Feuille 6 : Polynômes

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :
1. $P(X^2+1) = P(X)$ 2. $P(2X+1) = P(X)$

CORRECTION
Remarquons que $P = 0$ convient. On suppose maintenant que $P \neq 0$ et on pose $\deg P = n \geq 0$.

1. En supposant l'égalité, et en regardant les degrés, on trouve que
$$\deg P(X^2+1) = 2n = n = \deg P .$$
Cela implique que $n = 0$ et donc $P(X) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si P est un polynôme constant, la rélation est facilement vérifiée.
Donc, la rélation est vérifiée si est seulement si P est constant.
2. Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour tout $0 \leq j \leq n$. Le coefficient dominant du polynôme composé $P(2X+1)$ est alors $a_n 2^n$. Par égalité, il faut alors $a_n = a_n 2^n$; cela est vrai si et seulement si $2^n = 1$, et donc si et seulement si $n = 0$ (autrement dit, $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$). Encore une fois, on trouve que les seuls polynômes qui vérifient l'égalité sont les polynômes constants : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a$.

Exercice 2. On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
   a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ.
   b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a.
   c) Déterminer P.
2. Conclure.

CORRECTION

1. Soient $\delta = \deg P \geq 0$ et $a \in \mathbb{C}$ le coefficient dominant de P.
   a) $\deg P(2X) = \delta$. Comme P est non nul et $P(2X) = P'P''$, ni P' ni P'' ne sont nuls, donc $\deg P' = \delta - 1$ et $\deg P'' = \delta - 2$. Donc $\deg\big(P'P''\big) = 2\delta - 3$. Il faut donc $\delta = 2\delta - 3$, qui implique $\delta = 3$.
   b) En vue de la question précédente, le coefficient dominant de $P(2X)$ est $8a$, celui de P' est $3a$ et celui de P'' est $6a$. Le coefficient dominant de $P'P''$ est alors $3a \cdot 6a = 18a^2$: pour avoir l'égalité, il faut donc que $8a = 18a^2$, c'est-à-dire
   $$a\,(9a - 4) = 0 .$$
   La solution $a = 0$ n'est pas acceptable (sinon, $\deg P < 3$), et alors $a = 4/9$.
   c) De façon analogue, si on écrit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on calcule explicitement les polynômes $P(2X)$ et $\big(P'P''\big)(X)$, on trouve les égalités
   $$\begin{cases} 4b = 18ab \\ 2c = 6ac + 4b^2 \\ d = 2bc , \end{cases}$$
   qui impliquent $b = c = d = 0$.
2. Donc, les seuls polynôme qui vérifient l'égalité donnée sont le polynôme $P(X) = (4/9)X^3$ et le polynôme nul.

Exercice 3. Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ 2. $X^6 - 4$ 3. $X^4 - 13X^2 + 36$ 4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

CORRECTION

1. 1 est racine évidente de $X^3-7X^2+14X-8$. On factorise donc $X^3-7X^2+14X-8 = (X-1)(X^2-6X+8)$ et on calcule les racines de $X^2 - 6X + 8$ qui sont 2 et 4.
2. $X^6 - 4 = (X^3)^2 - 4 = (X^3 - 2)(X^3 + 2)$. Dans $\mathbb{R}$ chacun de ces facteurs a une unique racine, on trouve donc deux racines réelles : $\sqrt[3]{2}$ et $-\sqrt[3]{2}$. Dans $\mathbb{C}$ on calcule les racines 3-ièmes de 2 et -2. On trouve au total 6 racines complexes distinctes : $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{i2\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{-i2\pi}{3}}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{i5\pi}{3}}$.
3. On factorise $Y^2 - 13Y + 36 = (Y - 9)(Y - 4)$ et on pour chaque racine y de ce polynôme on résout $X^2 = y$. On a donc que $3, -3, 2, -2$ sont les racines de $X^4 - 13X^2 + 36$.
4. On trouve les racines complexes de $Y^2 + 6Y + 25$ qui sont $y_1 = -3 + 4i$ et $y_2 = -3 - 4i$ et on calcule les racines carrées de chacun de ces deux nombres complexes. On trouve finalement 4 racines complexes (non réelles) : $\pm 1 \pm 2i$.

Exercice 4. On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos\theta)$.
4. Donner les racines de P_n.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $H(n)$ la proposition : P_n est de degré n et son coefficient dominant est 1. On calcule $P_2 = X^2 - 2$. Les propositions $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. Le degré de XP_n est donc $n + 1$ et le degré de P_{n-1} est $n - 1$, donc le degré de P_{n+1} est $n + 1$. Le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de XP_n donc c'est 1. On en déduit que $H(n + 1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la proposition : "pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$."
   Les propositions $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $A(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. On calcule
   $$\begin{aligned} P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) &= (z + \frac{1}{z})P_n(z + \frac{1}{z}) - P_{n-1}(z + \frac{1}{z}) \\ &= (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{z^{n+1}} - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$
   On en déduit que $A(n + 1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ la proposition : "$P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$"
   Les propositions $B(0)$ et $B(1)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et supposons $B(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. On calcule
   $$\begin{aligned} P_{n+1}(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)P_n(2\cos\theta) - P_{n-1}(2\cos\theta) \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n-1)\theta \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n\theta - \theta) \\ &= 2(\cos\theta)2\cos(n\theta) - 2\cos(n\theta)\cos\theta - 2\sin(n\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$
   On en déduit que $B(n + 1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Puisque P_n est de degré n et $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$, on déduit que ses racines (pour $n \geq 1$) sont les réels $x_k = 2\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})$ pour $k = 0, 1\dots, n - 1$.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

