme de symboles suivant la proposition 2.4.
Second cas : $l > 2$: Vu que $(1-\sigma).\gamma_L = 0$ et que $N = (1-\sigma)^{l-1}$ dans $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}[\Gamma]$, l'identité $(*)$ donne lieu à

$$N.h_l(e_1) = 0 \in H^q(L).$$

Ainsi

$$\mathrm{Cor}_k^L\big(h_l(e_1)\big) \in \mathrm{Ker}\big(H^q(k) \to H^q(L)\big).$$

Suivant la proposition 4.4.c, il existe donc $d_1 \in K_{q-1}^M(k)$ satisfaisant

$$N_{L/k}(e_1) = \{s, d_1\} \in K_q^M(k)/l.$$

Suivant la formule de projection, on a

$$N_{L/k}\Big(e_1 - \{\sqrt[l]{s}, d_1\}\Big) = 0 \in K_q^M(k)/l.$$

La proposition 4.4.b montre qu'il existe $e_{0,2} \in K_q^M(k)$ et $e_2 \in K_q^M(L)$ tels que

$$e_1 = \{\sqrt[l]{s}, d_1\} + e_{0,2} + (1-\sigma)e_2 \ \in \ K_q^M(L)/l.$$

Ainsi, vu que $(1-\sigma).(\sqrt[l]{s}) = (\zeta) = 0 \in H^1(L)$, on a

$$\gamma_L = (1-\sigma)^2 \,.\, h_l(e_2) \ \in H^q(L).$$

De proche en proche, on construit de la même façon des éléments $d_i \in K_{q-1}^M(k)$, $e_i \in K_q^M(L)$ $(i = 1, ..., l-1)$ tels que

$$\gamma_L = (1-\sigma)^i.h_l(e_i) \in H^q(L).$$

On s'arrête au cran $l-1$ car on a alors $N = (1-\sigma)^{l-1}$ dans $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}[\Gamma]$, d'où aussitôt

$$\gamma_L = h_l\Big(N_{L/k}(e_{l-1})\Big)_L \in H^q(L).$$

La proposition 2.4 permet de conclure que γ est une somme de symboles. Ceci démontre la surjectivité du symbole galoisien.

$v) \Longrightarrow vi)$: évident.
$vi) \Longrightarrow i)$: On a déjà vu au début du §2.1 que l'hypothèse entraîne $H^{q+1}(F, \mathbb{Z}_l(q))_{tors} = 0$ pour tout corps F/k. La suite des coefficients universels montre que le groupe $H^q(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q))$ est divisible.
$i) \Longrightarrow ii)$: Le bord $H^q(F, \mu_l^{\otimes q}) \to H^{q+1}(F, \mu_l^{\otimes q})$ factorise par $H^{q+1}(F, \mathbb{Z}_l(q))_{tors} = 0$. Il est donc nul.
$ii) \Longrightarrow iv)$: On reprend les notations du paragraphe précédent. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ker}\big(H^{q+1}(k(X), \mathbb{Z}_l(q)) \to H^{q+1}(k(X'), \mathbb{Z}_l(q))\big) & \xrightarrow{\rho} & V(k(X')/k(X)) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Ker}\big(H^{q+1}(k(X), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q)) \to H^{q+1}(k(X'), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q))\big) & \xrightarrow{\rho} & V(k(X')/k(X), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Vu que

$$\mathrm{Ker}\Big(H^{q+1}(k(X),\mathbb{Z}_l(q)) \to H^{q+1}(k(X'),\mathbb{Z}_l(q))\Big) \subset \mathrm{Im}\Big(H^q(k(X)) \to H^{q+1}(k(X),\mathbb{Z}_l(q))\Big),$$

l'hypothèse de nullité du bord pour $H^q(k(X)) \to H^{q+1}(k(X),\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(q))$ montre alors que

$$\big[\beta^{versel}_{k(X')} - \beta_0\big] \in (1-\sigma).H^q(k(X')),$$

ce qui entraîne suivant le lemme 4.3 l'assertion iv). □

La proposition 4.4 et le théorème $iv) \Longrightarrow v)$ impliquent la réduction suivante de la conjecture.

