

Mesure et intégration
Corrigé du partiel du 04/11/2025

①

Exercice 1 Les intégrandes sont continues donc boréliennes.
Pour a) et b) elles sont positives, donc les intégrales
sont définies. Pour le c), on majore

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{n^2 \sin(\frac{x}{n})}{(1+nx)(1+x^2)} \right| dx \leq \int_0^{\infty} \frac{n^2}{1+x^2} dx < \infty$$

donc l'intégrale du c) est définie aussi.

limiter quand $n \rightarrow \infty$;

a) On utilise le lemme de Fatou:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{n}{n^2 n + nx^2} dx}_{I_n} \geq \int_0^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 n + nx^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$$

Donc $+\infty \leq \liminf I_n \leq \limsup I_n \leq +\infty$ d'où
 $\liminf I_n = \limsup I_n = +\infty \Rightarrow I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

b) On utilise le théorème de convergence monotone

car $n \rightarrow \frac{n}{1+nx^2} = \frac{1}{\frac{1}{n} + x^2} \nearrow \frac{1}{x^2}$ et les fonctions sont ≥ 0

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{n}{1+nx^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$$

c) On utilise le th. de cont. dominée de Lebesgue. (2)

o Dominaton : $\left| \frac{n^2 \lim \frac{x}{n}}{(1+nx)(1+x^2)} \right| \leq \frac{n^2 \cdot \frac{x}{n}}{(1+nx)(1+x^2)}$

($|Mina| \leq |a|$)

$$= \frac{nx}{(1+nx)(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

intégrable et indépendante de n

o W. Simple :

$$\frac{n^2 \lim \frac{x}{n}}{(1+nx)(1+x^2)} = \frac{\lim \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{nx}{1+nx} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{n^2 \lim \frac{x}{n}}{(1+nx)(1+x^2)} dx &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit $D = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ (3)

On montre que

$$\mathcal{M}(A) = \left\{ B ; B \subset D \text{ ou } B^c \subset D \right\} \\ =: \mathcal{N}$$

On montre deux inclusions:

" $\supset$ " Si $B \subset D \Rightarrow B = \bigcup_{b \in B} \{b\}$

= union a.p.d. d'éléments
de A
donc appartient à $\mathcal{M}(A)$.

Si $B^c \subset D \Rightarrow B^c \in \mathcal{M}(A)$

$$\Rightarrow B = (B^c)^c \in \mathcal{M}(A)$$

On a montré que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}(A)$.

" $\subset$ " c'est évident que $A \subset \mathcal{N}$,
il suffit donc de montrer que $\mathcal{N}$
est une tribu.

(4)

On doit montrer que $\mathcal{N}$ est stable
par passage au complémentaire et par union
dénombrable.

• Soit $B \in \mathcal{N} \Rightarrow B \subset D$ ou $B^c \subset D$

$$\text{Si } B \subset D \Rightarrow (B^c)^c \subset D \Rightarrow B^c \in \mathcal{N}$$

De même, si $B^c \subset D \Rightarrow B \in \mathcal{N}$ par définition
de $\mathcal{N}$.

• Soient $B_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$. On a deux cas

- Soit $\exists n_0$ tel que $B_{n_0}^c \subset D$. Dans ce cas

$$\left(\bigcup_n B_n \right)^c \subset B_{n_0}^c \subset D \Rightarrow \bigcup_n B_n \in \mathcal{N}.$$

- Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset D$. Dans ce cas

$$\bigcup_n B_n \subset D \Rightarrow \bigcup_n B_n \in \mathcal{N}.$$

Dans les deux cas $\bigcup_n B_n \in \mathcal{N}$.

On a bien montré que $\mathcal{N}$ est une tribu.

Exercice 3

(5)

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ étant engendré par les intervalles de la forme $]a, +\infty[$, il suffit de montrer que

$$f^{-1}(]a, +\infty[) \text{ borélien } \forall a \in \mathbb{R}.$$

Soit $n = \lfloor a \rfloor$ de sorte que $n \leq a < n+1$

Alors

$$x \in f^{-1}(]a, +\infty[) \Leftrightarrow f(x) > a$$

$$\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > a$$

$$\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq n+1$$

$$\Leftrightarrow x \geq n+1$$

$$\text{Donc } f^{-1}(]a, +\infty[) = [n+1, +\infty[\\ = \text{borélien.}$$

On pourrait aussi remarquer que f est croissante donc borélienne, ou bien que $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1[}$ donc borélienne comme limite de fonctions étagées.

Exercice 4 :

(6)

a) $A_n \subset A_{n+1}$ car $f(x) \leq n$ implique
 $f(x) \leq n+1$.

$$\text{Si } x \in X \Rightarrow f(x) \in [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq f(x)$$

$$\Rightarrow \exists n \text{ t.q. } x \in A_n$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$$\text{Donc } X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

b) On a $A_n \nearrow X$, donc par le lemme

$$\mu(A_n) \nearrow \mu(X) > 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0, \mu(A_{n_0}) > 0.$$

$$A = A_{n_0} \text{ convient.}$$