

## Feuille 2 : Ensembles et applications

- Exercice 1**
1. On note  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ . Décrire les ensembles  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ .
  2. On note  $A = [1, 3]$  et  $B = [2, 4]$ . Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .
  3. On note  $A = ]-\infty, 3]$ ,  $B = ]-2, 7]$  et  $C = ]-5, +\infty[$ . Déterminer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $B \cap C$  et  $B \cup C$ .

### Correction

1.  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$  et  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ .
2.  $A \cap B = [2, 3]$  et  $A \cup B = [1, 4]$ .
3.  $A \cap B = ]-2, 3]$ ,  $A \cup B = ]-\infty, 7]$ ,  $B \cap C = ]-2, 7]$  et  $B \cup C = ]-5, +\infty[$ .

**Exercice 2** Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

**Correction** On raisonne par double-implication.

Montrons que  $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ . Supposons que  $A \subset B$ . Alors,  $A \setminus B = \emptyset$ , d'où

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = B.$$

Montrons maintenant que  $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ . On suppose que  $A \cup B = B$ . Alors, comme  $A \subset A \cup B$ , on a bien  $A \subset A \cup B = B$ .

**Exercice 3** Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C) ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes :  $A \cup B \subset A \cup C$  et  $A \cap B \subset A \cap C$ . Montrer que  $B \subset C$ .

### Correction

1. La contraposée de cette implication est

$$(A \subset C \text{ et } B \subset C) \implies A \cup B \subset C$$

et cette implication est vraie.

2. Soit  $x \in B$ . Montrons que  $x \in C$ . Comme  $x \in B$ , on a  $x \in A \cup B$ , d'où  $x \in A \cup C$  par hypothèse. Si  $x \in C$ , c'est terminé. Si  $x \in A$ , on a  $x \in A \cap B$ . Par hypothèse, on a donc  $x \in A \cap C$  ce qui entraîne  $x \in C$ . Dans tous les cas  $x \in C$  et on a montré que  $B \subset C$ .

**Exercice 4** Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$ .
2.  $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$ .
3.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$ .
4.  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$ .

### Correction

1. *négation*:  $\exists x \in \mathbb{R}, (x \neq |x| \text{ et } x \neq -|x|)$ . L'énoncé est vrai mais pas sa négation.
2. *négation*:  $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq |x|)$  et  $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq -|x|)$ . La négation est vraie mais pas l'énoncé.  
En effet, on a bien (par exemple)  $-2 \neq |-2|$  et  $3 \neq -|3|$ .
3. *négation*:  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 \geq 0$ . La négation est vraie mais pas l'énoncé.  
En effet, une fois  $x$  fixé, il suffit de choisir  $y$  de telle sorte que  $y \geq x - x^2$ .
4. *négation*:  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 \leq 0$ . L'énoncé est vrai mais pas sa négation.  
En effet, il suffit d'étudier le trinôme du second degré  $P_y(x) = x^2 + x - y$ . Celui-ci a pour discriminant  $\Delta_y = 1 - 4y$ . Ainsi, si  $1 - 4y < 0$ , c'est-à-dire  $y > 1/4$ , alors  $P_y(x) > 0$  pour tout réel  $x$ . Il existe donc bien un réel  $y$  (par exemple  $y = 1$ ) tel que  $x^2 + x - y > 0$  pour tout réel  $x$ .

**Exercice 5** En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$(\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

**Correction** La contraposée de cette implication est

$$a > b \implies (\exists \varepsilon > 0, a > b + \varepsilon).$$

Celle-ci est vraie. En effet, par exemple, posons  $\varepsilon := \frac{1}{2}(a - b) > 0$ . Alors,  $b + \varepsilon = \frac{1}{2}(a + b) < a$  car  $a - \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a - b) > 0$ .

**Exercice 6** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1.  $f$  s'annule ;
2.  $f$  est l'application nulle ;
3.  $f$  n'est pas une application constante ;
4.  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5.  $f$  s'annule au plus une fois.