CORRECTION

1. Après avoir calculer explicitement les cas $n = 0$ et $n = 1$, pour lesquels on a

$$1 \,=\, 0 \cdot (X^5 - 1) + 1 \qquad \text{et} \qquad X^5 \,=\, 1 \cdot (X^5 - 1) + 1\,,$$

on va prouver par récurrence que le reste est toujours égal au polynôme constant 1.
Il suffit l'hérédité, l'initialisation ayant été faite pour $n = 0$. Soit donc $n \geq 1$; on suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^{5n} \,=\, K(X)\,(X^5 - 1) \,+\, 1\,.$$

On peut alors écrire $X^{5(n+1)} \,=\, X^5\,X^{5n}$, d'où

$$\begin{aligned} X^{5(n+1)} &= X^5 \Big(K(X)\,(X^5 - 1) \,+\, 1\Big) \\ &= X^5\,K(X)\,(X^5 - 1) \,+\, X^5 \,=\, X^5\,K(X)\,(X^5 - 1) \,+\, X^5 \,-\, 1 \,+\, 1 \\ &= (X^5 - 1)\Big(X^5\,K(X) \,+\, 1\Big) \,+\, 1\,. \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée. On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. Comme $99 \equiv 4$ [5], $42 \equiv 2$ [5], $35 \equiv 0$ [5] et $27 \equiv 2$ [5], de la question précédente on trouve que le reste est $X^4 \,+\, 2X^2 \,-\, 3 \,-\, 2X^2 \,+\, 3 \,=\, X^4$.

Exercice 6. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

CORRECTION

On écrit la division euclidienne de P par $X - 7$: $P = Q(X - 7) + R$. On en déduit que R est de degré 0, donc une constante. On évalue les fonctions polynômiales $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto Q(x)(x - 7) + R$ en 7 et on trouve $P(7) = R$.

Exercice 7. Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

CORRECTION

Version 1 (rapide, avec les complexes) : Le reste dans dans division euclidienne de A par $X^2 + 1$ est de degré au plus 1. On le note $R_n = \alpha X + \beta$ avec α et β nécessairement réels. On note aussi Q_n le quotient. On évalue en i :

$$A(i) = (i^2 + 1)Q_n(i) + R_n(i) = 0 + \alpha i + \beta = (\cos a + i \sin a)^n = e^{ina} = \cos(na) + i \sin(na)$$

par la formule de Moivre. On trouve donc $\alpha = \cos(na)$ et $\beta = \sin(na)$ en identifiant les parties réelles et imaginaires. Donc $R_n = \cos(na) + X \sin(na)$

Version 2 (longue par récurrence) : Soit $A_n(X) \,:=\, (X \sin a + \cos a)^n$ Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} A_0(X) &= 0 \cdot (X^2 + 1) \,+\, 1 \\ A_1(X) &= 0 \cdot (X^2 + 1) \,+\, \Big(X\,\sin a \,+\, \cos a\Big) \\ A_2(X) &= \sin^2 a\,(X^2 + 1) \,+\, \Big(X\,\sin(2a) \,+\, \cos(2a)\Big)\,. \end{aligned}$$

Si on appelle le reste de la division $R_n(X)$, on va alors montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$R_n(X) \;=\; X\,\sin(na) \;+\; \cos(na)\,.$$

L'initialisation est le cas $n = 0$, déjà traité ci-dessus. On montre l'hérédité. On suppose alors la propriété connue pour un certain $n \geq 1$ et on va la montrer pour $n+1$.

Pour cela, on écrit $A_{n+1}(X) \;=\; A_n(X)\,\big(X\sin a \;+\; \cos a\big)$: en utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit tout de suite que le reste de la division est donné par le produit $R_n(X)\,\big(X\sin a \;+\; \cos a\big)$. Si on calcule ce produit, on trouve

$$\begin{aligned} R_n(X)\,\big(X\sin a \;+\; \cos a\big) \;&=\; X^2\,\sin a\,\sin(na) \;+\; X\,\big(\sin a\,\cos(na) \;+\; \cos a\,\sin(na)\big) \;+\; \cos a\,\cos(na) \\ &=\; \sin a\,\sin(na)\,(X^2+1) \;+\; X\,\sin\big((n+1)a\big) \;+\; \cos a\,\cos(na) \;-\; \sin a\,\sin(na) \\ &=\; \sin a\,\sin(na)\,(X^2+1) \;+\; X\,\sin\big((n+1)a\big) \;+\; \cos\big((n+1)a\big)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que le reste est donc bien

$$R_{n+1}(X) \;=\; X\,\sin\big((n+1)a\big) \;+\; \cos\big((n+1)a\big)\,,$$

comme voulu. L'hérédité est donc vérifiée. On peut alors affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de
1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

CORRECTION

1. $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$.

Exercice 9. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

CORRECTION

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} P(X) \;&=\; 1\cdot Q(X) \;-\; \big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \\ Q(X) \;&=\;=\; \frac{1}{25}\,(5X+7)\cdot\big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \;+\; \frac{24}{25}\,(X^2+2) \\ 5X^3 - 7X^2 + 10X - 14 \;&=\; \big(5X - 7\big)\,\big(X^2+2\big)\,. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{PGCD}(P, Q) \;=\; X^2 + 2$. En remontant les égalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} X^2 + 2 \;&=\; \frac{25}{24}\,Q(X) \;-\; \frac{1}{24}\,(5X+7)\cdot\big(5X^3 - 7X^2 + 10X - 14\big) \\ &=\; \frac{25}{24}\,Q(X) \;+\; \frac{1}{24}\,(5X+7)\cdot\Big(P(X) - Q(X)\Big) \\ &=\; \frac{1}{24}\,(5X+7)\cdot P(X) \;-\; \frac{1}{24}\,\big(5X - 18\big)\,Q(X)\,. \end{aligned}$$

Donc $U(X) \;=\; (1/24)\big(5X+7\big)$ et $V(X) \;=\; -(1/24)\big(5X - 18\big)$.

