

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3}, \quad t \in]0, +\infty[. \quad (E)$$

2. Déterminer la solution maximale de (E) vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 2. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante

$$(e^t - 1)y'(t) + e^t y(t) = 1, \quad t \in I. \quad (E)$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer toutes les solutions maximales de (E) dans le cas où $I =]0, +\infty[$.
3. Déterminer toutes les solutions maximales de (E) dans le cas où $I =]-\infty, 0[$.
4. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3. Soit p et q des réels.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions (réelles) globales de l'équation différentielle

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (E)$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2. Soit $z \in \mathbf{C}$. On considère $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, t \mapsto e^{zt}$.

Montrer que u vérifie $u'' + pu' + qu = 0$ si et seulement si z est solution de l'équation caractéristique

$$z^2 + pz + q = 0. \quad (EC)$$

3. (a) Montrer que, si (EC) admet deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2 , alors

$$u_1: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_1 t} \end{array} \quad \text{et} \quad u_2: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_2 t} \end{array}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de (E).

- (b) Montrer que, si (EC) admet une solution réelle double λ , alors

$$u_1: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} \end{array} \quad \text{et} \quad u_2: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & te^{\lambda t} \end{array}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de (E).

- (c) Montrer que, si (EC) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, alors

$$u_1: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{array} \quad \text{et} \quad u_2: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de (E).

4. En déduire que $\dim \mathcal{S} \geq 2$.
5. Soit $y \in \mathcal{S}$, on définit $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $h(t) = y(t)^2 + y'(t)^2$.
 - (a) Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|h'(t)| \leq ch(t)$.
 - (b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $h(t) \leq h(0)e^{ct}$.
 - (c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}_-$, $h(t) \leq h(0)e^{-ct}$.

6. On considère l'application

$$\Phi: \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ y & \longmapsto & (y(0), y'(0)). \end{array}$$

- (a) Montrer que Φ est une application linéaire.
 - (b) En utilisant la question précédente, montrer que Φ est injective.
 - (c) En déduire que $\dim \mathcal{S} = 2$.
7. Montrer que, pour tout $(y_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

admet une unique solution globale.

Exercice 4. Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ensemble des solutions maximales, puis la solution satisfaisant de plus $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

1. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$.
2. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$.
3. $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des solutions maximales des équations suivantes :

1. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^{2t}$, $t \in \mathbf{R}$.
2. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^t$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 6. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{P}_\lambda)$$

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le problème (P_λ) a des solutions non identiquement nulles.
2. Pour ces valeurs de λ , décrire l'ensemble des solutions de (P_λ) .