### Correction

1.  $\exists x \in I, f(x) = 0$ .
2.  $\forall x \in I, f(x) = 0$ .
3.  $\exists x \in I, \exists y \in I, f(x) \neq f(y)$ .
4.  $\forall x \in I, \forall y \in I, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ .
5.  $\nexists (x, y) \in I^2, x \neq y, f(x) = f(y) = 0$ .

**Exercice 7** 1. Soient les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 1$ . Calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ . Qu'observe-t-on ?

2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que  $h = u \circ v$  en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

(a)  $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  ;

(b)  $h(x) = \frac{1}{x + 7}$  ;

(c)  $h(x) = \sqrt{3x - 1}$ .

### Correction

1. Par définition,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 1 = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2,$$
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x.$$

On constate que  $f \circ g \neq g \circ f$ .

2. Par exemple,

(a)  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$  et  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$ ,

(b)  $u : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $v : \mathbb{R} \setminus \{-7\} \rightarrow \mathbb{R}^*; x \mapsto x + 7$ ,

(c)  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto \sqrt{x}$  et  $v : [\frac{1}{3}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto 3x - 1$ .

**Exercice 8** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

6.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{14\}$   
 $x \mapsto 14$

10.  $f : \{1\} \rightarrow \{1/2\}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $x \mapsto x^2$

7.  $f : \{17\} \rightarrow \{12; 17\}$   
 $x \mapsto 17$

11.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \mapsto n + 1$

3.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \mapsto n$

8.  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

12.  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $n \mapsto n + 1$

4.  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x$

9.  $f : \{0\} \rightarrow \{0\}$   
 $x \mapsto 0$

13.  $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 8x + 3$

**Correction** (détails vus en TD)

1. ni injective ni surjective,

6. surjective mais pas injective,

11. injective mais pas surjective,

2. surjective mais pas injective,

7. injective mais pas surjective,

12. bijective,

3. bijective,

8. injective mais pas surjective,

13. injective mais pas surjective.

4. injective mais pas surjective,

9. bijective,

5. bijective,

10. bijective,

**Exercice 9** 1. On définit  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  par  $f(m, n) = mn$ . Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

2. On définit  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par  $g(k) = (k, (k + 1)^2)$ . Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

### Correction

1. pas injective car  $f(m, 0) = 0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , surjective car  $f(m, 1) = m$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .
2. injective car  $g(k) = g(l)$  implique que  $k = l$ , mais pas surjective car, par exemple,  $(0, 0)$  n'a pas un antécédent.

**Exercice 10** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  l'application définie pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par  $f(2k) = k$  et  $f(2k + 1) = -k - 1$ .

1. Soit  $m$  un entier positif. Déterminer tous les antécédents de  $m$ .
2. Soit  $m$  un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de  $m$ .
3. L'application  $f$  est-elle une bijection ?

### Correction

1. Soit  $m \in \mathbb{N}$ , alors  $m$  admet comme unique antécédent  $2m$ .
2. Soit  $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , alors  $m = -k - 1$  implique que  $k = -m - 1$ , donc  $2k + 1 = -2m - 1$  et ainsi  $f(-2m - 1) = f(2(-m - 1) + 1) = m + 1 - 1 = m$ . L'unique antécédent de  $m$  est donc  $-2m - 1 \in \mathbb{N}$ .
3. Tout entier  $m \in \mathbb{Z}$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{N}$ , donc  $f$  est bijective.

**Exercice 11** On suppose connu que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique couple d'entiers naturels  $(m, j)$  avec  $0 \leq j \leq m$  tel que

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + j.$$

On définit alors  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ ,  $n \mapsto (m - j, j)$ .

1. Placer les points  $f(k)$  pour  $0 \leq k \leq 9$ .
2. Montrer que  $f$  est une bijection.

### Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} f(0) &= (0, 0), & f(1) &= (1, 0), & f(2) &= (0, 1), & f(3) &= (2, 0), & f(4) &= (1, 1), & f(5) &= (0, 2), \\ f(6) &= (3, 0), & f(7) &= (2, 1), & f(8) &= (1, 2), & f(9) &= (0, 3), & f(10) &= (4, 0). \end{aligned}$$

On voit que l'on remplit  $\mathbb{N}^2$  "diagonale par diagonale" (d'en bas à droite vers en haut à gauche).

