Correction Feuille 1 : Calculs algébriques

Exercice 1 Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) (125)^{-2/3} & 2) (-5x)^3 & 3) \left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^2 & 4) \sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} \\
 5) -2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} & 6) \left[(x^2y^{-2})^{-1}\right]^{-1} & 7) 5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} & 8) \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} \\
 9) \frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 & 10) \frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} & 11) \frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}} & 12) \frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}
 \end{array}$$

Correction

1. $\sqrt[3]{125} = 5$, d'où $(125)^{-2/3} = 1/25$.

2. $(-5x)^3 = (-1)^3 5^3 x^3 = -125x^3$.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha ;$$

on en déduit que

$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1.$$

4. On a $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = (27^{1/4})^{1/3} = 27^{(1/4) \cdot (1/3)} = (27^{1/3})^{1/4} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3}$.

5. $\sqrt{9y} = \sqrt{9} \sqrt{y}$; donc, on peut factoriser par $2\sqrt{y}$ et on trouve

$$-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y} = 2\sqrt{y} (5 - \sqrt{9}) = 4\sqrt{y}.$$

6. $\left[(x^2y^{-2})^{-1}\right]^{-1} = (x^2y^{-2})^{(-1) \cdot (-1)} = x^2/y^2$.

7. On a

$$5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2} = 5^{-1/2+1-3/2} x^{11/6-3/2} = 5^{-1} x^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{5}.$$

8. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} &= \frac{x - (x+1)}{(x+1)x} = \frac{-1}{(x+1)x} \\
 \frac{1}{y/x} &= \frac{x}{y},
 \end{aligned}$$

d'où on trouve $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{-1}{(x+1)y}$.

9. On a

$$\frac{y}{5x-y} + \frac{5x}{y-5x} + 1 = \frac{y}{5x-y} - \frac{5x}{5x-y} + 1 = \frac{y-5x}{5x-y} + 1 = 0.$$

10. En utilisant le fait que $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, le même calcul de l'expression 8 montre que le numérateur est égal à $\frac{3x+5}{x^2-1}$, et donc

$$\frac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5} = \frac{1}{x^2-1}.$$

11. On écrit le dénominateur de la façon suivante :

$$x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}.$$

En factorisant le numérateur par x , on trouve alors

$$\frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}} = \frac{x(x^3 + x^2 + x + 1)}{\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4}} = x^5.$$

12. On observe que

$$x^5 + 1 = x^5 - (-1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

D'autre côté, en raisonnant comme au point 11, le dénominateur s'écrit comme

$$x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6} = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^6},$$

d'où on peut déduire que

$$\frac{1 + x^5}{x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6}} = x^6(x + 1).$$

Exercice 2 Soit a, b, c et d des réels. Développer $(a + b + c + d)^2$ puis $(a + b + c)^3$.

Correction

C'est un calcul.

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b + c)^2(a + b + c) = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)(a + b + c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc. \end{aligned}$$

Exercice 3 Soit x et y deux réels. On suppose que $x - y = 1$. Calculer $x^3 - 3xy - y^3$.

Correction On observe que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. En utilisant l'hypothèse $x - y = 1$, on trouve donc

$$x^3 - 3xy - y^3 = x^2 + xy + y^2 - 3xy = (x - y)^2 = 1.$$

Exercice 4 1. Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$.

Correction

1. Fait en cours.

2. En calculant le dénominateur en commun, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2) + bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k + 2a}{k(k+2)},$$

qui implique que $a = 1$ et $b = -a = -1$.

3. En utilisant le résultat précédent, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

4. On utilise encore le résultat du point 2 pour écrire

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)}.$$

Bien sûr, on a $\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1/n!$. D'autre côté, on a aussi

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)} = \prod_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 2 \left(\prod_{k=3}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} = 2 \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

En mettant tout ensemble, on trouve

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = 2^{n+1} \frac{1}{(n!)^2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2}.$$

Exercice 5 1. Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

a) En effectuant une démonstration par récurrence.

b) En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n k.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.

Correction

1. Pour (a), on commence par vérifier l'initialisation : pour $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^1 k = 0 + 1 = 1$, tandis que $1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1$. La formule est donc initialisée. On vérifie maintenant l'hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour n , donc

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il faut prouver la propriété pour $n+1$, c'est-à-dire il faut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On commence par écrire $\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

L'hérédité est donc vérifiée, et, par conséquent, la formule est prouvée pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour la partie (b), on admet l'identité (qui est un simple changement de variable). On appelle

$$S := \sum_{k=0}^n k$$

la quantité à déterminer. L'identité nous dit que $\sum_{k=0}^n (n-k) = S$. Mais, en développant le membre de gauche, on a

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n n - \sum_{k=0}^n k = n \sum_{k=0}^n 1 - S = n(n+1) - S.$$

On en déduit que $n(n+1) - S = S$, d'où $S = n(n+1)/2$.

