Feuille 3 : Bases de logique

Exercice 1 *Soient P, Q deux propositions. Ecrire la table de vérité de* $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ *et celle de* P *ou* $(\text{non}\, Q)$.

Exercice 2 *Soient P, Q, R des propositions. Ecrire la table de vérité de* $(P \Rightarrow Q)$ *ou* $((\text{non}\ R)$ *et* $P))$.

Exercice 3 *Soient P, Q, R des prédicats. Montrer :*

1. $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ *équivaut à* $(P$ *et* $Q) \Longrightarrow R$.
2. $(P$ *ou* $Q) \Longrightarrow R$ *équivaut à* $(P \Longrightarrow R)$ *et* $(Q \Longrightarrow R)$.

Exercice 4 *Soient P, Q des propositions. Montrer que* $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \text{ et } Q))$ *est une tautologie.*

Exercice 5 *Montrer par disjonction de cas que dans un groupe de personnes non vide, il existe toujours une personne P telle que : P a les yeux bleus $\Rightarrow$ tout le monde a les yeux bleus.*

Exercice 6 *Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université de Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et, pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.*

1. *Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : «Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».*
2. *Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques, puis l'énoncer en français.*

Exercice 7 *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Écrire en utilisant les symboles $\forall, \exists, \in, \notin$ les assertions*

1. $A \cap B \neq \varnothing$; 2. $A \subset B$; 3. $A \not\subset B$; 4. $A = \varnothing$.

Exercice 8 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est* bornée *si la propriété suivante est vraie :*
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant M.$$
Écrire avec des quantificateurs la définition de « f n'est pas bornée. »
2. *Écrire avec des quantificateurs la définition de « f est croissante », puis celle de « f n'est pas croissante », et enfin celle de « f est décroissante ».*

Exercice 9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers naturels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. Établir la propriété*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3^n.$$

Exercice 10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ pour tout entier naturel n.*

Exercice 11 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer par récurrence forte que l'on a* $u_n = 2^{n-1}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

Exercice 12 *Pour tout nombre entier naturel* n, *soit* $P(n)$ *la propriété :* $2^n > n^2$.

1. *Démontrer que, pour* $n \geqslant 3$, *l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*
2. *Pour quels entiers* n *la propriété* $P(n)$ *est-elle vraie ?*

Exercice 13 (Principe des tiroirs)

1. *Soit* n *un nombre entier,* $n \geqslant 1$. *Démontrer que, si vous rangez* $n+1$ *paires de chaussettes dans* n *tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.*
2. *Un fichier contient* 500 000 *mots formés d'au plus quatre lettres de l'alphabet latin. Peuvent-ils être tous distincts ?*

Exercice 14 *Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre réel* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls p *et* q *tels que* $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

1. *Vérifier que l'on a* $p^2 = 2q^2$.
2. *Justifier que l'on peut supposer que* p *et* q *sont premiers entre eux.*
3. *Démontrer que* p *est pair.*
4. *En déduire que* q *est pair.*
5. *En déduire que* p *et* q *n'existent pas.*

Exercice 15 *Soit* P_1, P_2, P_3 *et* P_4 *les parties du plan* $\mathbb{R}^2$ *définies par*

$$\begin{array}{ll} P_1 = \{(x,y), x+y \leq 1\} & P_2 = \{(x,y), x-y \leq 1\} \\ P_3 = \{(x,y), -x+y \leq 1\} & P_4 = \{(x,y), -x-y \leq 1\}. \end{array}$$

1. *Représenter* $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ *et* $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ *dans le plan* $\mathbb{R}^2$.
2. *Comparer* $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ *et* $P_1^c \cup P_2^c$.

Exercice 16 *On considère les ensembles* $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ *et* $G = \{1, 4\}$. *On rappelle que* $\mathcal{P}(E)$ *désigne les parties de* E. *Donner en extension (c'est à dire écrire tous les éléments que contiennent) les ensembles suivants :*

1. $\mathcal{P}(E)$
2. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \mathcal{P}(E \times F)$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

Exercice 17 *Soit* E *un ensemble. On suppose qu'il existe une application* $f : E \to \mathcal{P}(E)$ *qui soit surjective.*

1. *Pour* $a \in E$, *à quel ensemble appartient* $f(a)$ *?*
2. *On considère l'ensemble* $A := \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$ *et* a *un antécédent de* A *par* f. *Est-il possible que* $a \in A$ *? Que* $a \notin A$ *? Qu'en concluez-vous ?*

Exercice 18 *On considère les ensembles*

$$E = \left\{ x \in [0,1],\, \exists n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1} \right\} \quad et \quad F = \left\{ x \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Déterminer E *et* F.