2. Montrons que  $f$  est injective. Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , alors on a l'existence de deux couples uniques  $(m_1, j_1)$  et  $(m_2, j_2)$  tels que

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow (m_1 - j_1, j_1) = (m_2 - j_2, j_2) \Rightarrow (m_1, j_1) = (m_2, j_2)$$

en résolvant facilement le système. Par unicité du couple  $(m, j)$ , il en découle que  $n_1 = n_2$  et donc  $f$  est bijective.

Montrons la surjectivité de  $f$ . Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$(p, q) = f(n)$$

comme  $f(n) = (m - j, j)$  pour un unique couple  $(m, j)$ , alors on trouve que

$$(p, q) = (m - j, j) \Rightarrow j = q \text{ et } m = p + q,$$

donc

$$n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q \in \mathbb{N}$$

et donc tout entier admet un antécédent par  $f$ . Ainsi,  $f$  est bijective.

**Exercice 12** Soient  $I$  et  $J$  des parties de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow J$  définie pour tout  $x \in I$  par  $f(x) = x^2$ .

1. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  ne soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective et surjective.

**Correction** Par exemple,

1.  $I = [0, 1]$  et  $J = [-1, 1]$ ,
2.  $I = [-1, 1]$  et  $J = [0, 1]$ ,

3.  $I = J = [-1, 1]$ ,
4.  $I = J = [0, 1]$ .

**Exercice 13** On définit une partie du plan par  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$  puis une application  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ .

1. Représenter graphiquement  $D$ .
2. (a) Montrer que si deux couples de réels  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors  $x_1 = x_2$  et  $y_1 = y_2$ .

(b) En déduire que  $f$  est injective.

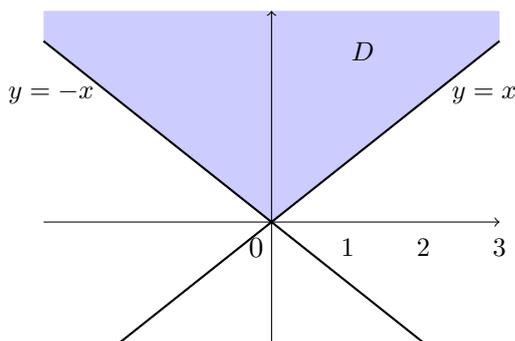
3. Est-ce que  $f$  est surjective ?

### Correction

1. Par définition, les inégalités  $-y \leq x \leq y$  sont équivalentes à

$$-y \leq x \quad \text{et} \quad x \leq y \quad \iff \quad y \geq -x \quad \text{et} \quad y \geq x \quad \iff \quad y \geq \max\{-x, x\} = |x|.$$

Donc, l'ensemble  $D$  est représenté par la partie blue de dessin suivant:



2. (a) Additionnant les deux équations, on trouve que  $2x_1 = 2x_2$ , donc  $x_1 = x_2$ . Ensuite, remplaçant dans ces deux équations, on trouve que  $y_1 = y_2$ .
- (b) Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  deux points dans  $D$  tels que  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ . Par définition, on a

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 & \cdots & L_1, \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 & \cdots & L_2. \end{cases}$$

$L_1 + L_2$  donne  $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$ , i.e.,  $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$ . Comme  $x + y \geq 0$  sur  $D$ , on en déduit que  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 (\geq 0)$ . De même,  $L_1 - L_2$  donne  $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$ . Comme  $x - y \leq 0$  sur  $D$ , on en déduit que  $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 (\leq 0)$ . D'après 2. (a), cela donne  $x_1 = x_2$  et  $y_1 = y_2$ , qui montre que  $f$  est injective.

3. Comme  $x^2 + y^2 \geq 0$  quoi que ce soit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  ne peut être surjective.

