

Feuille 6 : Polynômes

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2 + 1) = P(X)$
2. $P(2X + 1) = P(X)$

Exercice 2. On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
 - a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ .
 - b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a .
 - c) Déterminer P .
2. Conclure.

Exercice 3. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$
2. $X^6 - 4$
3. $X^4 - 13X^2 + 36$
4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 4. On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2 \cos \theta)$.
4. Donner les racines de P_n .

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

Exercice 6. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 7. Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

Exercice 8. Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

Exercice 9. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 10. Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P .

1. Déterminer α .
2. Montrer que -1 est une racine double de P .
3. Montrer que j est une racine multiple de P .
4. Factoriser P , d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 12. Pour tout complexe a , on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a .
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, des fractions rationnelles suivantes.

- a) $\frac{1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X}{X^2-1}.$
- b) $\frac{X+1}{X^2+1}, \quad \frac{X^2}{X^3-1}.$
- c) $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}, \quad \frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}.$
- d) $\frac{X^4}{X^2-3X+2}, \quad \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}.$

Exercice 14. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

- a) $\frac{X^2+1}{X(X^2-1)}, \quad \frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}, \quad \frac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)}, \quad \frac{X^6-X^2+1}{(X-1)^3}.$
- b) $\frac{1}{(X^2+1)^2-X^2}, \quad \frac{X^3-4X^2+1}{(X-2)^3(X+1)}, \quad \frac{1}{X^2(X^2-2X+2)^2}.$
- c) $\frac{2X^6+3X^5-3X^4-3X^3-3X^2-18X-5}{X^5+X^4-2X^3-X^2-X+2}.$

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

Exercice 16. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 17. Calculer le pgcd des couples de polynômes (P, Q) suivants :

1. $P = 6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q = 15(X-1)(X+7)^3(X^2+1),$
2. $P = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q = X^3 + X^2 - 2X,$
3. $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $Q = X(X-1)^2(X-2),$
4. $P = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8.$

Exercice 18. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P . Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

Exercice 19. Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b).$
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

Exercice 20. On définit une suite de polynômes $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m .$$

4. Montrer que $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$\text{Pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \text{Pgcd}(P_m, P_n) .$$

5. Conclure que $\text{Pgcd}(P_m, P_n) = P_{\text{Pgcd}(m, n)}$.

Exercice 21. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

Exercice 22. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

Exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 24. Pour $n \geq 1$, on note $P_n = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^p \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$ et de $\sum_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

Exercice 25. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

Exercice 26. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

Exercice 27. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et d son degré. Pour n entier naturel, on définit u_n comme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$. Montrer que $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une suite arithmétique.

Exercice 28. Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 29. Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité (*) :

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant (*). Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer finalement que P vérifie (*) si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

Exercice 30. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ . Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\beta + \alpha} .$$

Exercice 31. Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} .$$

Exercice 32. Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P . Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.