Correction Feuille 4 : Nombres complexes

Exercice 1

a) $Re(z) = 4, Im(z) = 5,$ *b)* $Re(z) = 3, Im(z) = 5,$ *c)* $Re(z) = -17, Im(z) = -1,$

d) $Re(z) = 79, Im(z) = 27,$ *e)* $Re(z) = \frac{14}{29}, Im(z) = -\frac{23}{29},$ *f)* $Re(z) = \frac{19}{58}, Im(z) = -\frac{83}{58},$

g) $Re(z) = -6, Im(z) = -5.$

Exercice 2

$$\begin{aligned} z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)} &= \frac{(1+im)(2m-i(m^2-1))}{(2m)^2+(m^2-1)^2} = \frac{2m+m(m^2-1)+2im^2-i(m^2-1)}{m^4+2m^2+1} \\ &= \frac{m^3+m+i(m^2+1)}{(m^2+1)^2} = \frac{m(m^2+1)+i(m^2+1)}{(m^2+1)^2} \\ &= \frac{m+i}{m^2+1}, \end{aligned}$$

donc $Re(z) = \frac{m}{m^2+1}$ *et* $Im(z) = \frac{1}{m^2+1}$.

Exercice 3 *Pour simplifier, notons* $x = Re(z)$ *et* $y = Im(z)$.

a) $\overline{z+1} = x+1-iy,$ *b)* $\overline{z^2+3i} = x^2+y^2-i(2xy+3),$

c) $\overline{\bar{z}+2z} = 3x-2iy,$ *d)* $\overline{\bar{z}+z-i} = 2x+i,$

e) $\overline{z^3+1} = x^3-3y^2x+1+i(y^3-3x^2y),$ *f)* $\overline{iz^2-3\bar{z}} = -2xy-3x+i(y^2-x^2-3y),$

g) $\overline{z-\bar{z}+iz} = -y+i(x+2y),$ *h)* $\overline{z^2-i\bar{z}+4} = x^2-y^2-y+4+i(x-2xy).$

Exercice 4 *1.*

a) $|z| = \sqrt{29},$ *b)* $|z| = \sqrt{13},$ *c)* $|z| = \sqrt{1066},$ *d)* $|z| = 1.$

2.

a) $|z\bar{z}| = |z||\bar{z}| = |z|^2,$ *b)* $|2z^2| = 2|z|^2,$ *c)* $\left|\frac{2}{\bar{z}}\right| = \frac{2}{|z|},$ *d)* $\left|3\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = 3|z|.$

Exercice 5

1. *a)* $u = -3 = 3(-1+0i) = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{i\pi}$ *donc* $|u| = 3$, $\arg(u) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

b) $v = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $|v| = \sqrt{2}$, $\arg(v) \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Ici on a deviné. On va donner la méthode générale :

$|v| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Posons $\theta := arg(v)$. *On a*

$$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{Re(v)}{|v|} \\ \sin\theta &= \frac{Im(v)}{|v|} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\theta \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

c) $w = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}^2+1^2} = \dfrac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$ *donc* $|w| = 1$ *et* $\arg(w) \equiv \dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

d) $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ *donc* $|z| = \sqrt{2}$ *et* $\arg z \equiv -\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

2. D'une part, $|uw| = |u||w| = 3$ *et* $\arg(uw) \equiv \arg(u)+\arg(w) \equiv \pi + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{7\pi}{6} \pmod{2\pi}$, *et d'autre part,* $\left|\dfrac{z}{v}\right| = \dfrac{|z|}{|v|} = 1$ *et* $\arg\left(\dfrac{z}{v}\right) \equiv \arg(z) - \arg(v) \equiv -\dfrac{\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

Exercice 6 *Par définition,*

$$\begin{aligned}\frac{z+w}{z-w} &= \frac{(z+w)(\bar{z}-\bar{w})}{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})} = \frac{z\cdot\bar{z} - w\cdot\bar{w} + (\bar{z}\cdot w - z\cdot\bar{w})}{z\cdot\bar{z} - (z\bar{w}+\bar{z}w) + w\cdot\bar{w}} \\ &= \frac{|z|^2 - |w|^2 + (z\cdot\bar{w} - \overline{z\cdot\bar{w}})}{|z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2}.\end{aligned}$$

Comme

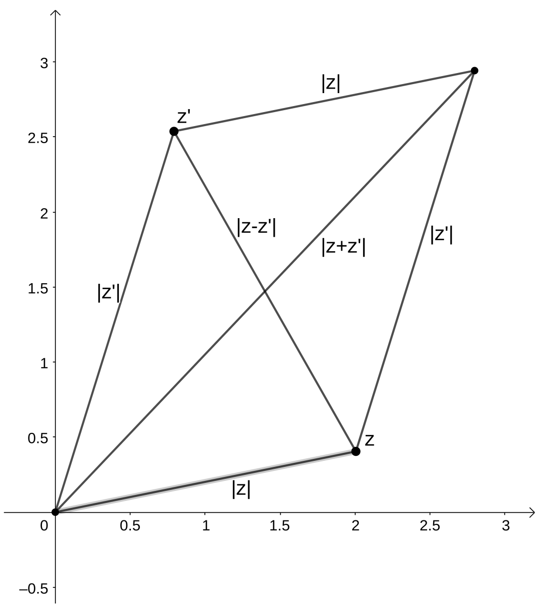
$$\begin{aligned} z\cdot\bar{w} - \overline{z\cdot\bar{w}} &= Re^{i\theta}\cdot re^{-i\varphi} - Re^{-i\theta}\cdot re^{i\varphi} = Rr(e^{i(\theta-\varphi)} - e^{-i(\theta-\varphi)}) = 2Rr\Big(\sin(\theta-\varphi)\Big)i, \\ z\cdot\bar{w} + \overline{z\cdot\bar{w}} &= Re^{i\theta}\cdot re^{-i\varphi} + Re^{-i\theta}\cdot re^{i\varphi} = Rr(e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)}) = 2Rr\cos(\theta-\varphi),\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+w}{z-w}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}.$$