**Exercice 14** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles, et soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
2. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.
3. Que peut-on conclure sur  $g \circ f$  si  $f$  et  $g$  sont bijectives ?
4. Montrer que si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
5. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
6. Si à présent  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$ , déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

$$(a) g \circ f = \text{id}_E;$$

$$(b) f \circ g = \text{id}_F;$$

$$(c) f \circ f = \text{id}_E.$$

### Correction

1. Soient  $x_1, x_2 \in E$  tels que  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ , i.e.,  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ . Comme  $g$  est injective, ceci implique que  $f(x_1) = f(x_2)$ , d'où  $x_1 = x_2$  car  $f$  est aussi injective.
2. Soit  $z \in G$ . Comme  $g$  est surjective, il existe  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Donc,  $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$  qui montre que  $g \circ f$  est surjective.
3. D'après les deux questions précédentes,  $g \circ f$  est bijective.
4. Soient  $x_1, x_2 \in E$  tels que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Alors, on a

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Par hypothèse, on a  $x_1 = x_2$ , d'où  $f$  est injective.

5. Soit  $z \in G$ . Par hypothèse, il existe  $x \in E$  tel que  $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ . Donc, posons  $y = f(x) \in F$ , on voit que  $g(y) = g(f(x)) = z$ , d'où  $g$  est surjective.
6. (a).  $g$  est surjective (d'après 5.) et  $f$  est injective (d'après 4.).  
(b).  $f$  est surjective (d'après 5.) et  $g$  est injective (d'après 4.).  
(c). D'après 4. et 5.,  $f$  est bijective.

**Exercice 15** On considère l'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f(n) = n^2$ .

1. Existe-t-il  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$  ?
2. Existe-t-il  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$  ?

### Correction

1. Comme  $f$  n'est pas surjective,  $f \circ g$  ne peut être surjective. En particulier,  $f \circ g$  ne peut être bijective, donc une telle  $g$  n'existe pas.
2. Il existe une telle  $h$ ; en effet, il suffit de prendre une application  $h$  vérifiant  $h(n) = \sqrt{n}$  s'il existe un  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n = m^2$ .

**Exercice 16** 1. Soit  $f$  l'application de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$$

- (a) Déterminer  $f(A)$  lorsque  $A = \{1\}$ ,  $A = \{1, 3\}$ ,  $A = \{3, 4\}$  et  $A = \emptyset$ .  
(b) Déterminer  $f^{-1}(B)$  lorsque  $B = \{2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  et  $B = \{3\}$ .
2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Déterminer  $f^{-1}(B)$  lorsque  $B = \{1\}$  et  $B = [1, 2]$ .

### Correction

1. Par définition,  $f(1) = \{4\}$ ,  $f(\{1, 3\}) = \{2, 4\}$ ,  $f(\{3, 4\}) = \{2\}$  et  $f(\emptyset) = \emptyset$ .
2. Par définition,  $f^{-1}(\{2\}) = \{3, 4\}$ ,  $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3, 4\}$  et  $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ .

**Exercice 17** Montrer que chacune des applications suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x + 1$ .
2.  $g : ]e, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$ .
3.  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $a(s, t) = (2s, 3t)$ .
4.  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $b(s, t) = (s + t, s - t)$ .
5.  $F : [1, 10[ \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  définie par  $F(t, n) = t \cdot 10^n$ .

### Correction

1. Soit  $y \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , alors on a

$$y = f(x) \iff y = 3x + 1 \iff x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, tout réel  $y$  admet un unique antécédent  $x = \frac{y-1}{3}$  par  $f$  dans  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $f$  est bijective de bijection réciproque  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$ .

2. Soit  $y \in \mathbb{R}$  et  $x \in ]e, +\infty[$ , alors on a

$$y = g(x) \iff y = \ln(\ln(\ln x)) \iff x = e^{e^{e^y}} > e.$$

Ainsi, tout réel  $y$  admet un unique antécédent  $x = e^{e^{e^y}}$  par  $g$  dans  $]e, +\infty[$ . On en déduit que  $g$  est bijective de bijection réciproque  $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]e, +\infty[$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{e^{e^x}}$ .

3. Soit  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , alors on a

$$(y_1, y_2) = a(s, t) \iff (y_1, y_2) = (2s, 3t) \iff (s, t) = (y_1/2, y_2/3) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, tout point  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  admet un unique antécédent  $(s, t) = (y_1/2, y_2/3)$  par  $a$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On en déduit que  $a$  est bijective de bijection réciproque  $a^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  par  $a^{-1}(s, t) = (s/2, t/3)$ .

