

Feuille 2 : Ensembles et applications

- Exercice 1**
1. On note $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$.
 2. On note $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
 3. On note $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ et $B \cup C$.

Correction

1. $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ et $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. $A \cap B = [2, 3]$ et $A \cup B = [1, 4]$.
3. $A \cap B =]-2, 3]$, $A \cup B =]-\infty, 7]$, $B \cap C =]-2, 7]$ et $B \cup C =]-5, +\infty[$.

Exercice 2 Soit A et B deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Correction On raisonne par double-implication.

Montrons que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. Supposons que $A \subset B$. Alors, $A \setminus B = \emptyset$, d'où

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = B.$$

Montrons maintenant que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$. On suppose que $A \cup B = B$. Alors, comme $A \subset A \cup B$, on a bien $A \subset A \cup B = B$.

Exercice 3 Soit A , B et C trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C) ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Correction

1. La contraposée de cette implication est

$$(A \subset C \text{ et } B \subset C) \implies A \cup B \subset C$$

et cette implication est vraie.

2. Soit $x \in B$. Montrons que $x \in C$. Comme $x \in B$, on a $x \in A \cup B$, d'où $x \in A \cup C$ par hypothèse. Si $x \in C$, c'est terminé. Si $x \in A$, on a $x \in A \cap B$. Par hypothèse, on a donc $x \in A \cap C$ ce qui entraîne $x \in C$. Dans tous les cas $x \in C$ et on a montré que $B \subset C$.

Exercice 4 Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$.

Correction

1. négation: $\exists x \in \mathbb{R}, (x \neq |x| \text{ et } x \neq -|x|)$. L'énoncé est vrai mais pas sa négation.
2. négation: $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq -|x|)$. La négation est vraie mais pas l'énoncé.
En effet, on a bien (par exemple) $-2 \neq |-2|$ et $3 \neq -|3|$.
3. négation: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 \geq 0$. La négation est vraie mais pas l'énoncé.
En effet, une fois x fixé, il suffit de choisir y de telle sorte que $y \geq x - x^2$.
4. négation: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 \leq 0$. L'énoncé est vrai mais pas sa négation.
En effet, il suffit d'étudier le trinôme du second degré $P_y(x) = x^2 + x - y$. Celui-ci a pour discriminant $\Delta_y = 1 - 4y$. Ainsi, si $1 - 4y < 0$, c'est-à-dire $y > 1/4$, alors $P_y(x) > 0$ pour tout réel x . Il existe donc bien un réel y (par exemple $y = 1$) tel que $x^2 + x - y > 0$ pour tout réel x .

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1. f s'annule ;
2. f est l'application nulle ;
3. f n'est pas une application constante ;
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5. f s'annule au plus une fois.

Correction

1. $\exists x \in I, f(x) = 0$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0$.
3. $\exists x \in I, \exists y \in I, f(x) \neq f(y)$.
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.
5. $\nexists (x, y) \in I^2, x \neq y, f(x) = f(y) = 0$.

Exercice 6 1. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'observe-t-on ?

2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

$$(a) \ h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) ; \quad (b) \ h(x) = \frac{1}{x+7} ; \quad (c) \ h(x) = \sqrt{3x-1}.$$

Correction

1. Par définition,

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = 3g(x) + 1 = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2, \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x. \end{aligned}$$

On constate que $f \circ g \neq g \circ f$.

