Fiche 3
MESURES

Exercice # 1. Soit X un ensemble. Montrer que l'application $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathscr{P}(X)$. C'est la *mesure de comptage*.

Exercice # 2. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

c) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
d) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) \,;\, A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
e) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) \,;\, A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.
f) La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est finie, respectivement σ-finie.
g) Soient $\mathscr{A}$ une famille qui engendre $\mathscr{T}$ et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{T}$. On suppose que pour tout A dans $\mathscr{A}$ on a $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{T}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.
Pour cette dernière question : y a-t-il des hypothèses raisonnables à ajouter ou enlever ?

Exercice # 3. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ telle que $\mu(A_n) \not\to \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right)$.

Exercice # 4. Soit μ une mesure *finie* sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{S} := \{A \in \mathscr{T} \,;\, \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = \mu(X)\}.$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu.

Exercice # 5. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{T})$. Montrer qu'il existe une suite d. d. d. $(X_n)_n \subset \mathscr{T}$ telle que $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n$ et $X = \sqcup_n X_n$.

Exercice # 6. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $(X_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{T}$ avec $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n \geq 1$ et $X = \bigcup_n X_n$. Posons $\mu_n(A) := \mu\left(A \bigcap \left(X_1 \bigcup \ldots \bigcup X_n\right)\right)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. Alors :
a) μ_n est une mesure finie, $\forall\, n \geq 1$.
b) $\mu_n \nearrow \mu$.

Exercice # 7. (Formule de Poincaré)

a) Montrer que si $\mu\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right) < \infty$ alors

$$\mu\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} \mu\left(A_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_j}\right).$$

b) Que devient cette formule dans le cas particulier de la mesure de comptage ?

Exercice # 8. Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $D := \{x \in X\ ;\ \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est a. p. d.

a) Si μ est finie ?

b) Si μ est σ-finie ?

c) Si μ est quelconque ?

Exercice # 9. a) Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $[0, 1]$, avec la propriété suivante :

$$\mu(B) > 0 \implies \mu([0, 1] \backslash B) = 0,\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{[0,1]}.$$

(i) Construire une suite d'intervalles fermés $(I_j)_{j \geq 0} \subset [0, 1]$ avec les propriétés suivantes : $I_0 = [0, 1]$, $I_{j+1} \subset I_j$, $\forall\, j \geq 0$, I_j est de longueur 2^{-j}, $\forall\, j \geq 0$, et $\mu(I_j) = 1$, $\forall\, j \geq 0$.

(ii) En déduire qu'il existe un point $a \in [0, 1]$ tel que $\mu = \delta_a$.

b) Soit ν une mesure borélienne σ-finie sur $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\nu(B) > 0 \implies \nu(\mathbb{R} \backslash B) = 0,\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [0, \infty[$ tels que $\nu = b\,\delta_a$.

Exercice # 10. (Mesures discrètes) Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. La mesure μ sur $(X, \mathscr{T})$ est *continue* si, pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. μ est *discrète* s'il existe un ensemble D a. p. d. tel que $\mu(D^c) = 0$.

a) Montrer que μ est continue si et seulement si toute partie a. p. d. A de X est $\mu-$négligeable.

b) Montrer que μ est discrète si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de points de X et une suite $(c_n)_{n \geq 1} \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$.

c) Supposons maintenant μ σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

Exercice # 11. (Mesure image) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. Nous définissons $f_*\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ par $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Rappelons que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. C'est la *mesure image* de μ par f.

a) Déterminer $f_*\delta_a$, avec $a \in X$.

b) Soit μ une probabilité sur X (donc $\mu(X) = 1$). Nous prenons $n = 1$. Si $B \in \mathscr{T}$, déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Dans les quatre exercices suivants, λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. (Avec les notations du cours, $\lambda = \nu_1$.)

Exercice # 12. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.

Exercice # 13. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$.
Et réciproquement ?

b) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) < \infty$, alors A est borné.

Exercice # 14. Soit $B \in \mathscr{B}_R$ tel que $\lambda(B) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un borélien $A \subset B$ tel que $0 < \lambda(A) < \varepsilon$. Indication : recouvrir B avec des intervalles disjoints de taille $< \varepsilon$.

Exercice # 15. Le but de cet exercice est de donner une définition équivalente de λ comme la seule mesure borélienne normée et invariante par translations.

a) Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$, alors $x + A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$.

b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}_\mathbb{R} \to [0, \infty]$ définie par $\mu(A) := \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_\mathbb{R}$.

c) En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$, c'est-à-dire : *la mesure de Lebesgue est invariante par translations*.

d) Inversement, soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $\mu([0, 1[) = 1$. Calculer $\mu([0, 1/n[)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la mesure d'un intervalle arbitraire. Montrer que $\mu = \lambda$.

e) Prouver ou réfuter. Une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations, est un multiple de la mesure de Lebesgue.

Exercice # 16. Cet exercice fait suite au précédent. Nous nous proposons de montrer que, si μ est une mesure borélienne et invariante par translations sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu([0, 1[^n) = 1$, alors $\mu = \nu_n$.

a) Montrer que $\mu([0, 1/k[^n) = (1/k)^n$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Indication : recouvrir $[0, 1[^n$ avec des cubes d. d. d. de taille $1/k$.

b) Soit K_j comme dans le lemme 9.6 du cours. Montrer que $\mu(K_j) = \nu_n(K_j)$.

c) En déduire que $\mu(K) = \nu_n(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

d) Conclure.

Exercice # 17. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable.

c) Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice # 18. Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-p. p. est une équivalence.

Exercice # 19. Prouver ou réfuter. Une partie d'un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^n$ est Lebesgue mesurable.

Exercice # 20. Soit $\lambda = \lambda_1$ la mesure de Lebesgue (complète) dans $\mathbb{R}$.

a) Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g\ \lambda -$ p. p. $\iff f = g$.
De même pour $f, g : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\mathring{A}}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons les deux propriétés suivantes.
(P1) f est continue λ-p. p.
(P2) Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p. p.
Montrer que (P1) n'implique pas (P2), et que (P2) n'implique pas (P1).

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$.

Exercice # 21. a) Nous avons $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$ et $\overline{\overline{\mathscr{T}}} = \overline{\mathscr{T}}$.

b) $\overline{\mathscr{T}}$ est complète par rapport à $\overline{\mu}$.

c) Une partie de X est μ-négligeable si et seulement sielle est $\overline{\mu}$-négligeable.

Exercice # 22. Soit λ_n la mesure (complète) de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que

a) λ_n est σ-finie.

b) λ_n est l'unique mesure sur $\mathscr{L}_n$ telle que $\lambda_n(P) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ pour tout pavé $P = \prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$ de $\mathbb{R}^n$.