Exercice 10. Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

CORRECTION

1. $P(-1) = 0$ donc $\alpha = 8$.
2. $X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1 = (X+1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$
3. j est une racine simple de $X^2 + X + 1$ et on remarque que $(X^2+X+1)^2 = X^4+2X^3+3X^2+2X+1$, donc j est racine double de P.
4. D'après la question ci-dessus on a la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X+1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = (X+1)^2(X^2+X+1)^2$ et dans $\mathbb{C}[X]$ on a $P = (X+1)^2(X-j)^2(X-\bar{j})^2$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

CORRECTION

Calculons $P'(X) = a(n+1)X^n + nbX^{n-1}$. Alors 1 est racine multiple de P si et seulement si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$: ces deux conditions impliquent que

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ (n+1)a+nb=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{n}{n+1}\,b \\ c = -\dfrac{1}{n+1}\,b\,. \end{cases} \iff (a,b,c) = \left(-\frac{n}{n+1}b, b, -\frac{1}{n+1}b\right).$$

On déduit que $P'(X) = nb(-X^n + X^{n-1})$, puis en dérivant que $P''(X) = nb(-nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2})$. Pour que 1 soit racine d'ordre au moins 3, il faut que $P''(1) = -nb = 0$, ce qui implique $b = 0$ et par suite que P est le polynôme nul. Donc si $P \neq 0$, 1 peut être une racine d'ordre au plus 2.

Exercice 12. Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

CORRECTION

1. $P'_a = 6X^2 + 6X + 6 = 6(X-j)(X-j^2)$ avec $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Donc $PGCD(P_a, P'_a) \neq 1$ seulement si j ou j^2 sont parmi les racines de P_a. Par ailleurs j et j^2 ne sont pas simultanément racine de P_a, sinon $X^2 + X + 1$ diviserai P_a ce qui n'est pas possible puisque $P_a = (X^2+X+1)(2X+1) + 3X + a - 1$ et on voit bien que ce reste n'est nul pour aucune valeur de a. Si $P_a(j) = 0$ alors $\mathrm{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j$ et si $P_a(j^2) = 0$, $\mathrm{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j^2$.
2. Si $P_a(j) = 0$, j est donc racine double de P_a. Ce sera le cas si $2j^3 + 3j^2 + 6j + a = 0$ donc si
$$a = -3j^2 - 6j - 2 = -3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 = \frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$
De la même façon on trouve que j^2 est racine double de P_a si $a = -\frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{1}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{X^2-1}$.

b) $\dfrac{X+1}{X^2+1}$, $\dfrac{X^2}{X^3-1}$.

c) $\dfrac{X-1}{X^2(X^2+1)}$, $\dfrac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$.

d) $\dfrac{X^4}{X^2-3X+2}$, $\dfrac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$.

CORRECTION

Le cas a) : Travaillons sur la première fraction rationnelle. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2}.$$

Multiplions les deux membres par $(X+1)(X-2)$ (le dénominateur du premier membre) :

$$1 = \frac{a(X+1)(X-2)}{X+1} + \frac{b(X+1)(X-2)}{X-2} = a(X-2) + b(X+1).$$

Évaluer X (dans cette identité) en 2 [1] (qui annule le premier facteur $X-2$) [2] :

$$1 = a \cdot (2-2) + b \cdot (2+1) = 3b \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{1}{3}.$$

Évaluer X (dans cette identité) en -1 (qui annule le premier facteur $X+1$) :

$$1 = a \cdot ((-1)-2) + b \cdot ((-1)+1) = -3a \qquad \Longrightarrow \qquad a = -\frac{1}{3}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-2}\right).$$

Pour la deuxième fraction rationnelle, de façon similaire, on obtient

$$\frac{X}{(X+1)(X-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{2}{X-2}\right).$$

Pour la troisième fraction rationnelle, de façon similaire, on obtient

$$\frac{X}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}\right).$$

Le cas b) : Dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction rationnelle

$$\frac{X+1}{X^2+1}$$

est déjà un élément simple. dans $\mathbb{C}[X]$, de façon similaire au cas a), on trouveras

$$\frac{X+1}{X^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-i}{X-i} + \frac{1+i}{X+i}\right).$$

Pour la deuxième fraction rationnelle, comme $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{X^2}{X^3-1} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1}.$$

Multiplion les deux membres par $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$:

$$X^2 = (aX+b)(X-1) + c(X^2+X+1).$$

Évaluer X (dans cette identité) en 1, on obtient $1 = c(1+1+1) = 3c$, i.e., $c = \dfrac{1}{3}$.