2. Par exemple,

$$\begin{aligned} (a) \ u : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x \text{ et } v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x + \frac{\pi}{2}, \\ (b) \ u : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x} \text{ et } v : \mathbb{R} \setminus \{-7\} \rightarrow \mathbb{R}^*; x \mapsto x + 7, \\ (c) \ u : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto \sqrt{x} \text{ et } v : [\frac{1}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto 3x - 1. \end{aligned}$$

Exercice 7 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ | 6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{14\}$
$x \mapsto 14$ | 10. $f : \{1\} \longrightarrow \{1/2\}$
$x \mapsto \frac{1}{x+1}$ |
| 2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2$ | 7. $f : \{17\} \longrightarrow \{12; 17\}$
$x \mapsto 17$ | 11. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto n+1$ |
| 3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto n$ | 8. $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ | 12. $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$n \mapsto n+1$ |
| 4. $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x$ | 9. $f : \{0\} \longrightarrow \{0\}$
$x \mapsto 0$ | 13. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ |
| 5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto 8x+3$ | | |

Correction (détails vus en TD)

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. ni injective ni surjective, | 6. surjective mais pas injective, | 11. injective mais pas surjective, |
| 2. surjective mais pas injective, | 7. injective mais pas surjective, | 12. bijective, |
| 3. bijective, | 8. injective mais pas surjective, | 13. injective mais pas surjective. |
| 4. injective mais pas surjective, | 9. bijective, | |
| 5. bijective, | 10. bijective, | |

Exercice 8 1. On définit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par $f(m, n) = mn$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

2. On définit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $g(k) = (k, (k+1)^2)$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

Correction

- pas injective car $f(m, 0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, surjective car $f(m, 1) = m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- injective car $g(k) = g(l)$ implique que $k = l$, mais pas surjective car, par exemple, $(0, 0)$ n'a pas un antécédent.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$.

- Soit m un entier positif. Déterminer tous les antécédents de m .
- Soit m un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de m .
- L'application f est-elle une bijection ?

Correction

- Soit $m \in \mathbb{N}$, alors m admet comme unique antécédent $2m$.
- Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, alors $m = -k-1$ implique que $k = -m-1$, donc $2k+1 = -2m-1$ et ainsi $f(-2m-1) = f(2(-m-1)+1) = m+1-1 = m$. L'unique antécédent de m est donc $-2m-1 \in \mathbb{N}$.
- Tout entier $m \in \mathbb{Z}$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{N}$, donc f est bijective.

Exercice 10 On suppose connu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers naturels (m, j) avec $0 \leq j \leq m$ tel que

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + j.$$

On définit alors $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (m-j, j)$.

- Placer les points $f(k)$ pour $0 \leq k \leq 9$.
- Montrer que f est une bijection.

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} f(0) &= (0, 0), & f(1) &= (1, 0), & f(2) &= (0, 1), & f(3) &= (2, 0), & f(4) &= (1, 1), & f(5) &= (0, 2), \\ f(6) &= (3, 0), & f(7) &= (2, 1), & f(8) &= (1, 2), & f(9) &= (0, 3), & f(10) &= (4, 0). \end{aligned}$$

On voit que l'on remplit $\mathbb{N}^2$ "diagonale par diagonale" (d'en bas à droite vers en haut à gauche).

2. Montrons que f est injective. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, alors on a l'existence de deux couples uniques (m_1, j_1) et (m_2, j_2) tels que

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow (m_1 - j_1, j_1) = (m_2 - j_2, j_2) \Rightarrow (m_1, j_1) = (m_2, j_2)$$

en résolvant facilement le système. Par unicité du couple (m, j) , il en découle que $n_1 = n_2$ et donc f est bijective.

Montrons la surjectivité de f . Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$(p, q) = f(n)$$

comme $f(n) = (m - j, j)$ pour un unique couple (m, j) , alors on trouve que

$$(p, q) = (m - j, j) \Rightarrow j = q \text{ et } m = p + q,$$

donc

$$n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q \in \mathbb{N}$$

et donc tout entier admet un antécédent par f . Ainsi, f est bijective.

Exercice 11 On définit une partie du plan par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$ puis une application $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

1. Représenter graphiquement D .

2. (a) Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

(b) En déduire que f est injective.

