

Feuille 4 : Nombres complexes

Exercice 1 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned}
 a) z &= 4 + 5i, & b) z &= (-2 + 2i) + (5 + 3i), & c) z &= (-3 - 7i)(1 - 2i), \\
 d) z &= (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i), & e) z &= \frac{4 - 3i}{5 + 2i}, & f) z &= \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}, \\
 g) z &= \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$ pour $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$:

$$\begin{aligned}
 a) z + 1, & & b) z^2 + 3i, & & c) \bar{z} + 2z, & & d) \bar{z} + z - i, \\
 e) z^3 + 1, & & f) iz^2 - 3\bar{z}, & & g) z - \bar{z} + iz, & & h) z^2 - i\bar{z} + 4.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$a) z = 2 + 5i, \quad b) z = -3 + 2i, \quad c) z = (3 - 2i)(9 + i), \quad d) z = \frac{2 + 5i}{5 - 2i}.$$

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

$$a) z\bar{z}, \quad b) 2z^2, \quad c) \frac{2}{\bar{z}}, \quad d) 3\frac{\bar{z}^2}{z}.$$

Exercice 5 1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a) u = -3, \quad b) v = 1 - i, \quad c) w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, \quad d) z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

2. En déduire le module et un argument de uw et $\frac{z}{v}$.

Exercice 6 Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$, $R, r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $z = Re^{i\theta}$ et $w = re^{i\varphi}$. Exprimer $Re\left(\frac{z+w}{z-w}\right)$ en fonction de R, r, θ et φ .

Exercice 7 Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Établir la relation $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 8 1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

$$a) z = 1 - i, \quad b) \bar{z}, \quad c) z + \bar{z}, \quad d) z - \bar{z}.$$

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

$$a) \vec{v} \text{ d'affixe } 2 + i, \quad b) \vec{w} \text{ d'affixe } -3 + 2i, \quad c) \vec{v} + \vec{w}, \quad d) 2\vec{v} - \vec{w}.$$

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$a) |1 - z| \leq \frac{1}{2} \quad b) Re(1 - z) \leq \frac{1}{2} \quad c) Re(iz) \leq \frac{1}{2} \quad d) \left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2 \quad e) \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$

Exercice 10 1. Donner les applications de \mathbb{C} qui représentent les transformations du plan suivantes.

- a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.
- b) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.
- c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.
- d) La symétrie centrale du centre i .

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

a) $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$. b) $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$. c) $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$. d) $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$.

Exercice 11 Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On notera $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application

$$f : D \rightarrow D$$

$$z \mapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}$$

est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 12 Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

où on pose $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z > 0\}$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{P}$, on a $|f(z)| < 1$.
(Indication : on pourra montrer que $|z - i|^2 < |z + i|^2 \iff \text{Im } z > 0$)

A partir de maintenant, on considère l'application $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{D}$ définie par $F(z) = f(z)$, où on pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

2. Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{P}$. Montrer que $F(z_1) = F(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
3. Soit $w \in \mathbb{D}$.
 - i) Déterminer $z \in \mathbb{C}$ (en fonction de w) tel que $w = F(z)$.
 - ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ donné par la question précédente. $\text{Im } z$ est-elle strictement positive ? Justifier votre réponse.
 - iii) L'application F est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

Exercice 13 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 14 Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$. Ces nombres sont appelés les n racines n -ième de z .

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de -1 .
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n - 1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$.

Exercice 15 1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.

2. On note $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j .

Exercice 16 1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z = 7 + 24i$, b) $z = 9 + 40i$, c) $z = 1 + i$.

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$, b) $z^2 = 3 - 4i$.

Exercice 17 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0,$

b) $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0,$

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0.$

d) $z^3 + 3z - 2i = 0,$

e) $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0,$

f) $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$

g) $z^5 - z = 0,$

h) $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0.$

Exercice 18 On considère l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \quad (\text{E})$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.

2. Résoudre (E) dans \mathbb{C}

Exercice 19 Soit $f : x \mapsto \frac{z^2 - 1}{z(z + 3)}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-3, 0\}$. Calculer $f(1 - i)$ et $f(1 + i)$.

Exercice 20 Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3} + i}$. Calculer z^4 .

Exercice 21 1. Calculer $\cos^2(x) \sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.

2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 22 1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 23 1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans \mathbb{C} de l'équation $z^5 = 1$.

2. Montrer que pour tout nombre complexe z , on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$.

Exercice 24 Déterminer l'ensemble des racines n -ièmes des nombres complexes suivants :

a) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ pour $n = 3,$

b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n = 4,$

c) $z = -1$ pour $n = 5.$

Exercice 25 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

Exercice 26 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\frac{1}{2}z^6 + (1 + 3i)z^3 + 8 + 8i = 0.$

Exercice 27 On considère la fonction f suivante :

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z(1 - z)$$

1. Déterminer les points fixes de f , c'est à dire résoudre $f(z) = z$.

2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Indication : on pourra remarquer que $z(1 - z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$.