Exercice 19 *Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.*

1. *Jules et Jim sont deux habitants de cette île. Jules déclare : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ». En raisonnant par l'absurde, démontrer que Jules est sincère. Qu'en est-il de Jim ?*
2. *Anne, Émilie et Charlotte sont trois habitantes. Anne déclare : « Nous sommes toutes menteuses ». Émilie dit : « Une et une seule d'entre nous est sincère ». En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'Anne est une menteuse, puis qu'Émilie est sincère. Qu'en est-il de Charlotte ?*

Exercice 20 *Soit E un ensemble fini non vide et a_0 un élément fixé de E. On considère l'application*

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), A \mapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases}.$$

1. *Démontrer que, si* $\mathrm{Card}(A)$ *est pair, alors* $\mathrm{Card}(f(A))$ *est impair, et que si* $\mathrm{Card}(A)$ *est impair, alors* $\mathrm{Card}(f(A))$ *est pair.*
2. *Démontrer que, pour toute partie A de E, $(f \circ f)(A) = A$.*
3. *En déduire que f est bijective.*
4. *Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation :* « Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair ».

Exercice 21 *Soit E et F deux ensembles.*

1. *Si $A \subset E$ et $B \subset F$, démontrer que l'on a alors $A \times B \subset E \times F$.*
2. *Supposons que les ensembles E et F contiennent chacun au moins deux éléments distincts. Trouver une partie X de $E \times F$ qui ne soit pas de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$.*

Exercice 22 *Le symbole $\neg$ désigne la négation. Le connecteur NAND (non-et) est défini par*

$$P \text{ NAND } Q \text{ équivaut à } \neg(P \wedge Q).$$

1. *Donner la table de vérité du connecteur NAND.*
2. *Peut-on définir $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ en fonction uniquement de NAND ?*
3. *Mêmes questions pour le connecteur NOR (non-ou) défini par $\neg(P \vee Q)$.*

Exercice 23 *Soit E un ensemble à n éléments et A une partie de E à p éléments.*

1. *Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?*
2. *Soit m un entier tel que $p \leqslant m \leqslant n$. Combien y a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A ?*
3. *Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?*

Exercice 24 *On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé suivant :*

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2^{k+1}-1}{2^k} & \textit{si } n = 2k \textit{ est pair} \\ \\ \dfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} & \textit{si } n = 2k+1 \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 25 *Soit $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$ deux nombres entier. On désigne par $D(p,n)$ le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \ldots + x_p = n$.*

1. *Établir l'identité* $D(p,n) = \sum_{k=0}^{n} D(p-1, n-k)$.
2. *En déduire la formule* $D(p,n) = \binom{n+p-1}{p-1}$.

Exercice 26 *Soit un ensemble E. Pour toutes parties A et B de E,*
on désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. *Démontrer que* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. *Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.*
3. *Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = E$.*

Exercice 27 (**Fonctions caractéristiques**) *Étant donné une partie X d'un ensemble E, on définit une application $f_X : E \to \{0,1\}$ par :*

$$\forall e \in E, \;\; f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1. *Si A et B sont deux parties de E, démontrer l'équivalence*
$$A = B \iff f_A = f_B.$$
2. *Comment peut-on exprimer la condition $A \subset B$ avec les fonctions f_A et f_B ?*
3. *Exprimer $f_{A\cap B}, f_{A\cup B}$ et f_{A^c} à l'aide de f_A et f_B.*
4. *Exprimer $f_{A\triangle B}$ en fonction de f_A et f_B.*
5. *Reprendre les questions 2, 3 de l'exercice précédent en utilisant les fonctions caractéristiques.*

Exercice 28 *Soit A, B deux ensembles finis non vides.*

1. *En raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments de A, démontrer que le nombre d'applications de A dans B est* $\mathrm{Card}(B)^{\mathrm{Card}(A)}$.
2. *Retrouver de cette manière le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ (*utiliser l'exercice 3-106*).*

Exercice 29 (Formule de Vandermonde)

1. *Soit k, m, n trois nombres entiers naturels tels que $k \leqslant \min\{m,n\}$. Démontrer l'identité*
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$
Pour cela, on pourra considérer deux ensembles finis E, F tels que $\mathrm{Card}(E) = m$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, puis dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à k éléments dans la réunion $E \cup F$.
2. *En déduire l'identité* $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.