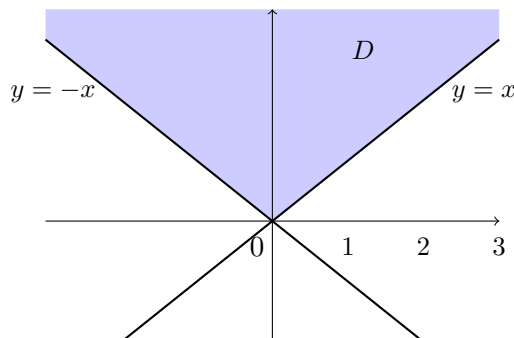
3. Est-ce que f est surjective ?

Correction

1. Par définition, les inégalités $-y \leq x \leq y$ sont équivalentes à

$$-y \leq x \quad \text{et} \quad x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \geq -x \quad \text{et} \quad y \geq x \quad \Longleftrightarrow \quad y \geq \max\{-x, x\} = |x|.$$

Donc, l'ensemble D est représenté par la partie bleue de dessin suivant:



2. (a) Additionnant les deux équations, on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$. Ensuite, remplaçant dans ces deux équations, on trouve que $y_1 = y_2$.

(b) Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points dans D tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Par définition, on a

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 & \cdots & L_1, \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 & \cdots & L_2. \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, i.e., $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$. Comme $x + y \geq 0$ sur D , on en déduit que $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 (\geq 0)$. De même, $L_1 - L_2$ donne $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$. Comme $x - y \leq 0$ sur D , on en déduit que $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 (\leq 0)$. D'après 2. (a), cela donne $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, qui montre que f est injective.

3. Comme $x^2 + y^2 \geq 0$ quoi que ce soit $x, y \in \mathbb{R}$, f ne peut être surjective.

Exercice 12 On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$.

1. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$?

Correction

1. Comme f n'est pas surjective, $f \circ g$ ne peut être surjective. En particulier, $f \circ g$ ne peut être bijective, donc une telle g n'existe pas.
2. Il existe une telle h ; en effet, il suffit de prendre une application h vérifiant $h(n) = \sqrt{n}$ s'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m^2$.

Exercice 13 1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$$

- (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
 - (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.

Correction

1. Par définition, $f(1) = \{4\}$, $f(\{1, 3\}) = \{2, 4\}$, $f(\{3, 4\}) = \{2\}$ et $f(\emptyset) = \emptyset$.
2. Par définition, $f^{-1}(\{2\}) = \{3, 4\}$, $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3, 4\}$ et $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$.

Exercice 14 Montrer que chacune des applications suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g :]e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t, n) = t \cdot 10^n$.

Correction

1. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$y = f(x) \iff y = 3x + 1 \iff x = \frac{y - 1}{3} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, tout réel y admet un unique antécédent $x = \frac{y - 1}{3}$ par f dans $\mathbb{R}$. On en déduit que f est bijective de bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]e, +\infty[$, alors on a

$$y = g(x) \iff y = \ln(\ln(\ln x)) \iff x = e^{e^{e^y}} > e.$$

Ainsi, tout réel y admet un unique antécédent $x = e^{e^{e^y}}$ par g dans $]e, +\infty[$. On en déduit que g est bijective de bijection réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]e, +\infty[$ définie pour tout réel x par $g(x) = e^{e^{e^x}}$.

3. Soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$(y_1, y_2) = a(s, t) \iff (y_1, y_2) = (2s, 3t) \iff (s, t) = (y_1/2, y_2/3) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, tout point $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent $(s, t) = (y_1/2, y_2/3)$ par a dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que a est bijective de bijection réciproque $a^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ par $a^{-1}(s, t) = (s/2, t/3)$.

4. Soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$(y_1, y_2) = b(s, t) \iff (y_1, y_2) = (s + t, s - t) \iff (s, t) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, tout point $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent $(s, t) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$ par b dans $\mathbb{R}^2$.

On en déduit que b est bijective de bijection réciproque $b^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ par $b^{-1}(s, t) = \left(\frac{s + t}{2}, \frac{s - t}{2} \right)$.

5. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors il est clair (pensez à la division euclidienne) qu'il existe un unique $n_y \in \mathbb{Z}$ tel que $y \times 10^{-n_y} \in [1, 10[$. On note $t_y = y \times 10^{-n_y}$ et ce nombre est lui aussi unique. Ainsi, F est bijective de bijection inverse $F^{-1} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow [1, 10[\times \mathbb{Z}$ est définie pour tout réel $y > 0$ par $F^{-1}(y) = (n_y, y \times 10^{-n_y})$.

Exercice 15 1. Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. On définit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Correction

1. Comme $q_i \geq 2$, on a $0 < \frac{1}{q_i} \leq \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$). En particulier, on a $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0$ qui implique que

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux éléments de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ ayant un même image par f , i.e.,

$$f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2) \iff p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = -p_1 + p_2.$$

Comme $-p_1 + p_2 \in \mathbb{Z}$ et que $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ d'après la première question, on en déduit que $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$, c'est-à-dire, l'application f est injective. Mais f ne peut être surjective car pour un $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{1}{q} \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ qui signifie que l'application f ne peut pas prendre une valeur dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 16 Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

$$(a) \quad g \circ f = \text{id}_E ;$$

$$(b) \quad f \circ g = \text{id}_F ;$$

$$(c) \quad f \circ f = \text{id}_E.$$

Correction

1. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, i.e., $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme g est injective, ceci implique que $f(x_1) = f(x_2)$, d'où $x_1 = x_2$ car f est aussi injective.
2. Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc, $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ qui montre que $g \circ f$ est surjective.
3. D'après les deux questions précédentes, $g \circ f$ est bijective.
4. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors, on a

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Par hypothèse, on a $x_1 = x_2$, d'où f est injective.

5. Soit $z \in G$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Donc, posons $y = f(x) \in F$, on voit que $g(y) = g(f(x)) = z$, d'où g est surjective.
6. (a). g est surjective (d'après 5.) et f est injective (d'après 4.).
 (b). f est surjective (d'après 5.) et g est injective (d'après 4.).
 (c). D'après 4. et 5., f est bijective.

Exercice 17 Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{[0, \pi]})^{-1}([0, 1])$;
11. $(\cos_{[3\pi, 7\pi]})^{-1}([0, 1])$;
12. $\cos^{-1}([0, 1])$;

Correction

1. $\{0\}$,
2. $\emptyset$,
3. $]0, e^2]$,
4. $] - \infty, 1]$,
5. $\mathbb{R}$,
6. $[e^3, +\infty[$,
7. $[-1, 1]$,
8. $[-1/2, 1]$,
9. $[0, 1]$,
10. $[0, \pi/2]$,
11. $[7/2\pi, 9/2\pi] \cup [11/2\pi, 13/2\pi]$,
12. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n-1/2)\pi, (2n+1/2)\pi]$.

Exercice 18 Soient E un ensemble et f une application de E dans lui-même telle que $f(f(E)) = E$. Montrer que f est surjective.

Correction Par définition, on a $f(E) \subset E$, d'où $f(f(E)) \subset f(E)$. Donc, par hypothèse, on a $E \subset f(E)$. Grâce aux double inclusions, on en déduit que $f(E) = E$, i.e., f est surjective.

Exercice 19 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) f est injective ;
- ii) Pour tous A_1, A_2 parties de X , on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Correction Il a été démontré en cours que, pour tout A_1, A_2 parties de X , on a $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Supposons que f est injective. Montrons que pour tous A_1, A_2 parties de X , $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$. Soient A_1, A_2 deux parties de X , et soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors $y \in f(A_1)$ et il existe donc $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$ et, de même, $y \in f(A_2)$ et il existe $x_2 \in A_2$ tel que $y = f(x_2)$. Comme f est injective et que $f(x_1) = f(x_2) = y$, on a $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. Ainsi, $y \in f(A_1 \cap A_2)$ et on a montré i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que pour tous A_1, A_2 parties de X , $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ et montrons que f est injective. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $(x_1, x_2) \in X^2$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Comme $f(\{x_1\}) \cap f(X \setminus \{x_1\}) = \emptyset$ par hypothèse (on a choisi $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = X \setminus \{x_1\}$), alors il est clair que $f(x_1) \neq f(x_2)$ car $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$. Ainsi f est injective.

