

Feuille 5 : Arithmétique

Exercice 1 *Vrai ou Faux. Etant donnés cinq nombres entiers consécutifs, on trouve toujours parmi eux :*

1. *Au moins deux multiples de 2 dont un multiple de 4.*
2. *Exactement un multiple de 5.*
3. *Au moins un multiple de 6.*

Exercice 2 *Soient a, b et d trois entiers. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

1. *Si d divise a et b , alors d divise leur PGCD.*
2. *S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$, alors d divise PGCD(a, b).*
3. *Si PGCD(a, b) divise d , alors il existe un couple d'entiers (u, v) , tel que $au + bv = d$*

Exercice 3 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.*

Exercice 4 *Calculer le pgcd de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.*

Exercice 5 *Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 18480 et 9828. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.*

Exercice 6

1. *Déterminer les couples d'entiers naturels premiers entre eux dont le produit est 6.*
2. *Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 35 et ppcm 210.*
3. *Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et produit 6480.*
4. *Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et somme 360.*

Exercice 7 *Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a+b$ et ab .*

Exercice 8 *Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :*

1. $(2^a - 1) \mid (2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow p$ premier ;

Exercice 9 *Pour m entier naturel, à quoi peut être égal le reste de la division euclidienne de m par 4 ? En déduire que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.*

Exercice 10 *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.*

Exercice 11 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 12 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000} .

Exercice 13 Trouver **une** solution dans \mathbb{Z} de l'équation : $5x \equiv 1 [11]$ puis **toutes** les solutions dans \mathbb{Z} de l'équation : $5x \equiv 0 [11]$. En déduire **toutes** les solutions dans \mathbb{Z} de l'équation : $5x \equiv 1 [11]$.

Exercice 14 Trouver **une** solution dans \mathbb{Z}^2 de l'équation : $58x + 21y = 1$ puis **toutes** les solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation : $58x + 21y = 0$. En déduire **toutes** les solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation : $58x + 21y = 1$.

Exercice 15 Résoudre dans \mathbb{Z}^2 :

$$(a) 1665x + 1035y = 45 \quad (b) 14x + 35y = 21 \quad (c) 637x + 595y = 29.$$

Exercice 16 On considère dans \mathbb{Z} les systèmes suivants :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13 & (\text{mod } 19) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 12) \end{cases} \quad (S_0) \begin{cases} n \equiv 0 & (\text{mod } 19) \\ n \equiv 0 & (\text{mod } 12) \end{cases}$$

Trouver **une** solution du système (S) puis **toutes** les solutions du système (S_0) . En déduire **toutes** les solutions du système (S) .

Exercice 17 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
Soit $a = 4p_1 p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 18 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que n est de la forme $n = 2^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Que penser de la conjecture : $2^{2^n} + 1$ est premier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 19 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 20 Donner la valeur en base dix des nombres suivants :

1. $(110101001)_2$;
2. $(110101001)_3$;
3. $(1367)_8$;
4. $(1402)_5$.

Exercice 21 Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.

1. 255 en base deux ;
2. 1907 en base seize ;
3. 2016 en base sept ;
4. 2000 en base deux mille.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ si n est impair.
2. Montrer que $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$ si n est pair.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs.
 - i) Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $(a + b + c)^2$. En déduire le reste modulo 8 de $2(ab + bc + ca)$.
 - ii) Existe-il un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = ab + bc + ca$?

Exercice 23 L'objectif de l'exercice est de déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation (E) $2^m - 3^n = 1$.

1. Soit m un entier supérieur ou égal à 3 et n un entier naturel. En utilisant des congruences modulo 8, montrer que (m, n) n'est pas solution de l'équation (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 24 1. Déterminer une relation de Bézout entre 7 et 17.

2. Soit a et b deux entiers. On considère dans \mathbb{Z} les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} (S) \begin{cases} n \equiv a & \pmod{17} \\ n \equiv b & \pmod{7} \end{cases} & (S_0) \begin{cases} n \equiv 0 & \pmod{17} \\ n \equiv 0 & \pmod{7} \end{cases} \\ (S_1) \begin{cases} n \equiv 1 & \pmod{17} \\ n \equiv 0 & \pmod{7} \end{cases} & (S_2) \begin{cases} n \equiv 0 & \pmod{17} \\ n \equiv 1 & \pmod{7} \end{cases} \end{array}$$

En utilisant la première question, trouver **une** solution du système (S_1) et **une** solution du système (S_2) . En déduire **une** solution du système (S) . Déterminer par ailleurs **toutes** les solutions du système (S_0) . En déduire **toutes** les solutions du système (S) .

Exercice 25 Soit n un entier naturel non nul. En utilisant une identité à la Bézout, montrer que $2n + 1$ et $9n + 4$ sont premiers entre eux. Recommencer avec $3n - 2$ et $5n - 3$.

Exercice 26 1. Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier 36 ?

2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que le nombre de diviseurs positifs de n^2 est impair.
3. Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier $15!$?

Exercice 27 En France, le numéro d'inscription au répertoire des personnes physiques (le « numéro de sécurité sociale ») est un nombre a qui comporte 13 chiffres en base 10.

La clé associée à un tel nombre a est le reste de la division euclidienne de $-a$ par 97.

1. Montrer que si deux numéros a et b diffèrent sur un chiffre et un seul, ils ont des clés différentes - ce qui permet la détection d'une erreur de transcription simple.

2. Montrer qu'il en est de même pour deux numéros a et b qui diffèrent par transposition de deux chiffres consécutifs.

Exercice 28 Soit p un nombre premier impair. On notera $A = \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.

1. Soit x et y deux éléments distincts de A .

i) Montrer que $2 < x + y < p - 1$ et en déduire que p ne divise pas $x + y$.

ii) Montrer que p ne divise pas $x - y$.

iii) Montrer que $x^2 \not\equiv y^2$ modulo p .

iv) Conclure que les restes des divisions euclidiennes des carrés éléments de A par p sont tous distincts.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(p-k)^2 \equiv k^2$ modulo p . En déduire que les restes des divisions euclidiennes des carrés des éléments de $\{\frac{p+1}{2}, \dots, p-2, p-1\}$ par p sont les mêmes que les restes des divisions euclidiennes des carrés des éléments de A par p .

3. Combien de valeurs peut prendre le reste de la division euclidienne d'un carré par p ? Dans l'exemple de $p = 7$, en donner la liste complète.

Exercice 29 Soit x et y deux entiers. Expliciter un entier z pour lequel $x^2 - 6xy + 2y^2$ est congru à z^2 modulo 7. En déduire que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 30 Soit p un nombre premier de la forme $4k + 3$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que p divise $n^2 + 1$.

Exercice 31 Montrer que : $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Exercice 32 Trouver les deux derniers chiffres du nombre $7^{9^{9^9}}$.

Exercice 33 Quel est le reste dans la division par 11 de 1996^{1996} ?

Exercice 34 Déterminer les solutions des congruences suivantes :

1) $10x \equiv 25 \pmod{15}$

2) $10x \equiv 35 \pmod{21}$

Exercice 35 Montrer que $(2^{22n} - 1)(2^{16n} - 1) \equiv 0 \pmod{391}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36 Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $19 \mid 2^{6k+2} + 3$.