4. Soit  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , alors on a

$$(y_1, y_2) = b(s, t) \iff (y_1, y_2) = (s+t, s-t) \iff (s, t) = \left( \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, tout point  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  admet un unique antécédent  $(s, t) = \left( \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2} \right)$  par  $b$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On en déduit que  $b$  est bijective de bijection réciproque  $b^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  par  $b^{-1}(s, t) = \left( \frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2} \right)$ .

5. Soit  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , alors il est clair (pensez à la division euclidienne) qu'il existe un unique  $n_y \in \mathbb{Z}$  tel que  $y \times 10^{-n_y} \in [1, 10[$ . On note  $t_y = y \times 10^{-n_y}$  et ce nombre est lui aussi unique. Ainsi,  $F$  est bijective de bijection inverse  $F^{-1} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow [1, 10[ \times \mathbb{Z}$  est définie pour tout réel  $y > 0$  par  $F^{-1}(y) = (n_y, y \times 10^{-n_y})$ .

**Exercice 18** 1. Soit  $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. On définit  $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{Q}$  par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

### Correction

1. Comme  $q_i \geq 2$ , on a  $0 < \frac{1}{q_i} \leq \frac{1}{2}$  ( $i = 1, 2$ ). En particulier, on a  $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0$  qui implique que

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. Soient  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$  deux éléments de  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$  ayant un même image par  $f$ , i.e.,

$$f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2) \iff p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = -p_1 + p_2.$$

Comme  $-p_1 + p_2 \in \mathbb{Z}$  et que  $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$  d'après la première question, on en déduit que  $p_1 = p_2$  et  $q_1 = q_2$ , c'est-à-dire, l'application  $f$  est injective. Mais  $f$  ne peut être surjective car pour un  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\frac{1}{q} \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$  qui signifie que l'application  $f$  ne peut pas prendre une valeur dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 19** Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 1. $\tan(\{0\})$ ;            | 7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ;   |
| 2. $\sin^{-1}(\{2\})$ ;       | 8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ;  |
| 3. $\exp(]-\infty, 2])$ ;     | 9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ; |
| 4. $\exp^{-1}([-1, e])$ ;     | 10. $(\cos_{ [0, \pi]})^{-1}([0, 1])$ ;   |
| 5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$ ;   | 11. $(\cos_{ [3\pi, 7\pi]})^{-1}([0, 1])$ ;   |
| 6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$ . | 12. $\cos^{-1}([0, 1])$ ;   |

**Correction**

- |                       |                       |   |
|-----------------------|-----------------------|---|
| 1. $\{0\}$ ,          | 6. $[e^3, +\infty[$ , | 11. $[7/2\pi, 9/2\pi] \cup [11/2\pi, 13/2\pi]$ ,              |
| 2. $\emptyset$ ,      | 7. $[-1, 1]$ ,        | 12. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n-1/2)\pi, (2n+1/2)\pi]$ . |
| 3. $]0, e^2]$ ,       | 8. $[-1/2, 1]$ ,      |   |
| 4. $] - \infty, 1]$ , | 9. $[0, 1]$ ,         |   |
| 5. $\mathbb{R}$ ,     | 10. $[0, \pi/2]$ ,    |   |

**Exercice 20** Soient  $E$  un ensemble et  $f$  une application de  $E$  dans lui-même telle que  $f(f(E)) = E$ . Montrer que  $f$  est surjective.

**Correction** Par définition, on a  $f(E) \subset E$ , d'où  $f(f(E)) \subset f(E)$ . Donc, par hypothèse, on a  $E \subset f(E)$ . Grâce aux double inclusions, on en déduit que  $f(E) = E$ , i.e.,  $f$  est surjective.

**Exercice 21** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $f$  est injective ;
- ii) Pour tous  $A_1, A_2$  parties de  $X$ , on a  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .

**Correction** Il a été démontré en cours que, pour tout  $A_1, A_2$  parties de  $X$ , on a  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ . Supposons que  $f$  est injective. Montrons que pour tous  $A_1, A_2$  parties de  $X$ ,  $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ . Soient  $A_1, A_2$  deux parties de  $X$ , et soit  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ , alors  $y \in f(A_1)$  et il existe donc  $x_1 \in A_1$  tel que  $y = f(x_1)$  et, de même,  $y \in f(A_2)$  et il existe  $x_2 \in A_2$  tel que  $y = f(x_2)$ . Comme  $f$  est injective et que  $f(x_1) = f(x_2) = y$ , on a  $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ . Ainsi,  $y \in f(A_1 \cap A_2)$  et on a montré i)  $\Rightarrow$  ii). Supposons que pour tous  $A_1, A_2$  parties de  $X$ ,  $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$  et montrons que  $f$  est injective. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe  $(x_1, x_2) \in X^2$  tels que  $x_1 \neq x_2$  et  $f(x_1) = f(x_2)$ . Comme  $f(\{x_1\}) \cap f(X \setminus \{x_1\}) = \emptyset$  par hypothèse (on a choisi  $A_1 = \{x_1\}$  et  $A_2 = X \setminus \{x_1\}$ ), alors il est clair que  $f(x_1) \neq f(x_2)$  car  $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ . Ainsi  $f$  est injective.

**Exercice 22** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une bijection. On suppose  $f$  strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque  $f^{-1}$  est également strictement croissante.

**Correction** Raisonnons par l'absurde et supposons que  $f^{-1}$  n'est pas strictement croissante. Il existe alors  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $y_1 < y_2$  et  $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ . On applique  $f$  à l'inégalité précédente en utilisant le fait que  $f$  est strictement croissante, ce qui nous donne  $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ , c'est-à-dire  $y_1 \geq y_2$ , ce qui est impossible. On en déduit que  $f^{-1}$  est strictement croissante.

**Exercice 23** Soit  $E, F$  et  $G$  trois ensembles et soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. On suppose  $g$  et  $g \circ f$  bijectives. En utilisant la bijection réciproque  $g^{-1}$ , montrer que  $f$  est bijective.

**Correction** Comme  $g \circ f$  est bijective, on obtient

$$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = \text{id}_G \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = \text{id}_E.$$

De la première équation, on déduit :  $f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1}$ , puis, en composant par  $g$  à droite,  $f \circ ((g \circ f)^{-1} \circ g) = \text{id}_F$ . Il existe donc une application  $h = (g \circ f)^{-1} \circ g$  telle que  $f \circ h = \text{id}_F$ .

De la deuxième équation, on déduit :  $((g \circ f)^{-1} \circ g) \circ f = \text{id}_E$ , et ainsi  $h \circ f = \text{id}_E$ .

On en déduit donc que  $f$  est bijective de bijection réciproque  $f^{-1} = h = (g \circ f)^{-1} \circ g$ .

**Exercice 24** Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $J \subset \mathbb{R}$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow J$  une application strictement croissante.

1. Montrer que  $f$  est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que  $x_1 \neq x_2$  est équivalent à  $x_1 < x_2$  ou  $x_1 > x_2$ .
2. Déterminer l'ensemble  $K$  tel que  $f : I \rightarrow K$  soit bijective.

**Correction**

1. Raisonnons par contraposée et supposons que  $f$  n'est pas injective. Montrons que  $f$  n'est pas strictement croissante. En effet, si  $f$  n'est pas injective, il existe  $(x_1, x_2) \in I^2$  tels que  $x_1 \neq x_2$  et  $f(x_1) = f(x_2)$ . En particulier, on a deux possibilités :

- $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) = f(x_2)$  ;
- $x_2 < x_1$  et  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Dans les deux cas,  $f$  n'est pas strictement croissante.

2. Pour que  $f$  soit bijective, il faut que  $f$  soit surjective car elle est déjà injective d'après la question précédente. Pour cela, on doit avoir  $f(I) = J$ . On choisit donc  $K = f(I)$ .

**Exercice 25** Soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\exists G \subset F$  telle que  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$  ;
- ii)  $f$  est injective.