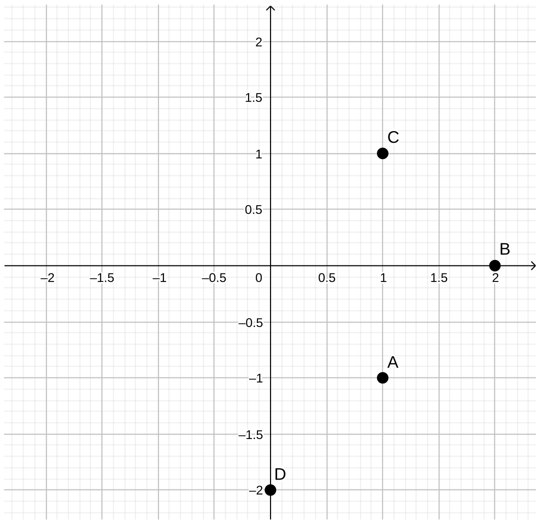
Exercice 7

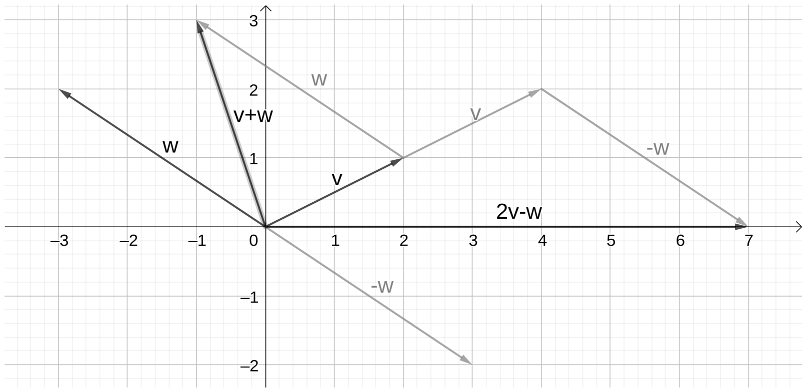
$$\begin{aligned} |z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') + (z-z')(\bar{z}-\bar{z}') \\ &= |z|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' + |z'|^2 + |z|^2 - z\bar{z}' - \bar{z}z' + |z'|^2 \\ &= 2(|z|^2 + |z'|^2).\end{aligned}$$



On appelle cette égalité l'identité du parallélogramme : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale au double de la somme des carrés des longueurs des côtés .

Exercice 8 *On note* A, B, C *et* D *les points d'affixes respectives* z, $\bar{z}$, $z+\bar{z}$ *et* $z-\bar{z}$.





Exercice 9

a) *L'ensemble des points d'affixe* $z \in \mathbb{C}$ *tels que* $|1-z| \leq \frac{1}{2}$ *est le disque de centre* Ω *d'affixe* 1 *et de rayon* $\frac{1}{2}$.

b) *Notons* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels. Alors,* $1 - z = 1 - x - iy$ *et*

$$Re(1-z) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe à droite de la droite verticale $x = \frac{1}{2}$.

c) *Notons* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels. Alors* $iz = -y + ix$. *et*

$$Re(iz) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe au-dessus de la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$.

d) *Notons* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels. Alors*

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z}\right|^2 = 2 &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2(x^2+y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + 2x + y^2 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 - 1 + y^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est le cercle de centre de coordonnées $(-1, 0)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$.

e) *Notons* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels. Alors*

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2 < 4 &\Leftrightarrow |z-3|^2 < 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 < 4((x+3)^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 + 10x + 9 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 < (x+5)^2 + y^2.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'extérieur du disque de centre de coordonnées $(-5, 0)$ *et de rayon* 4.

Exercice 10 *1.* *a)* $z \mapsto z - 2 + i$

b) *L'application vérifie* $f(z) - (1+2i) = 3(z - (1+2i))$, *ce qui se simplifie en* $f(z) = 3z - 2 - 4i$.

c) *L'application vérifie* $f(z) - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1)$, *ce qui se simplifie en* $f(z) = e^{\frac{i\pi}{6}}z + 1 - e^{\frac{i\pi}{6}}$.

d) *L'application vérifie* $f(z) - i = -(z - i)$ *soit* $f(z) = -z + 2i$.

2. *Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .*

   a) f_1 *est la translation de vecteur d'affixe* $3-2i$.

   b) f_2 *est la rotation d'angle* $\dfrac{2\pi}{7}$ *et de centre* O.

   c) *On commence par chercher le point fixe de* f_3 *:*

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}z-1=z\Leftrightarrow z(e^{i\frac{2\pi}{3}}-1)=1\Leftrightarrow z=\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}-1}=\frac{1}{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

   f_3 *est donc la rotation d'angle* $\dfrac{2\pi}{3}$ *et de centre d'affixe* $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

   d) *On commence par chercher le point fixe*

$$3z-5+i=z\Leftrightarrow z=\frac{5}{2}-\frac{i}{2}.$$

   f_4 *est donc l'homothétie de rapport* 3 *et de centre d'affixe* $\dfrac{5}{2}-\dfrac{i}{2}$.

Exercice 11

1.

$$\begin{aligned}|z+c|\leq|1+\bar{c}z|&\Leftrightarrow|z+c|^2\leq|1+\bar{c}z|^2\Leftrightarrow(z+c)(\bar{z}+\bar{c})\leq(1+\bar{c}z)(1+c\bar{z})\\&\Leftrightarrow|z|^2+\bar{c}z+c\bar{z}+|c|^2\leq1+c\bar{z}+\bar{c}z+|z|^2|c|^2\Leftrightarrow|z|^2+|c|^2\leq1+|z|^2|c|^2\\&\Leftrightarrow0\leq1-|c|^2+|z|^2|c|^2-|z|^2\Leftrightarrow1-|c|^2+(|c|^2-1)|z|^2\geq0\Leftrightarrow(1-|c|^2)(1-|z|^2)\geq0\\&\Leftrightarrow1-|z|^2\geq0\Leftrightarrow1\geq|z|^2\Leftrightarrow|z|\leq1.\end{aligned}$$

