Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2025-2026
Mesure et Intégration Durée : 90 min

Contrôle Continu

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation. Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, montre connectée, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours. Énoncer précisément les théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée. Montrer le théorème (lemme) de Fatou.

Exercice 1. Déterminer la limite des intégrales suivantes lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés dans la question de cours :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{1 + nx^2}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 2. On considère $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des singletons de $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{A} := \{\,\{x\},\ x \in \mathbb{R}\}.$$

a) Déterminer $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathscr{A}$. Justifier soigneusement votre réponse sans utiliser ce qui a été fait en TD.

b) En déduire que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est strictement incluse dans $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

c) Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{M}$.
Justifier le fait que f est mesurable de $(X, \mathscr{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{M}(\mathscr{A}))$ et montrer à l'aide d'un contre exemple que f n'est pas forcément mesurable de $(X, \mathscr{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 3. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

est borélienne. Ici $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Exercice 4. Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) > 0$ et une fonction $f : X \to [0, +\infty[$ mesurable.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$A_n := \{x \in X; f(x) \le n\}.$$

Montrer que $(A_n)_{n\ge 0}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{M}$ (d'ensembles mesurables) avec $\bigcup_{n\ge 0} A_n = X$.

b) En déduire qu'il existe $A \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.