Feuille 1 : Calculs algébriques

Exercice 1 *Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :*

1) $(125)^{-2/3}$ *2)* $(-5x)^3$ *3)* $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^2$ *4)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

5) $-2\sqrt{9y}+10\sqrt{y}$ *6)* $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$ *7)* $5^{-1/2}\cdot 5x^{11/6}\cdot(5x)^{-3/2}$ *8)* $\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$

9) $\frac{y}{5x-y}+\frac{5x}{y-5x}+1$ *10)* $\frac{\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}}{3x+5}$ *11)* $\frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}}$ *12)* $\frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}$

Exercice 2 *Soit a, b, c et d des réels. Développer $(a+b+c+d)^2$ puis $(a+b+c)^3$.*

Exercice 3 *Soit x et y deux réels. On suppose que $x-y=1$. Calculer $x^3-3xy-y^3$.*

Exercice 4

1. *Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a*
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$
2. *Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\frac{2}{k(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}$.*
3. *En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.*
4. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$.*

Exercice 5

1. *Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.*
   a) En effectuant une démonstration par récurrence.
   b) En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :
$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)=\sum_{k=0}^{n}k.$$
2. *En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$.*

Exercice 6

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right) = n(n+1)^2$.
2. *En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$*, montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Exercice 7 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on considère la suite* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. *Montrer par récurrence que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}.$$

Exercice 8

1. *Pour* $0 \leq i \leq n$ *et* $0 \leq j \leq n$*, quelles valeurs prend l'entier* $Max(i,j)$ *? Combien de fois prend-il une valeur* k *fixée ?*
2. *En déduire que*

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j)\right) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)k.$$

3. *En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :*

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j)\right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Exercice 9 1. *En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

2. a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $p \in \{1,\ldots,n\}$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.

   b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

3. *À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout* $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 10 1. *Expliciter deux constantes réelles* a *et* b *telles que pour tout entier* $k \in \mathbb{N}^*$*, on ait :*

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{a}{k+2}.$$

2. *Soit* $n \geq 2$ *un entier. Utiliser la question précédente pour obtenir une expression pas trop compliquée de la somme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 11 *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet exercice est de refaire l'exercice 7* **sans** *considérer comme connue la formule de sommation des carrés d'entiers consécutifs. On notera $S = \sum_{k=0}^{n} k^2$, et on fera semblant de ne pas savoir calculer cet entier S.*

1. *En refaisant à l'identique l'exercice 7, montrer que :*
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j)\right) = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. *Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$.*
   a) *Montrer que $\sum_{j=0}^{n} Max(i,j) = \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j$.*
   b) *Montrer d'une part que $\sum_{j=0}^{i} i = i(i+1)$ et d'autre part que $\sum_{j=i+1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.*
3. *En utilisant la question précédente, obtenir la relation :*
$$4\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j)\right) = 2\sum_{i=0}^{n}(n(n+1) + i^2 + i).$$
4. *En rapprochant les formules prouvées aux questions 1 et 3, conclure.*

Exercice 12 *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.*

Exercice 13 *Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. L'objectif est d'étudier le sens de variation du k-ème terme du développement de $(a+b)^n$. Plus précisément, pour chaque indice k variant entre 0 et n, on note $u_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et on s'intéresse à la liste de réels $(u_0, \ldots, u_n)$.*

1. *Montrer que pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n-k}{k+1}\frac{b}{a}$.*
2. *Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff k = \frac{nb-a}{a+b}$ et $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff k < \frac{nb-a}{a+b}$.*
3. *Dans cette question, on suppose que $n < \frac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n$.*
4. *Dans cette question, on suppose que $n = \frac{b}{a}$. Montrer que $u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{n-1} = u_n$.*
5. *(Question plus difficile demandant de l'initiative). Et quand $n > \frac{b}{a}$, comment se comporte la liste $(u_0, \cdots, u_n)$?*

Exercice 14

1. *On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.*
   (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)k$.*
   (b) *On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$.*
      i. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$.*
      ii. *Calculer alors $T_n = \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k)$.*
      iii. *En déduire un lien entre S_n et T_n.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $C = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} 2^{k-l}$.*

Exercice 15 *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que pour tout* $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. *Montrer que pour tout* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. *En déduire que pour tout* $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
3. *Montrer que* $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$. *(Indication : on pourra considérer l'entier* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$*).*