Évaluer X en 0, on obtient $0 = -b+c$, i.e., $b = c = \dfrac{1}{3}$. Enfin, en comparant le coefficient de X^2, par exemple, on obtient $a = \dfrac{2}{3}$, d'où

$$\frac{X^2}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2X+1}{X^2+X+1} + \frac{1}{X-1}\right).$$

1. C'est-à-dire, remplacer X par 2.
2. C'est-à-dire, le facteur $X-2$ devient 0.

Le cas c) : Comme on voit que
$$\frac{1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1},$$
(posons $X^2 = Y$, par exemple, et calculer comme dans le cas a)), on obtient
$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{X-1}{X^2} - \frac{X-1}{X^2+1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{X-1}{X^2+1}.$$
Sinon, on pourra tout simplement voir qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$
Multiplions les deux membres par $X^2(X^2+1)$:
$$X - 1 = aX(X^2+1) + b(X^2+1) + (cX+d)X^2.$$
Évaluer X (dans cette identité) en 0, on obtient $b = -1$, d'où
$$\begin{aligned} & X - 1 = aX(X^2+1) - (X^2+1) + (cX+d)X^2 \\ \iff\quad & (X-1) + (X^2+1) = aX(X^2+1) + (cX+d)X^2 \\ \iff\quad & X + 1 = a(X^2+1) + (cX+d)X. \end{aligned}$$
Évaluons X en 0, on obtient $a = 1$. Ensuite,
évaluons X en i, on obtient $i + 1 = (ci+d)i = -c + di$. Comme c et d sont réels, on obtient $c = -1$ et $d = 1$ par identification. On en déduit que
$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} + \frac{-1}{X^2} + \frac{-X+1}{X^2+1}.$$
Pour le deuxième cas, de façon similaire, on trouvera
$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Le cas d) : chaque fraction rationnelle a un numérateur duquel degré est supérieur de celui du dénominateur. Par la division euclidienne, on a
$$\begin{aligned} \frac{X^4}{X^2-3X+2} &= X^2 + 3X + 7 + \frac{15X-14}{X^2-3X+2}, \\ \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)} &= X + 1 + \frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}. \end{aligned}$$
Donc, pour la première fraction rationnelle, il suffit de procéder comme dans le cas a) et on obtient
$$\frac{X^4}{X^2-3X+2} = X^2 + 3X + 7 + \frac{16}{X-2} - \frac{1}{X-1}.$$
Pour la deuxième fraction rationnelle, il suffit de procéder comme la deuxième fraction au cas c) et on obtient
$$\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)} = X + 1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}.$$

Exercice 14. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

a) $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$, $\dfrac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}$, $\dfrac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$, $\dfrac{X^6-X^2+1}{(X-1)^3}$.

b) $\dfrac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$, $\dfrac{X^3-4X^2+1}{(X-2)^3(X+1)}$, $\dfrac{1}{X^2(X^2-2X+2)^2}$.

c) $\dfrac{2X^6+3X^5-3X^4-3X^3-3X^2-18X-5}{X^5+X^4-2X^3-X^2-X+2}$.

CORRECTION

a) On a

$$\frac{X^2+1}{X(X^2-1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$

$$\frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1} = X^3 - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)} - 1$$

$$\frac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{2}{X-2} + \frac{1}{X-3}$$

$$\frac{X^6-X^2+1}{(X-1)^3} = X^3+3X^2+6X + \frac{14}{X-1} + \frac{4}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3} + 10$$

b) De même, on a

$$\frac{1}{(X^2+1)^2-X^2} = \frac{1-X}{2(X^2-X+1)} + \frac{X+1}{2(X^2+X+1)}$$

$$\frac{X^3-4X^2+1}{(X-2)^3(X+1)} = \frac{4}{27(X+1)} + \frac{23}{27(X-2)} - \frac{5}{9(X-2)^2} - \frac{7}{3(X-2)^3}$$

$$\frac{1}{X^2(X^2-2X+2)^2} = \frac{3-2X}{4(X^2-2X+2)} + \frac{1}{4X^2} + \frac{1-X}{2(X^2-2x+2)^2} + \frac{1}{2X}$$

c) On a enfin

$$\frac{2X^6+3X^5-3X^4-3X^3-3X^2-18X-5}{X^5+X^4-2X^3-X^2-X+2} = 2X+1+\frac{1-3X}{X^2+X+1} + \frac{2}{X-1} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+2}$$

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.

CORRECTION

On montre par récurrence que les coefficients de P_n sont tous égaux à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $A(n)$ la proposition "$P_n = 1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+1}-1}$".

$P_0 = 1+X$ donc $A(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $A(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
P_{n+1} = P_n(1+X^{2^{n+1}}) &= P_n + X^{2^{n+1}}(1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+1}-1}) \\
&= 1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+1}-1} + X^{2^{n+1}} + \ldots + X^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} \\
&= 1+X+X^2+\ldots+X^{2^{n+2}-1},
\end{aligned}$$

