

Fiche 1 : ENSEMBLES, SUP, INF

Cadre, notations

1. Nous travaillons dans un ensemble fixé X .
2. Les parties (sous-ensembles) de X sont notées A, B , etc. La phrase « A est une partie de X » peut s'écrire $A \subset X$ ou $X \supset A$.
3. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathcal{P}(X)$.
4. La notation $(A_i)_{i \in I}$ désigne une famille de parties de X , indexée par un ensemble *quelconque* (donc pas nécessairement fini ou dénombrable) d'indices.
5. Rappelons les opérations usuelles avec les ensembles :

- (i) (union) $A \cup B := \{x \in X ; x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- (ii) (intersection) $A \cap B := \{x \in X ; x \in A \text{ et } x \in B\}$;
- (iii) (différence) $A \setminus B := \{x \in X ; x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
- (iv) (différence symétrique)

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in X ; [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\} ;$$

- (v) (complémentaire) $A^c = X \setminus A := \{x \in X ; x \notin A\}$;
 - (vi) (produit cartésien) si X, Y sont des ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y) ; x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
6. Une suite $(A_n)_{n \geq k}$ de parties de X est *croissante* si $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \geq k$. Elle est *décroissante* si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \geq k$.

Exercice 1. (Échauffement)

- a) Dessiner « avec des patates » les ensembles $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A^c, A \Delta B$.
- b) Calculer $(A \Delta B) \Delta A$.

Exercice 2. (Propriétés fondamentales) Montrer les propriétés suivantes.

- a) $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$ et $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$.
- b) $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ et $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.
- c) $A \setminus (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$ et $(\bigcup_{i \in I} A_i) \setminus B = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B)$.
- d) $A \setminus (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$ et $(\bigcap_{i \in I} A_i) \setminus B = \bigcap_{i \in I} (A_i \setminus B)$.
- e) $(\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$ et $(\bigcap_{i \in I} A_i) \times (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$.

Exercice 3. (Fonction indicatrice) Soit X un ensemble. Pour une partie A de X , on définit sa *fonction*

$$\text{indicatrice } \chi_A : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ par } \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

- a) Calculer $\chi_\emptyset$ et χ_X . Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.
- b) Exprimer simplement en fonction de χ_A et χ_B les fonctions $\chi_{A^c}, \chi_{A \cap B}, \chi_{A \cup B}, \chi_{A \Delta B}$.
- c) Si $f : X \rightarrow Y$ (X, Y deux ensembles) et $C \subset Y$, exprimer $\chi_{f^{-1}(C)}$ en fonction de χ_C et f .
- d) L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathcal{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X := \{f : X \rightarrow \{0, 1\}\}$?
- e) Montrer, à l'aide des fonctions caractéristiques, l'égalité $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Exercice 4. (Suites d'ensembles) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de parties de X .

- Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissante, alors $\bigcup_{n \geq n_0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n, \forall n_0 \in \mathbb{N}$.
- Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, alors $\bigcap_{n \geq n_0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} A_n, \forall n_0 \in \mathbb{N}$.
- Soit $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissante, alors la suite $(\chi_{A_n})_{n \geq 0}$ est croissante et converge simplement vers χ_A .
- Énoncer et prouver le résultat analogue au précédent pour une suite décroissante.
- Soit $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Montrer que si les A_n sont d. d. d. (deux à deux disjoints), alors $\chi_A = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Exercice 5. Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que :

- $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow M$. Trouver une caractérisation analogue de $\inf A$.
- $\sup A$ et $\inf A$ sont uniques.
- $\sup(-tA) = -t \inf A, \forall t \in]0, \infty[$. Donner les formules de $\sup(tA), \inf(tA), \inf(-tA)$.
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
- Si $A \subset B$, alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
- Si $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}$ est une suite croissante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq n_0} x_n := \sup\{x_n; n \geq n_0\}$.

Trouver l'énoncé analogue pour une suite décroissante.

- Si $\sup A > x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors il existe un $y \in A$ tel que $y > x$.
- Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$. Y a-t-il des formules pour $\inf(A \cup B), \sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$ pour $A \cap B \neq \emptyset$?

Exercice 6. (Image directe, image réciproque) On se donne deux ensembles X et Y et une application $f : X \rightarrow Y$.

Si $A \subset X$, on définit $f(A) := \{f(x); x \in A\}$.

Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$.

Montrer les propriétés suivantes de l'image réciproque $B \mapsto f^{-1}(B)$.

- $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
- Si, de plus, g est une application de Y vers un ensemble Z , alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Pour l'image directe $A \mapsto f(A)$, les relations analogues ne sont pas vraies en général.

- Montrer que $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
- Montrer que $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ et donner un exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.
- Montrer par des exemples qu'en général il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $(f(A))^c$.

Exercice 7. (Coupes) Si $E \subset X \times Y$, soient

$$\forall x \in X, E(x, \cdot) := \{y \in Y; (x, y) \in E\} \text{ et } \forall y \in Y, E(\cdot, y) := \{x \in X; (x, y) \in E\}.$$

- Si $X = Y = \mathbb{R}$, « dessiner » $E(x, \cdot)$ et $E(\cdot, y)$ pour une « patate ».
- Si $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, trouver $E(x, \cdot)$ et $E(\cdot, y)$ pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $(\bigcup_{i \in I} E_i)(x, \cdot) = \bigcup_{i \in I} E_i(x, \cdot), \forall x \in X$ et $(\bigcup_{i \in I} E_i)(\cdot, y) = \bigcup_{i \in I} E_i(\cdot, y), \forall y \in Y$.