**Correction** Il est clair que i)  $\Rightarrow$  ii). En effet, si  $f$  est injective, alors choisir  $G = f(E)$  suffit à assurer la bijectivité et donc la bijectivité de  $f : E \rightarrow G$ .

Il est aussi clair que ii)  $\Rightarrow$  i) par contraposée. En effet, si  $\forall G \subset F$ ,  $f : E \rightarrow G$  n'est jamais une bijection, alors  $f : E \rightarrow F$  ne peut pas être injective.

**Exercice 26** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. Soit  $y$  un réel. Combien  $y$  possède-t-il d'antécédents ? On discutera selon la valeur de  $y$ .
2.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer l'ensemble  $f(\mathbb{R})$ .
4. (a) Soit  $y$  un réel ayant exactement deux antécédents  $x_1$  et  $x_2$  par  $f$ . Déterminer la valeur du produit  $x_1 x_2$ , puis montrer qu'un et un seul des réels  $x_1$  et  $x_2$  appartient à l'intervalle  $[-1, 1]$ .  
(b) En déduire que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  définie par  $g(x) = f(x)$  est une bijection.

**Correction**

1. Soit  $y \in \mathbb{R}$ , alors

$$y = f(x) \iff y = \frac{2x}{1+x^2} \iff yx^2 - 2x + y = 0.$$

On considère le trinôme du second degré  $P_y(x) = yx^2 - 2x + y$ . Son discriminant est  $\Delta_y = 4 - 4y^2$ . Ainsi, si  $y \neq 0$  :

- Si  $\Delta_y < 0$ , c'est-à-dire  $1 - y^2 < 0$ , autrement dit  $y \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ , alors  $P_y(x) \neq 0$  et  $y$  n'admet donc pas d'antécédent par  $f$ .
- Si  $\Delta_y = 0$ , c'est-à-dire  $1 - y^2 = 0$ , autrement dit  $y \in \{-1, 1\}$ , alors  $P_y(x) = 0$  si et seulement si  $x = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$  et  $y$  (qui vaut  $-1$  ou  $1$ ) admet un unique antécédent  $x = \frac{1}{y}$  (qui vaut aussi respectivement  $-1$  ou  $1$ ) par  $f$ .
- Si  $\Delta_y > 0$ , c'est à dire  $y \in ]-1, 1[$ , alors  $P_y(x) = 0$  si et seulement si  $x \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}, \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \right\}$  qui sont les deux antécédents de  $y$  par  $f$ .

De plus, si  $y = 0$ , alors  $x = 0$  est son unique antécédent par  $f$ .

- $f$  n'est pas surjective car  $y = 2$  n'a pas d'antécédent.  $f$  n'est pas injective car  $y = 1/2$  admet deux antécédents par  $f$ .
- Pour déterminer  $f(\mathbb{R})$ , il suffit d'étudier la fonction  $f$ . Cette fonction est continue et dérivable comme quotient de fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule jamais. Sa dérivée au point  $x \in \mathbb{R}$  vaut  $f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ . On a ainsi  $f'(x) \leq 0$  si et seulement si  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  et  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \in [-1, 1]$ . On trouve aisément que les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  valent 0 toutes les deux. De plus  $f(-1) = -1$  et  $f(1) = 1$ , donc  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ .
- (a) Dans ce cas, on sait que les antécédents de  $y \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$  par  $f$  sont  $\left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}, \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \right\}$  dont le produit vaut 1. De plus, il est clair que  $\left| \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \right| = \frac{1}{|y|} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} > \frac{1}{|y|} > 1$ , et ainsi, comme le produit des deux antécédents vaut 1, on a  $\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \in [-1, 1]$ .
- (b) Il est clair d'après les questions précédentes que tout élément  $y \in [-1, 1]$  admet un unique antécédent par  $g$  dans  $[-1, 1]$  :
  - si  $y = 0$ , son unique antécédent par  $g$  est  $x = 0$  ;
  - si  $y = -1$ , son unique antécédent par  $g$  est  $x = -1$  ;
  - si  $y = 1$ , son unique antécédent par  $g$  est  $x = 1$  ;
  - si  $y \in ]-1, 1[$ , son unique antécédent par  $g$  est  $\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \in [-1, 1]$ .

