

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Une équation de Bernoulli

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)^2 + \frac{2}{t}y(t), & t > 0 \\ y(1) = 4. \end{cases} \quad (P)$$

1. Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale $y : J \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert J .
2. Montrer que pour tout $t \in J$, $y(t) \neq 0$.
3. On définit $z : J \rightarrow \mathbf{R}, t \mapsto \frac{1}{y(t)}$. Montrer que z est solution sur J de l'équation différentielle

$$z'(t) = -\frac{2}{t}z(t) + \frac{1}{t}, \quad t > 0. \quad (E)$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de (E).
5. En déduire l'intervalle J et une expression explicite pour la solution y .

Exercice 2. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2, & t \in \mathbf{R} \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (P)$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Justifier que le problème (P) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.
3. Calculer explicitement cette solution maximale. Est-elle globale ?
4. L'équation différentielle $x'(t) = 1 + x(t)^2$, $t \in \mathbf{R}$ admet-elle des solutions globales ?

Exercice 3.

1. Soit $f, g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $t \geq 0$ on a

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)g(s)ds$$

Que peut-on dire de f ?

2. On fixe une fonction k -lipschitzienne $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et on considère l'équation

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbf{R} \quad (E)$$

Rappeler le théorème du cours qui garantit que toutes les solutions maximales de (E) sont globales, puis démontrer que si y_1, y_2 sont deux solutions de (E) alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ on a

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1(0) - y_2(0)|e^{kt}$$

Exercice 4. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (P)$$

1. Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale y . Montrer que cette solution est globale. Montrer de plus que cette solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Quelles sont les solutions stationnaires de l'équation différentielle $y'(t) = \sin(y(t))$ (i.e. les fonctions constantes qui sont solutions) ?
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall t \in \mathbf{R}, \quad 0 < y(t) < \pi, \\ (ii) \quad & \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \pi \end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $r > 0$. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = ry(t)(1 - y(t)), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (E)$$

Cette équation, appelée équation logistique, est utilisée pour modéliser l'évolution d'une population vivant dans un milieu à capacité limitée.

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer les solutions constantes de (E).
3. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale y de (E) vérifiant $y(0) = y_0$. On note $]t_*, T^*[$ son intervalle de définition (t_*, T^* finis ou infinis).
4. Montrer que si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$ alors pour tout $t \in]t_*, T^*[$, $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$.
5. Soit $y_0 \in]0, 1[$. Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbf{R}$, est strictement croissante et vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$.
6. Soit $y_0 > 1$. Montrer que la solution maximale est définie jusqu'en $+\infty$, est strictement décroissante et vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$.
7. Que peut-on dire dans le cas $y_0 < 0$?
8. Calculer explicitement les solutions maximales, retrouver les résultats des questions 5 et 6, et étudier le comportement de la solution maximale quand $y_0 < 0$.

Exercice 6. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $F : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)), & t \in \mathbf{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (P)$$

où ∇F désigne le gradient de F et est défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d}(x) \right).$$

On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = +\infty.$$

1. Montrer que le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]t_-, t_+[$ ($t_\pm$ finis ou non).
2. Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante sur $]t_-, t_+[$. En déduire que $t_+ = +\infty$.
3. En considérant le cas $d = 1$ et $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4/4$, montrer que t_- peut être fini.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $xf(x) < 0$.

Soit $y_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (P)$$

1. Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale $y : J \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert J .
2. Montrer que la fonction $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J .
3. En déduire que l'intervalle J contient $[0, +\infty[$ et qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)^2 = \ell$.
4. On veut montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$.
 - (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.
 - (b) En déduire que $y'(t)$ admet une limite quand $t \rightarrow +\infty$ puis que $f(\sqrt{\ell}) = 0$.
 - (c) Conclure.
5. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xf(x) \leq -\alpha x^2$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$.