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.

Correction Raisonnons par l'absurde et supposons que f^{-1} n'est pas strictement croissante. Il existe alors $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y_1 < y_2$ et $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. On applique f à l'inégalité précédente en utilisant le fait que f est strictement croissante, ce qui nous donne $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$, ce qui est impossible. On en déduit que f^{-1} est strictement croissante.

Exercice 21 Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1} , montrer que f est bijective.

Correction Comme $g \circ f$ est bijective, on obtient

$$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = \text{id}_G \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = \text{id}_E.$$

De la première équation, on déduit : $f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1}$, puis, en composant par g à droite, $f \circ ((g \circ f)^{-1} \circ g) = \text{id}_F$. Il existe donc une application $h = (g \circ f)^{-1} \circ g$ telle que $f \circ h = \text{id}_F$.

De la deuxième équation, on déduit : $((g \circ f)^{-1} \circ g) \circ f = \text{id}_E$, et ainsi $h \circ f = \text{id}_E$.

On en déduit donc que f est bijective de bijection réciproque $f^{-1} = h = (g \circ f)^{-1} \circ g$.

Exercice 22 Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow J$ une application strictement croissante.

1. Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
2. Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \rightarrow K$ soit bijective.

Correction

1. Raisonnons par contraposée et supposons que f n'est pas injective. Montrons que f n'est pas strictement croissante. En effet, si f n'est pas injective, il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. En particulier, on a deux possibilités :

- $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$;
- $x_2 < x_1$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Dans les deux cas, f n'est pas strictement croissante.

2. Pour que f soit bijective, il faut que f soit surjective car elle est déjà injective d'après la question précédente. Pour cela, on doit avoir $f(I) = J$. On choisit donc $K = f(I)$.

Exercice 23 Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\exists G \subset F$ telle que f est une bijection de E dans G ;

ii) f est injective.

Correction Il est clair que $i) \Rightarrow ii)$. En effet, si f est injective, alors choisir $G = f(E)$ suffit à assurer la bijectivité et donc la bijectivité de $f : E \rightarrow G$.

Il est aussi clair que $ii) \Rightarrow i)$ par contraposée. En effet, si $\forall G \subset F$, $f : E \rightarrow G$ n'est jamais une bijection, alors $f : E \rightarrow F$ ne peut pas être injective.

Exercice 24 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit y un réel. Combien y possède-t-il d'antécédents ? On discutera selon la valeur de y .
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
4. (a) Soit y un réel ayant exactement deux antécédents x_1 et x_2 par f . Déterminer la valeur du produit $x_1 x_2$, puis montrer qu'un et un seul des réels x_1 et x_2 appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.
(b) En déduire que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Correction

1. Soit $y \in \mathbb{R}$, alors

$$y = f(x) \iff y = \frac{2x}{1+x^2} \iff yx^2 - 2x + y = 0.$$

On considère le trinôme du second degré $P_y(x) = yx^2 - 2x + y$. Son discriminant est $\Delta_y = 4 - 4y^2$. Ainsi, si $y \neq 0$:

- Si $\Delta_y < 0$, c'est-à-dire $1 - y^2 < 0$, autrement dit $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $P_y(x) \neq 0$ et y n'admet donc pas d'antécédent par f .
- Si $\Delta_y = 0$, c'est-à-dire $1 - y^2 = 0$, autrement dit $y \in \{-1, 1\}$, alors $P_y(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$ et y (qui vaut -1 ou 1) admet un unique antécédent $x = \frac{1}{y}$ (qui vaut aussi respectivement -1 ou 1) par f .
- Si $\Delta_y > 0$, c'est à dire $y \in]-1, 1[$, alors $P_y(x) = 0$ si et seulement si $x \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}, \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \right\}$ qui sont les deux antécédents de y par f .

