TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 – Nombres complexes et plan complexe
Dessiner les nombres complexes suivants sur le plan complexe :

a) $-2i$ b) $3+2i$ c) $\overline{3+2i}$ d) $5i-1$

Exercice 2 – Opérations entre nombres complexes
Calculer les sommes, produits, quotients, parties réelles et imaginaires suivants :

a) $(3+2i)-(5i-1)$ c) $(3+2i)(5i-1)$ e) $\dfrac{3+2i}{5i-1}$ g) $\mathrm{Re}\big(i(1-i)\big)$

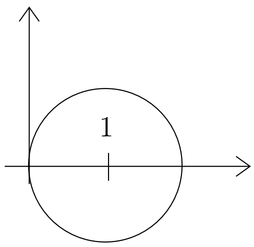
b) $(3+2i)+(\overline{3+2i})$ d) $(3+2i)(\overline{3+2i})$ f) $(3+2i)^2$ h) $\mathrm{Im}\big((1-i)i-3i\big)$

Exercice 3 – Représentation polaire des nombres complexes
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, les écrire sous forme polaire et les dessiner sur le plan complexe :

a) $-i$ b) $3+3i$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^2$ d) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

Exercice 4 – Représentation graphique des nombres complexes

1. Quelle équation vérifient les nombres complexes z formant le cercle représenté ci-dessous dans le plan cartésien ?



2. Dans le plan cartésien, soit $a=3i$ et $b=2-i$ et D la droite médiatrice du segment $[ab]$. Représenter a, b et D. Quelle équation les nombres complexes z formant la droite D satisfont-ils ?
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes suivants et les représenter dans le plan cartésien :

a) $A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|\leqslant 1\}$ c) $C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-3i|=|z-2+i|\}$

b) $B=\{z\in\mathbb{C} \mid |2z-4i+1|=4\}$

Exercice 5 – Racines deuxièmes de nombres complexes
Déterminer les racines deuxièmes des nombres complexes suivants et les dessiner sur le plan complexe :

a) 9 b) -1 c) i d) $1+i$ e) $8-6i$

Exercice 6 – Équations complexes
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+z+1=0$ c) $z^3=-8i$ e) $z^4+1=0$

b) $z^2+z-1=0$ d) $z^4-z=0$ f) $27(z-1)^3+(z+1)^3=0$

Exercice 7 – Factorisation de polynômes en produit de polynômes irréductibles
Trouver les racines (réelles et complexes) de chaque polynôme ci-dessous. Le factoriser en produit de polynômes complexes de degré 1 au plus, puis en produit de polynômes réels de degré 2 au plus.

a) $z^2 - 3z + 2$

b) $z^2 + 1$

c) $z^2 + 3z + 3$

d) $z^3 + 1$

e) $z^3 - 3z + 2$

f) $z^3 - 10z^2 + 27z - 18$

Exercice 8 – Application à la physique

En électricité, on utilise les nombres complexes pour décrire le comportement des composants du type résistances, condensateurs, bobines etc. La lettre i étant réservée à l'intensité électrique dans ce contexte, on utilise la lettre j pour désigner le nombre complexe de coordonnées cartésiennes $x = 0$ et $y = 1$. On donne : $Z_1 = a$ (résistance) ; $Z_2 = -j \times b$ (condensateur parfait) ; $Z_3 = c + j \times b$ (bobine résistive), a, b et $c \in \mathbb{R}$. Trouvez les impédances équivalentes complexes suivantes :

1) $Z_4 = Z_1 + Z_2$; (Z_1 en série avec Z_2)
2) $Z_5 = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$; (Z_1 en dérivation avec Z_2)
3) $Z_6 = Z_1 + \frac{Z_2 \times Z_3}{Z_2 + Z_3}$; (Z_1 en série avec Z_2 et Z_3 en dérivation)

Trouvez la partie résistive (partie réelle), qui permet de dissiper de la chaleur par effet joule, ainsi que la partie réactive (inexploitable à l'extérieure du circuit, partie imaginaire) de ces 3 composants :

4) $R_4 = \mathrm{Re}[Z_4]$; $X_4 = \mathrm{Im}[Z_4]$
5) $R_5 = \mathrm{Re}[Z_5]$; $X_5 = \mathrm{Im}[Z_5]$
6) $R_6 = \mathrm{Re}[Z_6]$; $X_6 = \mathrm{Im}[Z_6]$

Trouvez maintenant le déphasage de la tension par rapport au courant, induit par ces trois composants :

7) $\Phi_1 = \mathrm{Arg}[Z_1]$
8) $\Phi_2 = \mathrm{Arg}[Z_2]$
9) $\Phi_3 = \mathrm{Arg}[Z_3]$

Trouvez l'expression polaire (sous forme exponentielle) de Z_1 à Z_6. Dans le cas particulier où $a = 2$ et $b = 1$, représenter dans le plan cartésien les vecteurs de Fresnel associés $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ et $\overrightarrow{OZ_4}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 9 – Équations complexes [Facultatif]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 7 + 24i$

b) $z^2 - 4\sqrt{2}z + 6i = 0$

c) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

d) $z^3 = -8i$

e) $z^5 - z = 0$

f) $z^5 + 1 = 0$

g) $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$

h) $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Exercice 10 – Factorisation de polynômes en produit de polynômes irréductibles [Facultatif]

Trouver les racines (réelles et complexes) du polynôme z^4+1. Le factoriser en produit de polynômes complexes de degré 1 au plus, puis en produit de polynômes réels de degré 2 au plus.