2. *Montrons tout d'abord que* f *est bien définie, c'est-à-dire que si* $z\in D$*, alors* $f(z)\in D$ *(autrement dit, que* $f(D)\subset D$*). Soit* $z\in D$*. D'après la première question,*

$$|f(z)|=\left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right|=\frac{|z+c|}{|1+\bar{c}z|}\leq1.$$

Donc f *est bien définie. Soit maintenant* $z'\in D$*. Donc* $|z'|\leq1$*. On veut montrer qu'il existe un unique* $z\in D$ *tel que* $z'=f(z)$*. Montrons d'abord qu'il existe un unique* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $z'=f(z)$*, on montrera ensuite que ce* z *est effectivement dans* D*.*

$$\begin{aligned}z'=\frac{z+c}{1+\bar{c}z}&\Leftrightarrow z'(1+\bar{c}z)=z+c\Leftrightarrow z'-c=z-z'\bar{c}z\Leftrightarrow z'-c=z(1-z'\bar{c})\\&\Leftrightarrow\frac{z'-c}{1-z'\bar{c}}=z,\text{ le dénominateur est non nul car }|z'\bar{c}|<1,\text{ en effet }|z'\bar{c}|=|z'||\bar{c}|=|z'||c|<1.\end{aligned}$$

On a donc montré qu'il existe un unique $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $z'=f(z)$*, reste à montrer que* $z\in D$*. On pose* $c'=-\bar{c}$*. On a* $|c'|<1$ *donc par la question 1.,*

$$|z|=\frac{|z'+c'|}{|1+\bar{c'}z'|}\leq1.$$

Ainsi, $z\in D$ *donc* f *est bien une bijection. Montrons que* $f(C)=C$*.*

— *Montrons que* $f(C)\subset C$ *: soit* $z\in C$*, i.e.* $|z|=1$*.*

$$\begin{aligned}|f(z)|&=\left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right|=\left|\frac{z(1+\frac{c}{z})}{1+\bar{c}z}\right|=\left|\frac{z(1+\frac{c\bar{z}}{|z|^2})}{1+\bar{c}z}\right|=\left|\frac{z(1+c\bar{z})}{1+\bar{c}z}\right|=|z|\frac{|1+c\bar{z}|}{|1+\bar{c}z|}=\frac{|1+c\bar{z}|}{|1+\bar{c}z|}=\frac{|\overline{1+c\bar{z}}|}{|1+\bar{c}z|}\\&=\frac{|1+\bar{c}z|}{|1+\bar{c}z|}=1.\end{aligned}$$

Donc $f(z)\in C$*, ce qui montre que* $f(C)\subset C$*.*

— *Montrons que $C \subset f(C)$: soit $z' \in C$, il existe alors un unique antécédent $z \in D$. Comme vu précédemment, en posant $c' = -\bar{c}$, on a alors $z = \dfrac{z'+c'}{1+\bar{c}'z'}$. Le même calcul que précédemment (avec c' au lieu de c) montre que $|z| = 1$, i.e. que $z \in C$. Ainsi, pour tout $z' \in C$, il existe $z \in C$ tel que $z' = f(z)$ donc $z' \in f(C)$. Donc $C \subset f(C)$.*

Par double inclusion, on a montré que $f(C) = C$.

Exercice 12 *1. Pour $z \in \mathcal{P}$, on a $\mathrm{Im}(z) > 0$ par définition. Alors,*

$$|z+i|^2-|z-i|^2 = (z\cdot\bar{z})+i(\bar{z}-z)-1)-(z\cdot\bar{z}-i(\bar{z}-z)-1) = 2i(\bar{z}-z) = 2i(-2i\mathrm{Im}\,(z)) = 4\mathrm{Im}(z) > 0,$$

i.e., $|z+i|^2 > |z-i|^2 \;\Leftrightarrow\; |f(z)| < 1$.

2. Par hypothèse, on a $\dfrac{z_1-i}{z_1+i} = \dfrac{z_2-i}{z_2+i}$ qui est équivalent à

$$(z_1-i)(z_2+i)-(z_1+i)(z_2-i) = (z_1z_2+iz_1-iz_2+1)-(z_1z_2-iz_1+iz_2+1) = 2i(z_1-z_2) = 0,$$

d'où $z_1 = z_2$.

i)

$$w = F(z) \;\Leftrightarrow\; w = \frac{z-i}{z+i} \;\Leftrightarrow\; w(z+i) = z-i \;\Leftrightarrow\; z(1-w) = i(1+w) \;\Leftrightarrow\; z = i\cdot\frac{1-w}{1+w}.$$

ii) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(z) =&\mathrm{Re}\left(\frac{1-w}{1+w}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1-w)(1+\bar{w})}{|1+w|^2}\right)\\ =&\mathrm{Re}\left(\frac{1-|w|^2-(w-\bar{w})}{|1+w|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-|w|^2}{|1+w|^2}\right) > 0 \qquad (\,w-\bar{w} \in i\mathbb{R}\,)\end{aligned}$$

car $w \in \mathbb{D}$, d'où $\mathrm{Im}\,(z)$ est strictement positive.

iii) D'après 2, l'application F est injective et d'après la question précédente, elle est surjective, donc l'application F est bijective.

Exercice 13 *Egalités à connaître :*

$$e^{ix} = \cos(x)+i\sin(x) \qquad e^{-ix} = \cos(x)-i\sin(x)$$

$$e^{ix}+e^{-ix} = 2\cos(x) \qquad e^{ix}-e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

1. On a

$$\begin{aligned}\cos(3x)+i\sin(3x) &= e^{i(3x)} = e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x)+i\sin(x))^3\\ &= \cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)+i(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :
$\cos(3x) = \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)$ *et* $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)$.
On réécrit cela en

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x)-3\cos(x),\\ \sin(3x) &= 3(1-\sin^2(x))\sin(x)-\sin^3(x) = 3\sin(x)-4\sin^3(x).\end{aligned}$$

2.

