

Équations différentielles

Licence de Mathématiques, 3e année
Université Lyon 1

Dragoş Iftimie

Table des matières

1 Généralités	1
1.1 Introduction, définitions	1
1.2 Quelques équations avec des solutions explicites	3
1.2.1 Équations à variables séparées	3
1.2.2 Équations scalaires linéaires d'ordre 1	3
1.2.3 Équations scalaires linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	3
1.2.4 Équations de Bernoulli	4
1.2.5 Équations de Ricatti	4

1 Généralités

1.1 Introduction, définitions

Une équation différentielle est une équation faisant intervenir une fonction inconnue et ses dérivées.

— Lorsque la fonction inconnue a une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire qu'on abrège en EDO. C'est l'objet qui sera étudié dans ce cours.

— Si on dérive la fonction inconnue par rapport à plusieurs variables, on obtient alors une équation aux dérivées partielles, une EDP. L'étude des EDP est bien plus compliqué ; ce ne sera pas traité ici.

— Si la fonction inconnue a une seule composante (est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on obtient une EDO scalaire.

— Si la fonction inconnue a plusieurs composantes (il y a plusieurs équations pour ses composantes), on parle de système d'EDO scalaires.

Une EDO scalaire d'ordre n est une équation de la forme

$$g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad (1.1)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec D une partie de $\mathbb{R}^{n+2}$ et g non constante en sa dernière variable ($x^{(n)}$ intervient réellement dans (1.1)). Une solution de (1.1) est une fonction $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- J est un intervalle ;
- x est n -fois dérivable sur J ;
- pour tout $t \in J$, $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in D$;
- la relation (1.1) a lieu pour tout $t \in J$.

Une EDO d'ordre n est dite sous forme résolue si elle est de la forme

$$x^{(n)}(t) = h(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)). \quad (1.2)$$

Nous travaillerons en général avec des EDO sous forme résolue.

Une EDO d'ordre 1 est de la forme

$$X'(t) = f(t, X(t)) \quad (1.3)$$

où f est définie sur un ensemble U de $\mathbb{R}^{n+1}$ et X est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Une solution de (1.3) est une fonction $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- J est un intervalle ;
- X est dérivable sur J (toutes ses composantes sont dérivables) ;
- pour tout $t \in J$, $(t, X(t)) \in U$;
- la relation (1.3) a lieu pour tout $t \in J$.

Une EDO scalaire d'ordre n sous forme résolue peut être reformulée sous la forme d'un système d'EDO scalaires d'ordre 1, c'est-à-dire sous la forme d'une EDO d'ordre 1. En effet, on vérifie aisément que si x vérifie (1.2) alors la fonction

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

vérifie (1.3) avec

$$f(t, X) = \begin{pmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ h(t, X) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Réciproquement, si X vérifie (1.3) avec f donnée dans (1.4) alors $x = X_1$ vérifie (1.2). L'équation (1.2) est donc équivalente à (1.3) avec f donnée dans (1.4). Ainsi, tout théorème montré pour (1.3) s'appliquera aussi à (1.2) avec des modifications évidentes. Pour cette raison, nous considérerons dans le reste du cours presque exclusivement des EDO d'ordre 1.

La variable de la fonction inconnue sera généralement désignée par $t, s, \dots$. La notation pour la fonction inconnue peut être x, X, y, φ , etc. Attention, $x, X, \dots$ peuvent désigner une variable et une fonction. Lorsque la variable de la fonction est évidente on peut l'omettre. Par exemple, on pourrait écrire (1.1) sous la forme $g(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ étant sous-entendu que t est la variable et x est la fonction inconnue en la variable t .

Voici une liste de questions que l'on pourrait se poser sur les EDO.

- À quoi ça sert ? Les EDO sont omniprésentes dans les sciences. Dès que vous avez une loi en science qui comprend des dérivées (et il y a beaucoup de telles lois), vous avez une EDO ou une EDP.