d'où $A(n+1)$ est vraie. On en déduit que $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. Puisque $X^{n+1}-1=(X-1)(X^n+X^{n-1}+\cdots X+1)$, les racines de $X^n+X^{n-1}+\cdots X+1$ sont toutes les racines $n+1$-ièmes de l'unité sauf 1. On peut donc factoriser sur $\mathbb{C}[X]$:
$$X^n+X^{n-1}+\cdots X+1=\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{\frac{i2k\pi}{n+1}}).$$
2. $X^{11}+2^{11}$ a une unique racine réelle : -2, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles est
$$X^{11}+2^{11}=(X+2)(X^{10}-2X^9+4X^8-\ldots+2^{10}).$$
Dans $\mathbb{C}[X]$ on calcule les racines 11-ièmes de -2^{11} on trouve $X^{11}+2^{11}=\prod_{k=0}^{11}(X-2e^{\frac{i(1+2k)\pi}{11}})$.
3. Dans $\mathbb{R}[X]$ on a la factorisation $X^4+4=(X^2+2)^2-4X^2=(X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$. Dans $\mathbb{C}[X]$ on a $X^4+4=(X-1-i)(X-1+i)(X+1-i)(X+1+i)$.
4. On calcule les 4 racines 4-ièmes de j et on obtient
$$X^4-j=\prod_{k=0}^{3}(X-e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})})=(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$
5. $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4=(X^4+1-X^2)(X^4+1+X^2)$.
D'autre part $X^4+1+X^2=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+1+X)(X^2+1-X)$ et $X^4+1-X^2=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}X)$. D'où
$$X^8+X^4+1=(X^2+1+X)(X^2+1-X)(X^2+1-\sqrt{3}X)(X^2+1+\sqrt{3}).$$
Ces quatres facteurs sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (discriminant négatif).
6. X^5-1 a une unique racine réelle $X=1$, les autres racines sont conjuguées. On factorise d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ en calulant les racines 5-ièmes de 1 et on regroupe les facteurs de la forme $(X-z)(X-\bar{z})$. On obtient finalement
$$\begin{aligned}X^5-1&=\prod_{k=-2}^{2}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)\\&=(X-1)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)\\&=(X-1)\left(X^2-2\cos\frac{2\pi}{5}X+1\right)\left(X^2-2\cos\frac{4\pi}{5}X+1\right)\\&=(X-1)\left(X^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)X+1\right)\left(X^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)X+1\right)\end{aligned}$$

Exercice 17. Calculer le pgcd des couples de polynômes (P,Q) suivants :

1. $P=6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q=15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$,
2. $P=X^7+2X^6-X-2$ et $Q=X^3+X^2-2X$,
3. $P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $Q=X(X-1)^2(X-2)$,
4. $P=X^5-X^4+X^3-X^2+X-1$ et $Q=X^7+X^5+8X^4+X^3+8X^2+8$.

CORRECTION

1. Les deux polynômes sont déjà décomposés en produit de facteurs irreductibles (sur $\mathbb{R}$) : on a alors
$$\mathrm{PGCD}(P,Q)\;=\;(X-1)\,(X^2+1)\,.$$

2. On voit facilement que

$$\begin{aligned} P(X) &= X^6\,(X+2) - (X+2) = (X+2)\,(X^6-1) = (X+2)\,(X^3-1)\,(X^3+1) \\ &= (X+2)\,(X-1)\,(X^2+X+1)\,(X+1)\,(X^2-X+1) \\ Q(X) &= X\,(X^2+X-2) = X\,(X+2)\,(X-1)\,. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{PGCD}(P,Q) = (X-1)\,(X+2)$.

3. Si $n=0$ alors $P=0$ et donc $\mathrm{PGCD}(P,Q)=Q$. Sinon, on a $P(0)=1\neq 0$ et $P(2)=(n-1)2^n+1\neq 0$, tandis que $P(1)=0$. Il reste à voir si 1 est racine double de P. Pour cela, on calcule

$$P'(X) = n\,(n+1)\,X^n - n\,(n+1)\,X^{n-1} = n\,(n+1)X^{n-1}(X-1)\,.$$

   D'où $\mathrm{PGCD}(P,Q) = (X-1)^2$.

4. On pourrait utiliser l'algorithme d'Euclide. Par contre, ici c'est simple à voir que

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1) = (X-1)\,(X^4+X^2+1) \\ Q(X) &= X^3\,(X^4+X^2+1)+8(X^4+X^2+1) = (X^4+X^2+1)\,(X^3+8)\,. \end{aligned}$$

   Notez que çe n'est pas la décomposition en facteurs irréductibles de P et Q, mais c'est suffisant pour calculer le PGCD : on a $\mathrm{PGCD}(P,Q)=X^4+X^2+1$.

Exercice 18. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P. Montrer que Q^2 divise $PQ'-P'Q$.

CORRECTION
Si P est le polynôme nul, le résultat est évident. Sinon, il existe $A\in\mathbb{R}[X]$, $A\neq 0$ tel que $P=QA$. On a donc $P'=Q'A+QA'$. On calcule $PQ'-P'Q=(QA)Q'-(Q'A+QA')Q=Q^2A'$. Puisque $A\neq 0$, alors Q^2 divise bien $PQ'-P'Q$.

Exercice 19. Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X-a$ et par $X-b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda=\mu=0$?

CORRECTION

1. On écrit $P(X) = (X-a)\,Q(X) + \lambda$: on a alors $\lambda=P(a)$. De façon analogue, on a aussi $\mu=P(b)$. Si maintenant on écrit

$$P(X) = (X-a)\,(X-b)\,Q_1(X) + R(X)\,, \qquad \text{avec} \qquad R(X) = \alpha X+\beta\,,$$

   en évaluant cette expression en a et b on trouve

$$\begin{cases} P(a) = \lambda = \alpha a+\beta \\ P(b) = \mu = \alpha b+\beta \end{cases}$$

   L'hypothèse $a\neq b$ garantit qu'il existe une unique solution (α,β) de ce systéme : des calculs explicite s montrent que

$$\alpha = \frac{\lambda-\mu}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{a\mu-b\lambda}{a-b}\,.$$

2. En particulier, si $\lambda=\mu=0$, on déduit que $\alpha=\beta=0$, c'est-à-dire $R\equiv 0$, et donc $(X-a)(X-b)$ divise P.