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^4}{16}$$

On utilise la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)^4 = (a+(-b))^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k (-b)^{4-k} \\
&= \binom{4}{0}(-b)^4 + \binom{4}{1} a(-b)^3 + \binom{4}{2} a^2(-b)^2 + \binom{4}{3} a^3(-b) + \binom{4}{4} a^4 \\
&= b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4a^3b + a^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^4}{16} &= \frac{e^{-4ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + e^{4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{-4ix} - 4e^{-2ix} + 6 - 4e^{2ix} + e^{4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix}+e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6}{16} \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin^4(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{-4ix} - 4e^{-2ix} + 6 - 4e^{2ix} + e^{4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{-3ix} + e^{-5ix} - 4e^{-ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{3ix} - 4e^{ix} + e^{5ix} + e^{3ix}}{32} \\
&= \frac{e^{5ix} + e^{-5ix} - 3e^{3ix} - 3e^{-3ix} + 2e^{ix} + 2e^{-ix}}{32} \\
&= \frac{e^{5ix} + e^{-5ix} - 3(e^{3ix}+e^{-3ix}) + 2(e^{ix}+e^{-ix})}{32} \\
&= \frac{2\cos(5x) - 6\cos(3x) + 4\cos(x)}{32} = \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{3}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x).
\end{aligned}$$

Exercice 14 *1. On doit résoudre* $z^6 = 1$.

Posons $\rho := |z|$ *et* $\theta := arg(z)$. *Donc* $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z^6 = \left(\rho e^{i\theta}\right)^6 = \rho^6 e^{6i\theta}$.

$z^6 = 1 \iff \rho^6 e^{6i\theta} = e^{0i} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \rho^6 & = 1 \\ 6\theta & = 0 + 2k\pi = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \rho & = 1 \\ \theta & = \frac{2k\pi}{6} = \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$.

Les racines 6-ièmes de 1 sont les $e^{ki\frac{\pi}{3}}$ *pour* $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

$z_0 = e^0 = 1$.

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

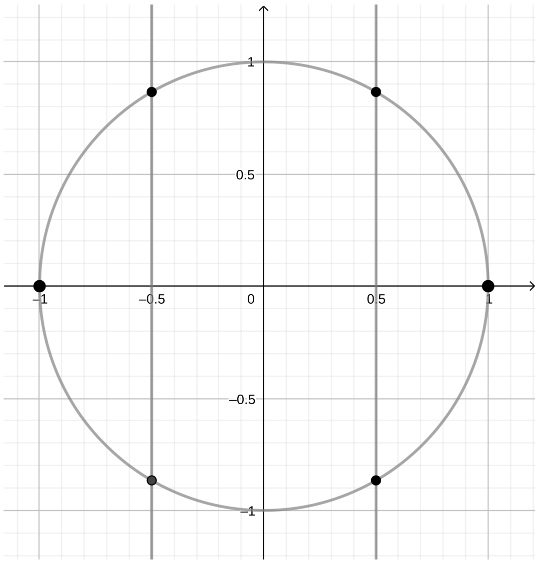
$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_3 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

$z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{6\pi-\pi}{3}} = e^{i(2\pi-\frac{\pi}{3})} = e^{i(-\frac{\pi}{3})} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

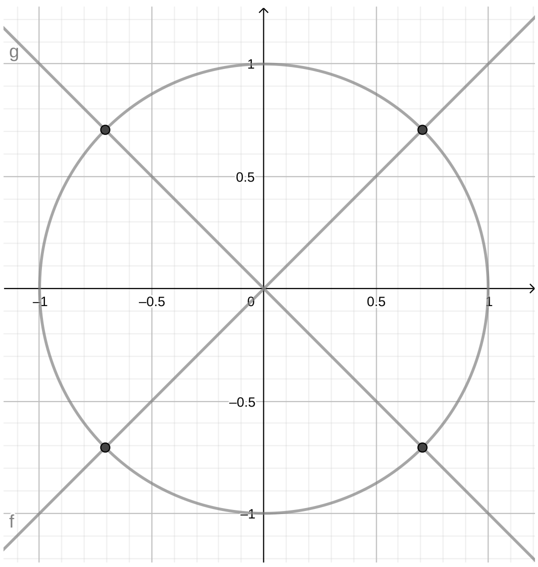
On place 1 *et* -1, *et on place les quatre autres sur le cercle unité (vu que leur module est* 1*) ayant pour absisse* $\frac{1}{2}$ *ou* $-\frac{1}{2}$.



Pour trouver les racines 4-ièmes de -1*, on va résoudre* $z^4 = -1$.
Posons $\rho := |z|$ *et* $\theta := arg(z)$*. Donc* $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z^4 = \left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = \rho^4 e^{4i\theta}$.

$$z^4 = -1 \iff \rho^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi} \iff \begin{cases} \rho^4 & = 1 \\ 4\theta & = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} = \dfrac{(1+2k)\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Les 4 racines sont les $e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}$ *pour* $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ *:*
$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ce sont les points d'intersection du cercle unité avec les diagonales du plan.



2. $z = 1$ *n'est pas racine du polynôme complexe* $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$*. Pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$*, on a*

$$1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Les racines du polynôme complexe sont donc les racines n-ièmes de l'unité privées de 1.
On doit résoudre $z^n = 1$.
Posons $\rho := |z|$ *et* $\theta := arg(z)$*. Donc* $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{ni\theta}$.

$z^n = 1 \Longleftrightarrow \rho^n e^{ni\theta} = e^{0i} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^n & = 1 \\ n\theta & = 0 + 2k\pi = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{2k\pi}{n} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$.

Les racines n-ièmes de l'unité sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *pour* $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

Notons que $z_n = e^{\frac{2in\pi}{n}} = e^{2i\pi} = 1$.

Donc les racines de $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$ *sont les* $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *pour* $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Exercice 15 *1. Pour trouver les racines cubiques de* 1*, on doit résoudre* $z^3 = 1$*. Il y a 2 façons de faire.*

Méthode 1 : $z^3 = 1 \Longleftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Longleftrightarrow z = 1$ *ou* $z^2 + z + 1 = 0$.

Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.

Une racine carrée de Δ *est* $\delta := i\sqrt{3}$.

$z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

$z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Les racines cubiques de 1 *sont donc :* $1, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ *et* $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

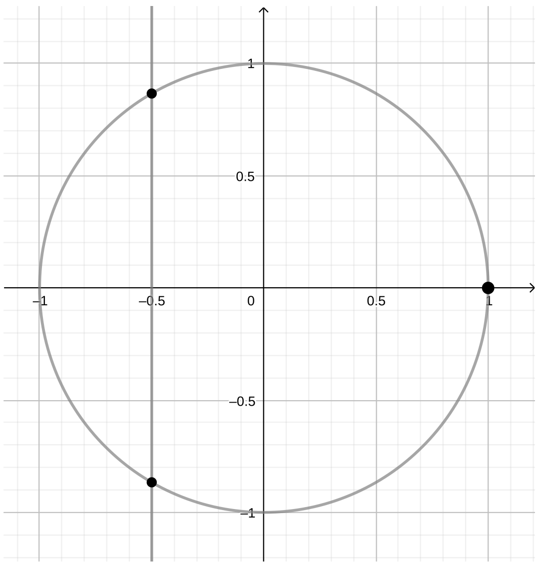
Méthode 2 : On va utiliser l'écriture polaire c'est à dire trigonométrique.

La forme polaire de z *est* $z = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$*, on doit déterminer* ρ *et* θ.

$z^3 = 1 \Longleftrightarrow (\rho e^{i\theta})^3 = 1 \Longleftrightarrow \rho^3 e^{3i\theta} = e^{0i} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^3 & = 1 \\ 3\theta & = 0 + 2k\pi = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Ainsi $z^3 = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho & = 1 \\ \theta & = \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ *On sait qu'on va avoir* 3 *solutions car l'équation est de degré* 3*. Donc les racines cubiques de* 1 *sont les* $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ *pour* $k \in \{0, 1, 2\}$*, autrement dit :*

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



2. On note que $j = \omega_1$ *est une des racines* 3*-ièmes de* 1*. Deux méthodes :*

— *Comme* $j \neq 1$*, on a* $1 + j + j^2 = \dfrac{1-j^3}{1-j} = 0$ *car* $j^3 = 1$.

— *On calcule* $j^2 = z_1^2 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = z_2$*, donc* $1 + j + j^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

3. Comme vu dans la deuxième méthode de la question précédente, $z_1 = j$ *et* $z_2 = j^2$ *(et* $1 = j^0$*).*

Exercice 16 *1. On utilise la même méthode pour les trois questions :*

a) Soient a et b deux réels tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 7 + 24i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$a^2 - b^2 = 7 \tag{L_1}$$
$$2ab = 24. \tag{L_2'}$$
$$ab = 12. \tag{L_2}$$
$$\tag{1}$$

En identifiant les modules dans $(a+ib)^2 = 7+24i$, on a $|(a+ib)^2| = |7+24i|$. On obtient $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{7^2+24^2}$, soit

$$a^2 + b^2 = \sqrt{625} = 25. \tag{L_3}$$

En calculant $(L_1)+(L_3)$, on obtient $2a^2 = 32$, d'où $a = \pm 4$. En calculant $(L_3)-(L_1)$, on obtient $2b^2 = 18$, d'où $b = \pm 3$. De plus, (L_2) montre que a et b sont de même signe. On obtient donc que les deux racines de z sont $4+3i$ et $-4-3i$.

b) Soient a et b deux réels tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 9 + 40i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$a^2 - b^2 = 9 \tag{L_1}$$
$$2ab = 40. \tag{L_2'}$$
$$ab = 20. \tag{L_2}$$

En identifiant les modules dans $(a+ib)^2 = 9+40i$, on obtient $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{9^2+40^2}$, soit

$$a^2 + b^2 = \sqrt{1681} = 41. \tag{L_3}$$

En résumé on a le système suivant :
$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 9 \quad (L_1) \\ ab & = 20 \quad (L_2) \\ a^2 + b^2 & = 41 \quad (L_3) \end{cases}$$
En calculant $(L_1)+(L_3)$, on obtient $2a^2 = 50$, d'où $a = \pm 5$. Si $a = 5$ alors d'après (L_2), $b = 4$. Donc $5+4i$ est une racine carrée de $9+40i$, par suite l'autre racine carrée est son opposée c'est à dire $-5-4i$.
En conclusion, les deux racines carrées de $z = 9+40i$ sont $5+4i$ et $-5-4i$.

c) Soient a et b deux réels tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1+i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$a^2 - b^2 = 1 \tag{L_1}$$
$$2ab = 1. \tag{L_2}$$

En identifiant les modules dans $(a+ib)^2 = 1+i$, on obtient $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{1^2+1^2}$, soit

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}. \tag{L_3}$$

En calculant $(L_1)+(L_3)$, on obtient $2a^2 = 1+\sqrt{2}$, d'où $a = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. En calculant $(L_3)-(L_1)$, on obtient $2b^2 = \sqrt{2}-1$, d'où $b = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. De plus, (L_2) montre que a et b sont de même signe. On obtient donc que les deux racines de z sont

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

2. Pour ces deux questions, on pourrait utiliser la même méthode que précédemment, mais il y aura mieux sous réserve qu'à la fin on tombe sur un angle connu pour pouvoir donner son sinus et son cosinus :

a) Cette méthode est valable si on sait exprimer sous forme trigonométrique le complexe dont on cherche le carré. Dans ce cas, étant donné z^2*, on a* $|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{|z^2|}$ *et* $\arg(z^2) \equiv 2\arg(z) \pmod{2\pi}$ *donc* $\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Par suite $2\arg(z) = \arg(z^2) - 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$*, d'où* $\arg(z) = \dfrac{\arg(z^2)}{2} - k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$*. On peut écrire* $\arg(z) \equiv \dfrac{\arg(z^2)}{2} \pmod{\pi}$*. Ici, on a*

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4e^{\frac{5i\pi}{6}},$$

donc $z = \pm 2e^{\frac{5i\pi}{12}} = \pm 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$*. On ne peut pas aller plus loin, finalement il valait mieux utiliser la méthode précédente.*

b) Ici l'astuce est de faire apparaitre une identité remarquable

$$z^2 = 3 - 4i = 4 - 2\times 2i - 1 = 2^2 - 2\times 2i + i^2 = (2-i)^2.$$

Donc $z = \pm(2-i)$*. Les solutions sont* $2-i$ *et* $-2+i$.