On en déduit que  $g$  est une bijection.

**Exercice 27** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient également  $A_1$  et  $A_2$  deux parties de  $E$ , et  $B_1$  et  $B_2$  deux parties de  $F$ .

- Montrer que  $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ . La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ . L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

### Correction

- On suppose que  $B_1 \subset B_2$ . Montrons que  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ . Soit  $x \in f^{-1}(B_1)$ , alors  $f(x) \in B_1$ . Comme  $B_1 \subset B_2$ , on en déduit que  $f(x) \in B_2$ , et ainsi  $x \in f^{-1}(B_2)$ . La réciproque est fautive (trouvez un contre-exemple !).
- Soit  $y \in f(A_1 \cap A_2)$ , alors il existe  $x \in A_1 \cap A_2$  tel que  $y = f(x)$ . Comme  $x \in A_1$ , alors  $y \in f(A_1)$  et comme  $x \in A_2$  alors  $y \in f(A_2)$ . On en déduit que  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ . L'inclusion réciproque n'est vraie que si  $f$  est injective (cf. Exercice 19).
- On a  $f(A_1 \cup A_2) = \{f(x) : x \in A_1 \cup A_2\} = \{f(x) : x \in A_1\} \cup \{f(x) : x \in A_2\} = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

**Exercice 28** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
- Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

3. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A = f^{-1}(f(A))$ .
4. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**Correction**

1. Soit  $x \in A$ , alors  $f(x) \in f(A)$  et donc  $x \in f^{-1}(f(A))$ . On a donc  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
2. Soit  $y \in f(f^{-1}(B))$ , alors il existe  $x \in f^{-1}(B)$  tel que  $y = f(x)$ . On a donc  $f(x) \in B$  ce qui entraîne que  $y \in B$ . On a donc  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
3. On sait déjà que  $A \subset f^{-1}(f(A))$ . On doit donc montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ .

Supposons que  $f$  est injective. Soit  $x \in f^{-1}(f(A))$ , alors  $f(x) \in f(A)$  et donc il existe  $x'$  (non nécessairement égal à  $x$ ) tel que  $f(x) = f(x')$ . Comme  $f$  est injective, on en déduit que  $x = x'$ , et donc  $x \in A$ . On a montré que  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ .

Réciproquement, supposons que pour toute partie  $A \subset E$ ,  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ . Montrons que  $f$  est injective. Soient  $(x_1, x_2) \in E^2$  tels que  $f(x_1) = f(x_2) = y$ . Choisissons  $A = \{x_1\}$ . On a ainsi  $f(A) = f(\{x_1\}) = \{y\}$  et donc  $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\})$ . Par hypothèse, on sait que  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ , ce qui implique que  $f^{-1}(\{y\}) \subset \{x_1\}$ . Or  $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$  car  $f(x_2) = y$ . On en déduit que  $x_1 = x_2$  et donc que  $f$  est injective.

4. On sait déjà que pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ . On doit donc montrer que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $B \subset f(f^{-1}(B))$ .

Supposons que  $f$  est surjective. Soit  $y \in B$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  car  $f$  est surjective. Le fait que  $x \in f^{-1}(B)$  entraîne que  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$  et donc  $B \subset f(f^{-1}(B))$ .

Réciproquement, supposons que  $B \subset f(f^{-1}(B))$  pour toute partie  $B$  de  $F$ . Appliquons ce résultat à  $B = \{y\}$ . On a alors  $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$  ce qui s'écrit aussi  $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$ . Il existe donc  $x \in f^{-1}(\{y\})$  tel que  $y = f(x)$  et donc  $f$  est surjective.

**Exercice 29** Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application. On suppose  $f \circ f \circ f = \text{id}_E$ . Montrer que  $f$  est une bijection.

**Correction** C'est évident car  $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \text{id}_E$ . Ainsi  $f$  est bijective de bijection réciproque  $f^{-1} : E \rightarrow E$  définie par  $f^{-1} = f \circ f$ .