Exercice 20. On définit une suite de polynômes $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m \ .$$
4. Monter que $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$Pgcd(P_{m+n}, P_n) = Pgcd(P_m, P_n) \ .$$
5. Conclure que $Pgcd(P_m, P_n) = P_{Pgcd(m,n)}$.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $H(n)$ la propriété : $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
On a $P_2 = XP_1 - P_0 = X$ et $P_1^2 = 1 = 1 + 0 \cdot X$, donc $H(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned}
1 + P_{n+1}P_{n+3} &= 1 + P_{n+1}(XP_{n+2} - P_{n+1}) \\
&= 1 + XP_{n+1}P_{n+2} - P_{n+1}^2 \\
&= 1 + XP_{n+1}(XP_{n+1} - P_n) - 1 - P_n(XP_{n+1} - P_n) \\
&= X^2 P_{n+1}^2 - 2XP_n P_{n+1} + P_n^2 \\
&= (XP_{n+1} - P_n)^2 = P_{n+2}^2.
\end{aligned}$$
La proposition $H(n+1)$ est vraie et donc $H(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} = 1$ le théorème de Bézout implique que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la propriété : $P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$.
On a $P_{m+1} = 1P_{m+1} - 0 \cdot P_m$, donc $A(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On suppose $A(k)$ vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. On calcule
$$\begin{aligned}
P_{n+1}P_{m+1} - P_n P_m &= (XP_n - P_{n-1})P_{m+1} - P_n P_m \\
&= X(P_{m+n} + P_{n-1}P_m) - P_{n-1}P_{m+1} - P_n P_m \\
&= XP_{m+n} + XP_{n-1}P_m - (P_{m+n-1} + P_{n-2}P_m) - P_n P_m \\
&= XP_{m+n} - P_{m+n-1} + (XP_{n-1} - P_{n-2})P_m - P_n P_m \\
&= XP_{m+n} - P_{m+n-1} = P_{m+n+1}.
\end{aligned}$$
La propriété $A(n+1)$ est vraie et donc $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
4. Notons $Q = \text{PGCD}(P_n, P_m)$ et $T = \text{PGCD}(P_{m+n}, P_n)$. D'après (3), $Q \mid P_{m+n}$ et donc Q divise T. D'autre part, puisque $T \mid P_{m+n}$ et $T \mid P_n$, encore par (3), $Q \mid P_{n-1}P_m$. Mais P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux, donc T est premier avec P_{n-1} et alors par le lemme de Gauss $T \mid P_m$. On en déduit $T \mid Q$ et donc $T = Q$.
5. On déduit facilement de (4) que pour $k, d \in \mathbb{N}^*$, $(P_{m+nk}, P_n) = (P_m, P_n)$ et $(P_{dn}, P_n) = P_n$. On calcule le $\text{pgcd}(m, n)$ via l'algorithme d'Euclide :
$$\begin{aligned}
m &= nq_1 + r_1 \\
n &= r_1 q_2 + r_2 \\
&\vdots \\
r_{k-1} &= r_k q_{k+1} + 0,
\end{aligned}$$

où r_k est le dernier reste non nul (donc $\text{pgcd}(m, n) = r_k$.) On a donc
$$\text{pgcd}(P_m, P_n) = \text{pgcd}(P_{nq_1+r_1}, P_n) = \text{pgcd}(P_{r_1}, P_n) = \text{pgcd}(P_{r_1}, P_{r_2}) = \ldots = \text{pgcd}(P_{r_k}, P_{q_{k+1}r_k}) = P_{r_k}.$$

Exercice 21. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

CORRECTION
Vu que $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$, on a que les racines complexes de X^2+X+1 sont $j = e^{i2\pi/3}$ et $\bar{j}$. Par un théorème du cours, il suffit de vérifier que j est racine aussi de P_n. Après avoir remarqué que

$$j^3 = \bar{j}^3 = 1\,, \qquad j^2 = -j - 1 \qquad \text{et aussi} \qquad j^2 = \bar{j}\,,$$

on a que $P_n(j) = \bar{j}^n + j^n + 1$.

Trois cas sont alors possibles.

1. $n \equiv 0$ [3] : on a alors que $j^n = \bar{j}^n = 1$, et donc $P_n(j) = 3$. Alors X^2+X+1 ne divise pas P_n.
2. $n \equiv 1$ [3] : on a alors que $j^n = j$ et $\bar{j}^n = \bar{j}$, d'où on trouve
$$P_n(j) = \bar{j} + j + 1 = 0\,.$$
Dans ce cas, X^2+X+1 divise P_n.
3. $n \equiv 2$ [3] : on a alors que $j^n = j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^n = \bar{j}^2 = j$; on en déduit (comme dans le cas précédent) que X^2+X+1 divise P_n.

Exercice 22. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

CORRECTION
On applique l'algorithme d'Euclide. On suppose par exemple $n > m$, et on écrit $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$. Alors on a :

$$X^n - 1 = X^{mp+r} - 1 = X^r(X^{mp} - 1) + X^r - 1.$$

Le point crucial est que $X^{mp} - 1$ est divisible par $X^m - 1$. En effet, $X^{mp} - 1 = (X^m - 1)(X^{m(p-1)} + X^{m((p-1)-1)} + \cdots + X^m + 1)$. Ainsi, $\operatorname{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \operatorname{pgcd}(X^m - 1, X^r - 1)$. Mais puisque $\operatorname{pgcd}(n,m) = \operatorname{pgcd}(m,r)$, on en déduit finalement que $\operatorname{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\operatorname{pgcd}(n,m)} - 1$.

Exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

CORRECTION
On note que, pour tout k fixé entre 0 et $n-1$, on a

$$2\cos(2k\pi/n) = 2\Re\left(e^{i2k\pi/n}\right) = e^{i2k\pi/n} + e^{-i2k\pi/n} \qquad \text{et} \qquad 1 = e^{i2k\pi/n}\,e^{-i2k\pi/n}\,.$$

Donc on peut décomposer

$$X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1 = \left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right)\,.$$

En d'autres termes, pour chaque k fixé, le terme $X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1$ s'écrit comme le produit entre une racine n-ième de l'unité et son complexe conjugué. Mais son complexe conjugué est aussi une racine n-ième de l'unité, et en faisant varier k on prend toutes les racines. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{-i2k\pi/n}\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i2k\pi/n}\right)\right)^2 = (X^n - 1)^2\,.
\end{aligned}$$

Exercice 24. Pour $n \geq 1$, on note $P_n = (1+iX)^n - (1-iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire les valeurs de $\sum\limits_{k=0}^{p} \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$ et de $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

CORRECTION

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $p \geq 0$ l'unique entier tel que

$$n = \begin{cases} 2p+1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2p+2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque facilement que $\deg(P_n) = 2p+1$. En effet,

$$\begin{aligned} P_n &= (1+iX)^n - (1-iX)^n \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(i^\ell - (-i)^\ell\right) X^\ell \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k+1} \left(i^{2k+1} - (-i)^{2k+1}\right) X^{2k+1} \\ &= 2i \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1} \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $P(-i) \neq 0$, z est une racine de P si et seulement si $\frac{1+iz}{1-iz}$ est une racine n-ième de l'unité différente de -1. On a donc

$$\begin{aligned} P(z) = 0 \quad &\iff \quad \exists k \in \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\} \mid \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \quad \exists k \in \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\} \mid z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{i\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right)} = \frac{\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{i\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)} \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}} \\ &\iff \quad \exists k \in \{-p, \ldots, 0, \ldots, p\} \mid z = \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

De (**??**) et (**??**), on déduit que

$$\begin{aligned} P_n(X) &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} \prod_{k=-p}^{p} \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \prod_{k=1}^{p} \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\left(X - \tan\left(\frac{-k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

On obtient alors le résultat demandé en identifiant les monônes de degré $(2p-1)$ dans (**??**) et (**??**) :

$$2i(-1)^{p-1}\binom{n}{2(p-1)+1} X^{2(p-1)+1} = 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \sum_{k=1}^{p} \left(-\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) X^{2(p-1)}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^{p} \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\binom{n}{2p-1}}{\binom{n}{2p+1}} = \begin{cases} p(2p+1) & \text{si } n = 2p+1 \\ \dfrac{p(2p+1)}{3} & \text{si } n = 2p+2. \end{cases}$$

Exercice 25. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

CORRECTION

1. On calcule

$$P(1/z) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i (1/z)^i \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{1}{z^i} \;=\; \frac{1}{z^n} \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}\,,$$

où on a calculé le dénominateur en commun. Maintenant, par hypothèse de symmétrie sur les coefficients, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{n-i} \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \;=\; P(z)\,.$$

Donc on a trouvé que $P(1/z) \;=\; P(z)/z^n$. Du moment que z est racine, $P(z) \;=\; 0$, et alors aussi $P(1/z) = 0$.

2. On cherche une racine non-triviale ($\neq 0, \pm 1$) pour pouvoir appliquer le résultat précédent. On voit tout de suite que 2 est racine du polynôme. On sait alors que aussi $1/2$ l'est. Autrement dit, $X-2$ et $2X-1$ divisent le polynôme donné. Par division euclidienne, on a

$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 \;=\; (X-2)\,(2X-1)\,(3X^2 - 10X + 3)\,.$$

Maintenant, le polynôme $3X^2 - 10X + 3$ vérifie l'hypothèse de symmétrie précédente. C'est facile à voir que 3 est une racine, et donc aussi $1/3$. On en déduit que $3X^2 - 10X + 3 \;=\; (X-3)\,(3X-1)$ (la vérification est immédiate). Finalement, on trouve

$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 \;=\; (X-2)\,(2X-1)\,(X-3)\,(3X-1)\,.$$

Exercice 26. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et d son degré. Pour n entier naturel, on définit u_n commme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$. Montrer que $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une suite arithmétique.

CORRECTION

Soit $P(X) \;=\; X^d + a_1 X^{d-1} + \ldots$. Par les rélations coefficients- racines, on sais que $u_0 \;=\; a_1$. De façon analogue, $P'(X)\, dX^{d-1} + a_1(d-1)X^{d-2} + \ldots$, d'où on a $u_1 \;=\; a_1\,(d-1)/d$. De la dérivée seconde, on trouve $u_2 = a_1\,(d-2)/d$. En général, pour tout $k \in [0, d]$, on a

$$u_k \;=\; a_1\,\frac{d-k}{d}\,.$$

Donc, on calcule

$$u_{k-1} - u_k \;=\; a_1\,\frac{d-k+1}{d} \;-\; a_1\,\frac{d-k}{d} \;=\; \frac{a_1}{d}\,(d-k+1-d+k) \;=\; \frac{a_1}{d}\,,$$

qui est constant en k.

Exercice 27. Soit $P \;=\; X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines complexes dont la somme vaut 2.