- Peut-on trouver explicitement les solutions ? C'est malheureusement très rare en dehors du cadre linéaire.
- Si on n'a pas de formule explicite pour les solutions, peut-on au moins montrer qu'elles existent ?
- Est-ce que les solutions sont uniques ? Si une EDO correspond à un phénomène physique, on ne peut pas imaginer qu'un tel phénomène physique pourrait avoir deux évolutions distinctes.
- Est-ce que les solutions existent globalement (pour tout temps) ?
- On voudrait que les solutions soient stables, c'est-à-dire qu'une petite modification dans les données n'entraîne pas une grande modification des solutions. En effet, souvent les données sont issues de mensurations avec des instruments et ne sont pas exactes. Il faut qu'on soit sûrs que la solutions construite est proche de la vraie solution.
- Enfin, on aimerait avoir une idée du comportement qualitatif de la solution. À défaut de la connaître explicitement, on aimerait savoir comment elle se comporte.

1.2 Quelques équations avec des solutions explicites

Voici quelques EDO qui admettent des solutions explicites. On mentionne ici les méthodes pour les résoudre tout en restant dans un cadre volontairement vague, non rigoureux et sans preuve. En particulier, on ne se pose pas de question sur la régularité des quantités manipulées.

Dans le reste de cette section, x désigne la fonction inconnue et t sa variable. Toutes les autres fonctions sont données. Les quantités sans argument sont supposées constantes.

1.2.1 Équations à variables séparées

Ce sont les équations de la forme

$$x'f(x) = h(t).$$

Soit F une primitive de f et H une primitive de h . L'équation au-dessus est équivalente à $(F(x(t)))' = h(t) = H'(t)$ d'où $F(x(t)) = H(t) + C$ où C est une constante arbitraire. Il ne reste plus qu'à inverser F pour trouver $x(t)$.

1.2.2 Équations scalaires linéaires d'ordre 1

Ces équations s'écrivent sous la forme

$$x' + a(t)x = b(t).$$

On multiplie par e^A où A est une primitive de a . On trouve $(xe^A)' = be^A$ d'où $x = He^{-A} + Ce^{-A}$ où H est une primitive de be^A et C est une constante arbitraire.

1.2.3 Équations scalaires linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ce sont les équations de la forme

$$ax'' + bx' + cx = f(t) \tag{1.5}$$

où a , b et c sont des constantes.

On résout d'abord l'équation homogène

$$ax'' + bx' + cx = 0 \tag{1.6}$$

On considère l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ de racines r_1 et r_2 . La solution générale de (1.6) est donnée par

$$x_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (1.7)$$

si $r_1 \neq r_2$. Si $r_1 = r_2 = r$, alors la solution générale est

$$x_h = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}.$$

Ici C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Si $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ sont complexes, alors la solution donnée dans (1.7) reste valable mais donne une solution complexe. Si on cherche des solutions réelles, on regarde les parties réelles et imaginaires dans (1.7) et on s'aperçoit que la solution générale réelle est dans ce cas

$$x_h = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

avec d'autres constantes C_1 et C_2 .

Une fois x_h déterminée, on peut résoudre l'équation inhomogène (1.5) de plusieurs manières :

- Soit on trouve une solution particulière x_p (souvent de la même forme que f) et on applique le principe de superposition. La solution générale de (1.5) est $x = x_h + x_p$.
- Soit on fait la méthode de la variation de la constante qui consiste à chercher x de la forme $x(t) = \lambda(t)x_h(t)$ où x_h est une solution homogène fixée (de préférence une exponentielle comme $e^{r_1 t}$). En insérant cette expression dans (1.5), on trouve une EDO linéaire pour λ' , ce qui nous permet de trouver λ' , puis λ donc x .

1.2.4 Équations de Bernoulli

Ces équations sont de la forme

$$x' + a(t)x + b(t)x^m = 0$$

où $m \in \mathbb{R}$. Si $m = 0$ ou $m = 1$, l'équation est linéaire et on sait la résoudre. Dans les autres cas, on remarque que $y = \frac{1}{x^{m-1}}$ vérifie une EDO linéaire d'ordre 1 qu'on sait résoudre.

1.2.5 Équations de Ricatti

Une équation de Ricatti s'écrit sous la forme

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Si $c(t) = 0$, c'est une équation de Bernoulli que l'on sait résoudre. On se ramène à ce cas en cherchant une solution particulière. En effet, si x_p est une solution particulière alors $y = x - x_p$ vérifie une équation de Bernoulli avec $m = 2$.

Fin du cours 1 (01/09/2026).