Feuille 2 : Ensembles et applications

Exercice 1 1. *On note* $A = \{1,2,3\}$ *et* $B = \{0,1,2,3\}$. *Décrire les ensembles* $A \cap B$, $A \cup B$.

2. *On note* $A = [1,3]$ *et* $B = [2,4]$. *Déterminer* $A \cap B$ *et* $A \cup B$.
3. *On note* $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$ *et* $C =]-5,+\infty[$. *Déterminer* $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ *et* $B \cup C$.

Exercice 2 *Soit* A *et* B *deux ensembles. Montrer l'équivalence :*

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Exercice 3 *Soit* A, B *et* C *trois ensembles.*

1. *L'implication suivante est-elle vraie :*

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C)\ ?$$

2. *On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes :* $A \cup B \subset A \cup C$ *et* $A \cap B \subset A \cap C$. *Montrer que* $B \subset C$.

Exercice 4 *Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x = |x|$ *ou* $x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 > 0$.

Exercice 5 *En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous* a, $b \in \mathbb{R}$ *:*

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Exercice 6 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur* I *à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :*

1. f *s'annule ;*
2. f *est l'application nulle ;*
3. f *n'est pas une application constante ;*
4. f *ne prend jamais deux fois la même valeur ;*
5. f *s'annule au plus une fois.*

Exercice 7 1. *Soient les fonctions* f *et* g *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f(x) = 3x+1$ *et* $g(x) = x^2 - 1$. *Calculer* $f \circ g$ *et* $g \circ f$. *Qu'observe-t-on ?*

2. *À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions* u *et* v *telles que* $h = u \circ v$ *en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :*

(a) $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; *(b)* $h(x) = \frac{1}{x+7}$; *(c)* $h(x) = \sqrt{3x-1}$.

Exercice 8 *Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?*

1. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$
2. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$
3. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n \end{array}$
4. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x \end{array}$
5. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 8x+3 \end{array}$
6. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \{14\} \\ x & \mapsto 14 \end{array}$
7. $\begin{array}{rl} f : \{17\} & \longrightarrow \{12;17\} \\ x & \mapsto 17 \end{array}$
8. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$
9. $\begin{array}{rl} f : \{0\} & \longrightarrow \{0\} \\ x & \mapsto 0 \end{array}$
10. $\begin{array}{rl} f : \{1\} & \longrightarrow \{1/2\} \\ x & \mapsto \frac{1}{x+1} \end{array}$
11. $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n+1 \end{array}$
12. $\begin{array}{rl} g : \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n & \mapsto n+1 \end{array}$
13. $\begin{array}{rl} k : \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x+1}{x-1}. \end{array}$

Exercice 9
1. *On définit* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *pour tout* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ *par* $f(m, n) = mn$. *Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?*
2. *On définit* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *par* $g(k) = (k, (k+1)^2)$. *Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?*

Exercice 10 *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *l'application définie pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *par* $f(2k) = k$ *et* $f(2k+1) = -k-1$.
1. *Soit* m *un entier positif. Déterminer tous les antécédents de* m.
2. *Soit* m *un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de* m.
3. *L'application* f *est-elle une bijection ?*

Exercice 11 *On suppose connu que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe un unique couple d'entiers naturels* (m, j) *avec* $0 \leq j \leq m$ *tel que*

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + j.$$

On définit alors $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (m-j, j)$.
1. *Placer les points* $f(k)$ *pour* $0 \leq k \leq 9$.
2. *Montrer que* f *est une bijection.*

Exercice 12 *Soient* I *et* J *des parties de* $\mathbb{R}$, *et* $f : I \to J$ *définie pour tout* $x \in I$ *par* $f(x) = x^2$.
1. *Donner des ensembles* I *et* J *tels que* f *soit injective mais pas surjective.*
2. *Donner des ensembles* I *et* J *tels que* f *soit surjective mais pas injective.*
3. *Donner des ensembles* I *et* J *tels que* f *ne soit ni injective ni surjective.*
4. *Donner des ensembles* I *et* J *tels que* f *soit injective et surjective.*

Exercice 13 *On définit une partie du plan par* $D = \{(x, y) \in, \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$ *puis une application* $f : D \to \mathbb{R}^2$ *par* $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.
1. *Représenter graphiquement* D.
2. *(a) Montrer que si deux couples de réels* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *vérifient le système :*

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

   alors $x_1 = x_2$ *et* $y_1 = y_2$.

   (b) En déduire que f *est injective.*
3. *Est-ce que* f *est surjective ?*

Exercice 14 *Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

1. *Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?*
4. *Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
5. *Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
6. *Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :*

   (a) $g \circ f = \mathrm{id}_E$; *(b)* $f \circ g = \mathrm{id}_F$; *(c)* $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 15 *On considère l'application $f :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$.*

1. *Existe-t-il $g :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?*
2. *Existe-t-il $h :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?*

Exercice 16

1. *Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :*

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 2$$

   (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.
2. *Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.*

Exercice 17 *Montrer que chacune des applictions suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :*

1. $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 3x + 1$.
2. $g :\ ]e, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ *définie par* $F(t, n) = t \cdot 10^n$.

Exercice 18

1. *Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que :*

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. *On définit $f :\ \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \to \mathbb{Q}$ par :*

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

   Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 19 *Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.*

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0, 1])$ *pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ *pour* $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;

9. $f^{-1}([0,1])$ *pour* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0,1])$;
11. $(\cos_{|[3\pi,7\pi]})^{-1}([0,1])$;
12. $\cos^{-1}([0,1])$;

Exercice 20 *Soient E un ensemble et f une application de E dans lui-meme telle que* $f\Big(f(E)\Big) = E$. *Montrer que f est surjective.*

Exercice 21 *Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est injective ;*

ii) *Pour tous A_1, A_2 parties de X, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.*

Exercice 22 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.*

Exercice 23 *Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1}, montrer que f est bijective.*

Exercice 24 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une application strictement croissante.*

1. *Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.*
2. *Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \to K$ soit bijective.*

Exercice 25 *Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\exists G \subset F$ telle que f est une bijection de E dans G ;*

ii) *f est injective.*

Exercice 26 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par* $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. *Soit y un réel. Combien y possède-t-il d'antécédents ? On discutera selon la valeur de y.*
2. *f est-elle injective ? surjective ?*
3. *Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.*
4. (a) *Soit y un réel ayant exactement deux antécédents x_1 et x_2 par f. Déterminer la valeur du produit $x_1 x_2$, puis montrer qu'un et un seul des réels x_1 et x_2 appartient à l'intervalle $[-1,1]$.*
   (b) *En déduire que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.*

Exercice 27 *Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soient également A_1 et A_2 deux parties de E, et B_1 et B_2 deux parties de F.*

1. *Montrer que $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?*
2. *Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.*

Exercice 28 *Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.*

1. *Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.*
2. *Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B$.*
3. *Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, on a $A = f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.*
4. *Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B$.*

Exercice 29 *Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est une bijection.*