Exercice 17 *a) On a*

$$\Delta = (1-5i)^2 - 4i(-2+6i) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i = -2i.$$

On obtient ses racines carrées en écrivant $-2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$*. Donc une racine carrée de* Δ *est* $\delta = 1 - i$.

Les racines de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-(1-5i)-\delta}{2i} = \frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = -\frac{1}{i} + 3 = 3 + i,$$
$$z_2 = \frac{-(1-5i)+\delta}{2i} = \frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2.$$

b) On a

$$\Delta = (-(9+3i))^2 - 4(1+2i)(10-5i) = 81 + 54i - 9 - 40 + 20i - 80i - 40 = -8 - 6i.$$

On cherche $\delta^2 = \Delta$ *de la forme* $\delta = a + ib$ *(a et b réels), c'est-à-dire* $-8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab$*. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient* $a^2 - b^2 = -8$ *et* $2ab = -6$*. De plus* $|\Delta| = |\delta|^2$*, donc* $a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$*. On a alors* $2a^2 = (a^2+b^2) + (a^2-b^2) = -8 + 10 = 2$ *donc* $a = \pm 1$*. Alors* $b^2 = 10 - a^2 = 9$ *donc* $b = \pm 3$*. Comme* $2ab = -6 < 0$*, a et b sont de signes opposés, donc* $\delta = \pm(1-3i)$*. On va choisir* $\delta = 1 - 3i$.

On en déduit

$$z_1 = \frac{(9+3i)-(1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4-8i+3i+6}{5} = 2 - i,$$
$$z_2 = \frac{(9+3i)+(1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{1^2+5^2} = 1 - 2i.$$

c) Posons $Z = z^2$*, l'équation devient* $Z^2 + 10Z + 169 = 0$*. Alors,*

$$\Delta = 10^2 - 4\times 169 = 10^2 - (2\times 13)^2 = (10-26)(10+26) = -16\times 36 = -4^2\times 6^2 = (24i)^2.$$

On en déduit les deux solutions

$$Z_1 = \frac{-10+24i}{2} = -5 + 12i,$$
$$Z_2 = \frac{-10-24i}{2} = -5 - 12i.$$

On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = Z_1$ ce qui donne

$$a^2 - b^2 = -5$$
$$2ab = 12$$
$$a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Alors $2a^2 = a^2 + b^2 + a^2 - b^2 = 13 - 5 = 8$ donc $a = \pm 2$, et $b^2 = 13 - a^2 = 9$ donc $b = \pm 3$. Comme $ab > 0$, a et b sont de même signes donc on obtient deux solutions : $z_{1,1} = 2 + 3i$ et $z_{1,2} = -2 - 3i$. On peut résoudre de la même manière $z^2 = Z_2$ et on trouverai $z_{2,1} = 2 - 3i$ et $z_{2,2} = -2 + 3i$. Au lieu de ça, on peut aussi remarquer que $z^4 + 10z^2 + 169$ est une équation à coefficients réels et donc que si z est solution, $\bar{z}$ l'est aussi. Par conséquent, les deux solutions manquantes (sur les quatre totales) sont bien $z_{2,1} = \overline{z_{1,1}} = 2 - 3i$ et $z_{2,2} = \overline{z_{1,2}} = -2 + 3i$.

d) *On commence par chercher une solution simple, i en est une car $i^3 + 3i - 2i = 0$. On peut donc factoriser $z - i$ dans le polynôme $z^3 + 3z - 2i$: on cherche a, b et c complexes tels que*

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-iz + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i \\ c = 2 \end{cases}$$

Ainsi $z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$. Le discriminant de $z^2 + iz + 2$ est $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$. On choisit $\delta = 3i$. Il y a donc deux racines $z_1 = \dfrac{-i - 3i}{2} = -2i$ et $z_2 = \dfrac{-i + 3i}{2} = i$. Ainsi, l'équation $z^3 + 3z - 2i = 0$ a deux solutions i et $-2i$.

e) *Posons $Z = z^3$, l'équation devient $Z^2 - (3 + 2i)Z + 2 + 2i = 0$. On a*

$$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(2 + 2i) = 9 + 12i - 4 - 8 - 8i = -3 + 4i = -4 + 2 \times 2i + 1 = (2i + 1)^2.$$

Il y a deux solutions

$$Z_1 = \frac{3 + 2i - (2i + 1)}{2} = 1,$$
$$Z_2 = \frac{3 + 2i + (2i + 1)}{2} = 2 + 2i.$$

Il reste à résoudre $z^3 = 1$ et $z^3 = 2 + 2i$. Les solutions de $z^3 = 1$ sont les racines troisièmes de l'unité (Voir exercice 5-14), à savoir

$$1, e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour résoudre $z^3 = 2 + 2i$, commençons par mettre $2 + 2i$ sous forme trigonométrique.

$$|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Posons $\theta := arg(2 + 2i)$.