De plus, si $y = 0$, alors $x = 0$ est son unique antécédent par f .

2. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent. f n'est pas injective car $y = 1/2$ admet deux antécédents par f .
3. Pour déterminer $f(\mathbb{R})$, il suffit d'étudier la fonction f . Cette fonction est continue et dérivable comme quotient de fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule jamais. Sa dérivée au point $x \in \mathbb{R}$ vaut $f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. On a ainsi $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$. On trouve aisément que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ valent 0 toutes les deux. De plus $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

4. (a) Dans ce cas, on sait que les antécédents de $y \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ par f sont $\left\{ \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}, \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \right\}$ dont le produit vaut 1. De plus, il est clair que $\left| \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \right| = \frac{1}{|y|} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} > \frac{1}{|y|} > 1$, et ainsi, comme le produit des deux antécédents vaut 1, on a $\frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1]$.
(b) Il est clair d'après les questions précédentes que tout élément $y \in [-1, 1]$ admet un unique antécédent par g dans $[-1, 1]$:

- si $y = 0$, son unique antécédent par g est $x = 0$;
- si $y = -1$, son unique antécédent par g est $x = -1$;
- si $y = 1$, son unique antécédent par g est $x = 1$;
- si $y \in]-1, 1[$, son unique antécédent par g est $\frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1]$.

On en déduit que g est une bijection.

Exercice 25 Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F . Soient également A_1 et A_2 deux parties de E , et B_1 et B_2 deux parties de F .

1. Montrer que $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Correction

1. On suppose que $B_1 \subset B_2$. Montrons que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$, alors $f(x) \in B_1$. Comme $B_1 \subset B_2$, on en déduit que $f(x) \in B_2$, et ainsi $x \in f^{-1}(B_2)$. La réciproque est fautive (trouvez un contre-exemple!).
2. Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$, alors il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A_1$, alors $y \in f(A_1)$ et comme $x \in A_2$ alors $y \in f(A_2)$. On en déduit que $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque n'est vraie que si f est injective (cf. Exercice 19).
3. On a $f(A_1 \cup A_2) = \{f(x) : x \in A_1 \cup A_2\} = \{f(x) : x \in A_1\} \cup \{f(x) : x \in A_2\} = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 26 Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E , on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E , on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

Correction

1. Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. On a donc $f(x) \in B$ ce qui entraîne que $y \in B$. On a donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$. On doit donc montrer que f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Supposons que f est injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$ et donc il existe x' (non nécessairement égal à x) tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$, et donc $x \in A$. On a montré que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Réciproquement, supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Montrons que f est injective. Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Choisissons $A = \{x_1\}$. On a ainsi $f(A) = f(\{x_1\}) = \{y\}$ et donc $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\})$. Par hypothèse, on sait que $f^{-1}(f(A)) \subset A$, ce qui implique que $f^{-1}(\{y\}) \subset \{x_1\}$. Or $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ car $f(x_2) = y$. On en déduit que $x_1 = x_2$ et donc que f est injective.

4. On sait déjà que pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$. On doit donc montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Supposons que f est surjective. Soit $y \in B$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. Le fait que $x \in f^{-1}(B)$ entraîne que $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ et donc $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Réciproquement, supposons que $B \subset f(f^{-1}(B))$ pour toute partie B de F . Appliquons ce résultat à $B = \{y\}$. On a alors $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$ ce qui s'écrit aussi $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$. Il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$ et donc f est surjective.

Exercice 27 Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est une bijection.

Correction C'est évident car $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \text{id}_E$. Ainsi f est bijective de bijection réciproque $f^{-1} : E \rightarrow E$ définie par $f^{-1} = f \circ f$.