2. C'est un calcul : grâce à la formule précédente, on peut calculer

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 6 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n (i+j) \right) = n(n+1)^2$.

2. En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \text{ montrer que pour tout } n \in \mathbb{N}^* :$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i ij \right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Correction

1. En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a

$$\sum_{j=0}^n (i+j) = \sum_{j=0}^n i + \sum_{j=0}^n j = (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui donne

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j) = (n+1) \sum_{i=0}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n 1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} = n(n+1)^2.$$

La formule est donc prouvée.

2. De façon analogue, on a

$$\sum_{j=0}^i ij = i \sum_{j=0}^i j = \frac{i^2(i+1)}{2} = \frac{1}{2} (i^3 + i^2).$$

En utilisant cette propriété, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i ij &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^i i^3 + \sum_{j=0}^i i^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) + 2(2n+1)), \end{aligned}$$

d'où on trouve facilement l'expression finale.

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}.$$

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera P_n la propriété " $u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}$ ".

Initialisation : si $n = 1$, alors $u_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{j=1}^1 \frac{1}{1+j} = \frac{1}{2}$, donc P_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n est vraie, et montrons que P_{n+1} est vraie. On a ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{n+j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{n+j} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+j} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+j}, \end{aligned}$$

donc P_{n+1} est vraie.

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Exercice 8 1. Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, quelles valeurs prend l'entier $\text{Max}(i, j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée?

2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k.$$

3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Correction

1. Étant donné que $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, l'entier $\text{Max}(i, j)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n . Maintenant, si on fixe k dans le même intervalle, on aura $\text{Max}(i, j) = k$ pour :

- toutes les couples (i, k) , avec $0 \leq i < k$: on a donc k couples ;
- toutes les couples (k, j) , avec $0 \leq j < k$: encore k couples ;
- la couple (k, k) .

En total, ça fait $2k + 1$ fois.

2. Deux solutions possibles.

(a) On découpe la somme à l'intérieur comme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) &= \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j = i(i+1) + \sum_{j=0}^n j - \sum_{j=0}^i j \\ &= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}. \end{aligned}$$

Si maintenant on calcule la somme à l'extérieur, en utilisant les formules des exercices 1-5 et 1-6, on trouve facilement

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \frac{1}{6} n(n+1)(4n+5).$$

C'est exactement le même résultat qu'on trouve quand on calcule la somme à droite, après avoir fait les multiplications à l'intérieur.

(b) Vu que la fonction peut prendre toutes les valeurs k entre 0 et n , et que la valeur k est prise $2k + 1$ fois, on peut écrire notre somme comme la somme des valeurs que la fonction prend, multipliées par le nombre des fois qu'elles sont prises : notamment,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{k=0}^n k(2k+1).$$

3. La réponse donnée au point précédent répond aussi à cette question.

Exercice 9 1. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

3. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Correction

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0. \end{aligned}$$

2. Pour n et p comme dans le texte, on calcule

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-p-1+1)!(p-1)!} = n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!(p-1)!} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

On en déduit la formule donnée. En fait, pour $n = 0$, il n'y a rien à prouver (on trouve $0 = 0$, qui est toujours vrai). Supposons alors $n \geq 1$. On remarque que le premier terme dans la somme à gauche (correspondant à $p = 0$) est nul; donc on peut écrire

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1},$$

qui est exactement ce qu'on voulait prouver.

3. Observons que, si $n = 0$, les deux membres de l'égalité à prouver valent 1, et donc l'égalité est vraie. Supposons maintenant $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k}.$$

Maintenant, la formule du triangle de Pascal nous dit que, pour tout $k \geq 1$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1} = \binom{p+k+1}{k}.$$

En prenant la somme sur $k = 1 \dots n$ à gauche et à droite, on déduit que

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{p+k+1}{k}.$$

En faisant le changement de variable $j = k + 1$ dans la somme à droite, on trouve

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} = \sum_{j=2}^{n+1} \binom{p+j}{j-1} = \sum_{j=1}^n \binom{p+j}{j-1} - 1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

On peut simplifier le terme qui apparaît à droite et à gauche, et on obtient

$$\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k} = -1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

En utilisant cette égalité dans (*), on déduit tout de suite la formule souhaitée.