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{Re(2 + 2i)}{|2 + 2i|} = \dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{Im(2 + 2i)}{|2 + 2i|} = \dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ convient. Par suite $2 + 2i = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Posons $\rho := |z|$ et $\alpha := arg(z)$.
On a $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z^3 = \rho^3 e^{3i\alpha}$.

$$z^3 = 2 + 2i \iff \rho^3 e^{3i\alpha} = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} \rho^3 &= 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\alpha &= \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho &= 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \alpha &= \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les racines troisièmes de $2 + 2i$ sont donc

$$z_0 = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{12}}, z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{9i\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i \text{ et } z_2 = \sqrt{2} e^{\frac{17i\pi}{12}}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions cherchées est :

$$\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1+i, \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}.$$

f)

$$\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}^7| = \left|\dfrac{1}{z^2}\right| \\ \arg(\bar{z}^7) = \arg\left(\dfrac{1}{z^2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'une part,

$$|\bar{z}^7| = \left|\frac{1}{z^2}\right| \Leftrightarrow |\bar{z}|^7 = \frac{1}{|z^2|} \Leftrightarrow |z|^7 = \frac{1}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^9 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

D'autre part,

$$\arg(\bar{z}^7) = \arg\left(\frac{1}{z^2}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow 7\arg(\bar{z}) = -2\arg(z) + 2k\pi \Leftrightarrow -7\arg(z) = -2\arg(z) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -5\arg(z) = 2k\pi \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{2k\pi}{5} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Les solutions sont donc les $e^{-\frac{2ik\pi}{5}}$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$*. Il y a donc 5 solutions :*
$z_0 = 1$, $z_1 = e^{-\frac{2i\pi}{5}}$, $z_2 = e^{-\frac{4i\pi}{5}}$, $z_3 = e^{-\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $z_4 = e^{-\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

g) $z^5 - z = z(z^4-1) = z(z^2-1)(z^2+1) = z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$.
Les solutions sont donc 0, 1, -1, i *et* $-i$.

h)

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27.$$

Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$*, l'équation devient* $Z^6 = -27$.

$$Z^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |Z^6| = |-27| \\ \arg(Z^6) = \arg(-27) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(Z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(Z) = \dfrac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}.$$

Il y a donc 6 solutions $Z_k = \sqrt{3}e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$ *pour* $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$*. Fixons* k *pour résoudre* $Z_k = \dfrac{z_k+1}{z_k-1}$.

$$Z_k = \frac{z_k+1}{z_k-1} \Leftrightarrow Z_k(z_k-1) = z_k+1 \Leftrightarrow Z_kz_k - Z_k = z_k+1 \Leftrightarrow Z_kz_k - z_k = Z_k+1 \Leftrightarrow (Z_k-1)z_k = Z_k+1$$

$z_k = \dfrac{Z_k+1}{Z_k-1}$.
Si on veut les solutions sous forme algébrique, on écrit

$$z_k = \frac{Z_k+1}{Z_k-1} = \frac{(Z_k+1)(\overline{Z_k}-1)}{(Z_k-1)(\overline{Z_k}-1)} = \frac{|Z_k|^2 - Z_k + \overline{Z_k} - 1}{|Z_k|^2 - Z_k - \overline{Z_k} + 1} = \frac{3 - (Z_k - \overline{Z_k}) - 1}{3 - (Z_k + \overline{Z_k}) + 1} = \frac{2 - 2iIm(Z_k)}{4 - 2Re(Z_k)}$$

$$= \frac{1 - iIm(Z_k)}{2 - Re(Z_k)} = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)},$$

et ce pour $k=0$, $k=1$, *... jusqu'à* $k=5$.
$z_0 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{4-3} = 2 - i\sqrt{3}$.
$z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

$$z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2 - i\sqrt{3}}{4+3} = \frac{2 - i\sqrt{3}}{7}.$$
$$z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{4+3} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{7}.$$
$$z_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$
$$z_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{2 + i\sqrt{3}}{4-3} = 2 + i\sqrt{3}.$$

Exercice 18 *1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a*

$$x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

Les solutions de $-x^2 + 1 = 0$ sont 1 et -1, et ce sont aussi des solutions de $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3$. Ce sont donc deux solutions réelles de (E) (plus précisément, ce sont les seules).

2. D'après la question 1., on peut mettre $(z-1)(z+1) = z^2 - 1$ en facteur : il existe a, b et c complexes tels que

$$x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = (z^2 - 1)(az^2 + bz + 1).$$

En développant le membre de droite et en identifiant les coefficients des polynômes, on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}.$$

On a donc $x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = (z^2 - 1)(z^2 - 3z + 3 - i)$. Il reste à trouver les solutions de $z^2 - 3z + 3 - i = 0$. On a $\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$, les deux solutions sont donc

$$z_1 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2} = 1 - i,$$
$$z_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $S = \{1, -1, 1 - i, 2 + i\}$.

Exercice 19

$$f(1-i) = \frac{(1-i)^2 - 1}{(1-i)(1-i+3)} = \frac{1 - 1 - 2i - 1}{4 - i - 4i - 1} = -\frac{1 + 2i}{3 - 5i} = -\frac{(1+2i)(3+5i)}{3^2 + 5^2} = -\frac{3 + 5i + 6i - 10}{34}$$
$$= \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i.$$

On note de plus que pour $z \in \mathbb{C}$,

$$f(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^2 - 1}{\bar{z}(\bar{z} + 3)} = \frac{\overline{z^2 - 1}}{\overline{z(z+3)}} = \overline{f(z)}.$$

En particulier, $f(1+i) = f(\overline{1-i}) = \overline{f(1-i)} = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$.

Exercice 20 *Il est possible de développer z^4 puis de l'exprimer sous forme arithmétique. Mais il est plus simple de passer par la forme trigonométrique :*

$$z = \frac{3(\sqrt{3} - i)}{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}.$$

Ainsi, $z^4 = \frac{3^4}{2^4}e^{-\frac{4i\pi}{6}} = \frac{81}{16}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \frac{81}{16}e^{\frac{i\pi}{3}} = -\frac{81}{32} + i\frac{81\sqrt{3}}{32}$.

Exercice 21

1. $\cos^2(x)\sin^3(x) = (1-\sin^2(x))\sin^3(x) = \sin^3(x) - \sin^5(x)$.