CORRECTION

Notons $a, b \in \mathbb{R}$ les deux racines dont la somme vaut 2. Alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X-a)(X-b)(X^2 + cX + d) = (X^2 - 2X + ab)(X^2 + cX + d)$. On développant et en identifiant les coefficients on trouve $c = 2$, $d = 4 - ab$ et $2ab - 2d = 12$. On en déduit $ab = 5$ et $d = -1$. On a finalement

$$P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1) = (X^2 - 2X + 5)(X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2}).$$

Exercice 28. Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

CORRECTION

1. De $(*)$, on trouve tout de suite que $3P(0) = 0$, donc 0 est une racine de P, et alors $P(X) = X\,Q(X)$, pour un certain polynôme Q.
2. La rélation $(*)$ devient alors $(**)$:

   $$(X+3)\,X\,Q(X) \;=\; X\,(X+1)\,Q(X+1)\,.$$

   Le polynôme à droite s'annulle si calculé en -1, d'où $Q(-1) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler). En utilisant cette dernière propriété, le membre de droite s'annulle aussi si calculé en -2, d'où $Q(-2) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler).
3. De la question précédente, on déduit que $X+1$ et $X+2$ divisent Q, et donc aussi P. On peut alors écrire

   $$P(X) \;=\; a\,X^m\,(X+1)^n\,(X+2)^p\,R(X)\,,$$

   avec $a \in \mathbb{R}$ et $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Aussi, on peut supposer que X, $X+1$ et $X+2$ ne divisent pas R. La rélation $(*)$ devient alors

   $$(X+3)\,a\,X^m\,(X+1)^n\,(X+2)^p\,R(X) \;=\; X\,a\,(X+1)^m\,(X+2)^n\,(X+3)^p\,R(X+1) \tag{4}$$

   L'égalité précédente implique déjà que $m = 1$ (à cause des puissances de X), et alors $n = 1$ (puissances de $X+1$) et $p = 1$ (puissances de $X+2$). Cela implique que $X+3$ ne divise pas R, autrement dit que -3 n'est pas racine de R, et donc de P non plus.
   Il nous reste à prouver que $R(X) = 1$.
   Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0, -1, -2, -3$ est une autre racine de P, donc α est une racine de R. De l'égalité précédente, calculée en α, on trouve alors

   $$0 \;=\; \alpha\,a\,(\alpha+1)^m\,(\alpha+2)^n\,(\alpha+3)^p\,R(\alpha+1)\,.$$

   Cela implique $R(\alpha+1) = 0$, et donc $\alpha+1$ est une autre racine de R. Cela implique que $\alpha \neq -4$; en itérant (il faudrait faire une récurrence), on trouve que $\alpha \neq -k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre côté, le même argument montre que $\alpha + k$ est une racine de R, pour tout $k \in \mathbb{N}$. R aurait donc une infinité de racine, et le théorème fondamental de l'algèbre impliquerait que $R \equiv 0$, d'où $P \equiv 0$: absurde. L'absurde vient de supposer que R admettait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ différente de celles qu'on a déjà trouvées, et alors la seule possibilité est que $R \equiv 1$ (on avait choisi R unitaire).
4. On a prouvé que, forcement, il faut avoir $P(X) = a\,X\,(X+1)\,(X+2)$. D'autre côté, si P est de la forme précédente, P vérifie $(*)$. La preuve est alors complète.

Exercice 29. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha}\ .$$

CORRECTION
Puisque $X^3+aX^2+bX+c=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on en déduit $\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b$, $-(\alpha+\beta+\gamma)=a$ et $\alpha\beta\gamma=c$. De ces trois identités on peut aussi en déduire $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a^2-2b$. Finalement en mettant sur le même dénominateur l'expression $S=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\beta+\alpha}$ et faisant apparaître les termes identifiés ci-dessus on trouve

$$S=\frac{a(a^2-2b)+3c}{ab+c}$$

Exercice 30. Soient α,β,γ les racines de l'équation X^3-5X^2+6X-1. Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}\ .$$

CORRECTION
Puisque $X^3-5X^2+6X-1=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on en déduit en développant $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=6$ et $\alpha+\beta+\gamma=5$. De plus en évaluant en $X=1$ on a aussi $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}&=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\\&=3-2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\\&=3-2\cdot5+6=-1.\end{aligned}$$

Exercice 31. Soit $P=X^3+3X^2+2X+i\in\mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

CORRECTION

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ racine de P. Alors $P(\alpha)=0$, d'où on déduit
$$i\;=\;-2\alpha-3\alpha^2-\alpha^3\;\in\;\mathbb{R}\;:$$
absurde. Donc P n'a pas de racines réelles.
2. On écrit
$$\begin{aligned}P(X)\;&=\;(X-\alpha)\,(X-\beta)\,(X-\gamma)\\&=\;X^3\;-\;(\alpha+\beta+\gamma)X^2\;+\;(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X\;-\;\alpha\beta\gamma\,.\end{aligned}$$
Par identification, on trouve alors $\alpha+\beta+\gamma\;=\;-3$. Aussi, on a $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\;=\;2$ et $\alpha\beta\gamma=-i$. De ces rélations, on déduit avant tout que
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\;=\;\big(\alpha+\beta+\gamma\big)^2-2\big(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\big)\;=\;9-4\;=\;5\,.$$
En plus, on a
$$\big(\alpha+\beta+\gamma\big)\,\big(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\big)\;=\;\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+3\alpha\beta\gamma\,,$$
ce qui donne
$$\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\;=\;3i-6\,.$$
Maintenant on calcule
$$\big(\alpha+\beta+\gamma\big)^3\;=\;\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\;+\;3\big(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\big)\;+\;6\alpha\beta\gamma\,,$$
d'où on trouve
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\;=\;(-3)^3\;-\;3\,(3i-6)\;-\;6\,(-i)\;=\;-9\;-\;3i\,.$$