Fiche 2

Sup, inf, lim sup, lim inf
Dénombrement
Tribus

Exercice 1. Trouver $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup A$ et $\min A$ existent dans $\mathbb{R}$, mais $\max A$ n'existe pas.

Exercice 2. Déterminer les bornes $\sup$ et $\inf$ des ensembles ci-dessous :
a) $A_1 := \left\{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \;;\; n \in \mathbb{N}\right\}$;
b) $A_2 := \left\{\dfrac{12n + 10^{-n}}{3n+2} \;;\; n \in \mathbb{N}\right\}$;
c) $A_3 := \left\{\left(1 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\ln n \;;\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 3. Calculer

$$\sup_{x \geq 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{\cos(xt + \pi/4)}{1+x^2}, \quad \sup_{x,\, t \in \mathbb{R}} \frac{e^{-x/(1+t^2)}}{1+x+x^2}.$$

Exercice 4. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ pour les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ respectivement par les formules :
a) $x_n := 1/(n+1)$.
b) $x_n := (n+1)^{(-1)^n}$.
c) $x_n := \left(2 + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \dfrac{n}{2n+1}$.
d) $x_n := \dfrac{11n + 2\cos(n\pi)}{\sqrt{4n^2+n-1}}$.

Exercice 5. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
b) L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
c) L'ensemble $\mathbb{R}$ est dénombrable.
d) L'ensemble $\mathbb{C}$ est dénombrable.
e) L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.
f) L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A \;;\; A \subset \mathbb{N}\}$ est dénombrable.

Exercice 6. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) Si X est dénombrable, alors toute tribu sur X est a. p. d.
b) Une partie $\mathscr{M}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une tribu si elle vérifie :
   (i) $\varnothing \in \mathscr{M}$.
   (ii) $A \in \mathscr{M} \implies A^c \in \mathscr{M}$.
   (iii) $[A_n \in \mathscr{M},\ \forall\, n] \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas nécessairement un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{M} := \{A \subset \mathbb{R} \;;\; A \text{ a. p. d. ou } A^c \text{ a. p. d.}\}.$$

a) Montrer que $\mathscr{M}$ est une tribu.
b) Montrer que $\mathscr{M} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
c) Conclure.

Exercice 8. Pour X ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, on note $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ la tribu sur X engendrée par $\mathscr{A}$.

a) Soit $X := \{1, 2, 3\}$ et $\mathscr{A} := \{\{1\}\}$. Montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$.

b) Soit $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 9. Trouver tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, tels que

$$\sup(tA) = t \sup A,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Soient $a_{n,k} \in \mathbb{R}$, $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$. A-t-on toujours

$$\sup_n \sup_k a_{n,k} = \sup_k \sup_n a_{n,k}?$$

Exercice 11. Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*.

a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.

b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

c) Montrer que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice 12. Nous admettons le résultat suivant, qui sera démontré en topologie : tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ s'écrit comme une union d'intervalles ouverts disjoints deux à deux. Montrer que tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ s'écrit comme une union *a.p.d.* d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.