2.

$$\begin{aligned}\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 &= \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}\\ &= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6}{16} = \frac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{16} = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Exercice 22

1. Les racines quatrièmes de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.

2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ *donc une racine quatrième de ce complexe est* $e^{\frac{i\pi}{3}}$*. Les autres s'obtiennent en le multipliant par les racines quatrièmes de l'unité, soit*

$$\begin{cases} e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ ie^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}+\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ -e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}+i\pi} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -ie^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}-\frac{i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

3. Posons $Z = z^4$*, l'équation devient* $Z^2 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})Z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$*. Une première solution est de résoudre l'équation comme dans l'exercice 5-16. On trouverai* $\Delta = 3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ *qui a pour racines* $\pm\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \pm\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$*, ce qui donne les solutions* $Z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $Z_2 = 1$*. On présente ici une autre solution :*

$$Z^2 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})Z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z^2 + jZ + j^2 = j^2\left(\left(\frac{Z}{j}\right)^2 + \frac{Z}{j} + 1\right).$$

On pose $T = \frac{Z}{j}$*, l'équation devient* $T^2 + T + 1 = 0$*, dont les solutions sont* $T_1 = j$ *et* $T_2 = j^2$*. On en déduit les solutions* $Z_1 = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $Z_2 = j^3 = 1$*. Ainsi, par questions 1 et 2, l'équation* $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ *a pour solutions*

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right\}$$

Exercice 23 *1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité autres que 1, c'est-à-dire* $z_k = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ *pour* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$*, on a* $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}$*. Comme* 1 *n'est pas racine de* $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$*, les autres racines de ce polynôme sont les* z_k *pour* $k \in \{1, 2, 3, 4\}$*. Ce polynôme peut donc se factoriser en* $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$.

Exercice 24 *Pour chacun des trois cas, on trouve une racine n-ième (comme les nombres sont de module* 1*, il suffit de diviser un argument par n), et on trouve les autres racines n-ièmes de z en multipliant par les racines n-ièmes de l'unité.*

a) $\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{11i\pi}{12}}, e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{19i\pi}{12}} (= e^{\frac{-5i\pi}{12}})\}$ *b)* $\{e^{\frac{i\pi}{20}}, e^{\frac{i\pi}{20}+\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{11i\pi}{20}}, e^{\frac{i\pi}{20}+i\pi} = e^{\frac{21i\pi}{20}}, e^{\frac{31i\pi}{20}}\}$

c) $-1 = e^{i\pi}$ *donc* $\{e^{\frac{i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{3i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{4i\pi}{5}} = -1, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{7i\pi}{5}}, e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{9i\pi}{5}} (= e^{\frac{-i\pi}{5}})\}$.

Exercice 25 *une solution réelle x de l'équation. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a*

$$x^3+(1-3i)x^2-(6-i)x+10i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2-6x=0 \\ -3x^2+x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+x-6)=0 \\ -3x^2+x+10=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\{0,2,-3\} \\ -3x^2+x+10=0 \end{cases}$$

Seul $x=2$ est solution de $-3x^2+x+10$, donc la seule solution réelle est 2. 2 étant racine, on peut factoriser le polynôme : il existe a, b et c complexes tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^3+(1-3i)z^2-(6-i)z+10i=(z-2)(az^2+bz+c).$$

On développe et on identifie les coefficients des polynômes, ce qui donne

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=1-3i \\ -2b+c=-6+i \\ -2c=10i \end{cases}, \ i.e.\ \begin{cases} a=1 \\ b=3-3i \\ c=-5i \end{cases}.$$

Il reste à trouver les solutions de $z^2+(3-3i)z-5i=0$. On a $\Delta=(3-3i)^2+20i=9-9-18i+20i=2i=(1+i)^2$. Ce trinôme a donc deux racines :

$$z_1=\frac{3-3i-(1+i)}{2}=1-2i,$$
$$z_2=\frac{3-3i+1+i}{2}=2-i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc $S=\{2,1-2i,2-i\}$.

Exercice 26 *Posons $Z=z^3$, l'équation devient $\frac{1}{2}Z^2+(1+3i)Z+8+8i=0$. On a $\Delta=(1+3i)^2-4\frac{1}{2}(8+8i)=1-9+6i-16-16i=-24-10i$. On cherche a et b réels tels que $(a+ib)^2=\Delta$:*

$$(a+ib)^2=-24-10i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-24-10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-24 \\ ab=-5 \end{cases}.$$

On ajoute l'égalité des modules $a^2+b^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26$. Ainsi,

$$2a^2=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)=2 \text{ donc } a=\pm1, b^2=(a^2+b^2)-a^2=25 \text{ donc } b=\pm5.$$

Comme $ab<0$, a et b sont de signes différents, donc les deux racines deuxièmes de Δ sont $1-5i$ et $-1+5i$. On en déduit les solutions pour l'équation en Z :

$$Z_1=\frac{-(1+3i)-1+5i}{2\times\frac{1}{2}}=-2+2i,$$
$$Z_2=\frac{-(1+3i)+1-5i}{2\times\frac{1}{2}}=-8i.$$

On cherche donc les racines troisièmes de Z_1 et de Z_2. On utilise ici une méthode mais d'autres sont présentées dans l'exercice 16. ici, on va chercher une racine troisième puis obtenir les autres en la multipliant par les racines troisièmes de l'unité que sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

— $Z_1=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. *Ainsi, une racine troisième de Z_1 est $2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=1+i$. Les racines troisièmes de Z_1 sont donc*

$$z_{1,1}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},$$
$$z_{1,2}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2i\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}},$$
$$z_{1,3}=e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{4i\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}.$$

— *$Z_2 = 8e^{\frac{3i\pi}{2}} = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}}$. Ainsi, une racine troisième de Z_1 est $2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$. Les racines troisièmes de Z_2 sont donc*

$$\begin{aligned} z_{2,1} &= 2i, \\ z_{2,2} &= e^{\frac{2i\pi}{3}} \times 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}+\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}}, \\ z_{2,3} &= e^{\frac{4i\pi}{3}} \times 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}+\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $S = \{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}, 2i, 2e^{\frac{7i\pi}{6}}, 2e^{\frac{11i\pi}{6}}\}$.

Exercice 27 *1. Pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z - z^2 = z \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.*

2. Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \leq \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4} \\ \leq \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.