Corollaire 4.9. Soit q un entier positif. Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) Pour toute extension de corps F/k, le symbole galoisien $h_{l,F} : K^M_q(F)/l \to H^q(F)$ est bijectif,

ii) Pour toute extension de corps F/k et toute relation

$$h\Big(\sum_{i=1,\dots,n} \{a_i,b_i\}\Big) = l\,\beta_0 \ \in H^q(F,\mathbb{Z}_l(q)),\ a_i \in F^\times,\ b_i \in K^M_{q-1}(F), \beta_0 \in H^q(F,\mathbb{Z}_l(q))$$

alors

$$\beta^{versel} - \beta_{0,F(X')} \in (1-\sigma).H^q(F(X'),\mathbb{Z}_l(q))$$

où $F(X')$ désigne le corps associé à $a_1,\dots,a_n$ et β^{versel} la classe définie au §4.2.

Références

[A] S.A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. Math. **62** (1955), 8-43.

[BT] H. Bass et J. Tate, *The Milnor ring of a global field*, Algebraic K-Theory II, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lecture Notes Math. **342** (1973), 349-446.

[B1] S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. series IV(1980).

[B2] S. Bloch, *Torsion algebraic cycles, K_2, and Brauer groups of function fields*, The Brauer group (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1980), 75–102, Lecture Notes in Math. **844** (1981), Springer, Berlin.

[BK] S. Bloch et K. Kato, *p-adic Étale Cohomology*, Pub. Math. IHES **66** (1986), 107–152.

[CM] V.I. Chernousov et A.S. Merkurjev, *R-equivalence on spinor groups*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 509–534.

[CTS] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc, *La R–équivalence sur les tores*, Ann. Scient. ENS, vol. **10** (1977), 175–230.

[GMS] S. Garibaldi, A.S. Merkurjev et J-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, AMS University Lecture Series **28** (2003), AMS.

[Gi] P. Gille, *Examples of Non-rational Varieties of Adjoint Groups*, Journal of Algebra **193** (1997), 728–747.

[GS] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101** (2006).

[G] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I et II*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 67-87 et 88-188, North Holland (1970).

[GD] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique EGA IV.1*, Publ. Math. IHES **24** (1965).

[J] U. Jannsen, *Continuous étale cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207–245.

[Ka] B. Kahn, *La conjecture de Milnor (d'après Voevodsky)*, Séminaire Bourbaki, Astérisque No. **245** (1997), 379–418.

[K] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups. II.*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo **27** (1980), 603-683.

[Me0] A. S. Merkurjev, *K_2 of fields and the Brauer group*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 529–546, Contemp. Math. **55** (1986), Amer. Math. Soc., Providence.

[Me1] A. S. Merkurjev, *Certain K-cohomology groups of Severi-Brauer varieties*, K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 319–331, Proc. Sympos. Pure Math. **58** (1995), Part 2, Amer. Math. Soc.

[Me2] A. S. Merkurjev, *On the norm residue homomorphism for fields*, AMS Transl. **174** (1996), 49–71.

[Me3] A.S. Merkurjev, *On the norm residue homomorphism of degree two*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII, 103–124, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219** (2006), Amer. Math. Soc.

[MS] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, *$\mathcal{K}$-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de résidu normique (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011–1046, trad. anglaise: Math. USSR Izv. **21** (1983), 307–340.

[Mr] J. Milnor, *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. math. **9** (1970), 318-344.

[R] M. Rost, *Norm varieties and algebraic cobordism*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 77–85, Higher Ed. Press, Beijing.

[Se1] J.–P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, 5-ième édition (1994), Springer–Verlag.

[Se2] J.–P. Serre, *Corps locaux*, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII (1968), Hermann, Paris.

[SGA4] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1969-1970, cohomologie étale, dirigé par M. Artin et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. **269, 270, 305**; Springer (1977).

[STW] D. Shapiro, J.-P. Tignol, et A. Wadsworth, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions. II*, J. Algebra **78** (1982), 58–90.

[SV] A. A. Suslin et V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, the arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000).

[T] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. math. **36** (1976), 257–274.

[V] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ coefficients*, prépublication (2003), http://www.math.uiuc.edu/K-theory/.

P. Gille
UMR 8552 CNRS
DMA, Ecole normale supérieure,
75005 Paris, France
e-mail: gille@ens.fr