

« Rappels » sur les réels et la dénombrabilité

On ne va pas (trop) s'interroger sur la façon de construire, ou de définir, l'ensemble $\mathbb{R}$; par contre on va essayer de mettre en valeur une propriété fondamentale : la *propriété de la borne supérieure*.

À partir de la structure de corps sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, l'addition et la multiplication de nombres réels), on peut définir la notion de nombre *positif* : x est positif si, et seulement si, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$. On admet ici (ou on considère comme un axiome) que la relation $\leq$ définie par « $x \leq y$ ssi $y - x$ est positif » est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (pourrait-on définir un ordre de la même façon sur $\mathbb{C}$?).

1.1 La valeur absolue.



Définition 1.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

En particulier, $x = 0$ si, et seulement si, $|x| = 0$; et $|x|$ est toujours positif.

Pour montrer des inégalités impliquant une valeur absolue, on utilise souvent la caractérisation équivalente ci-dessous.



Exercice 1.2

Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(|x| \leq y) \Leftrightarrow (-y \leq x \leq y)$.

Il est très important de connaître les deux formes de l'*inégalité triangulaire* rappelée dans l'exercice suivant.



Exercice 1.3

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.2 Suites convergentes et suites extraites.



Définition 1.4

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$



Exercice 1.5

Montrer que toute suite convergente est bornée. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 1.6

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels qui convergent vers x, y respectivement. Montrer que $x_n + y_n$ converge vers $x + y$, et que $x_n y_n$ converge vers xy .

Définition 1.7

Soit (x_n) une suite de nombres réels. Une *suite extraite* de (x_n) est une suite (y_n) de nombres réels telle qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **strictement** croissante et telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 1.8

Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Montrer que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc $\varphi(n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$).

Exercice 1.9

Montrer que :

- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors toute suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (et de même limite).
- Si $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ alors (x_n) converge vers ℓ (a-t-on besoin de supposer que les deux limites sont égales ?)
- Si $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes convergentes alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Fréquemment, on est amené à considérer une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on voudrait qu'elle converge, mais sans pouvoir le garantir ; alors on espère arriver à justifier (et à exploiter) qu'une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On va faire un bref détour pour discuter des propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, qu'il est utile de comprendre pour construire des suites extraites. Rappelons d'abord le théorème suivant (qu'on ne démontrera pas ; là encore il faudrait se demander comment on construit l'ensemble des entiers naturels. Ce théorème est une propriété fondamentale de $\mathbb{N}$).

★ Théorème 1.10

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Alors A admet un plus petit élément, qu'on note $\min(A)$.

C'est cette propriété des entiers qui permet de justifier les démonstrations par récurrence.

Exercice 1.11

1. Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Alors il existe une fonction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $A = \varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Montrer qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est infini si, et seulement si, A a la propriété suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists n \in A \ n \geq N$$

L'exercice suivant est plus délicat que les autres (il est tout de même faisable!).

**Exercice 1.12**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite monotone.

1.3 Borne supérieure, borne inférieure.**Définition 1.13**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On dit que

- x est un *majorant* de A si $a \leq x$ pour tout $a \in A$.
- x est la *borne supérieure* de A si x est un majorant de A , et $x \leq y$ pour tout majorant y de A . On note alors $x = \sup(A)$.
- x est un *minorant* de A si $a \geq x$ pour tout $a \in A$.
- x est la *borne inférieure* de A si x est un minorant de A , et $x \geq y$ pour tout minorant y de A . On note alors $x = \inf(A)$.

Ainsi, la borne supérieure de A (quand elle existe !) est « le plus petit des majorants » de A , de même la borne inférieure est « le plus grand des minorants ».

**Définition 1.14**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est *majorée* si A admet un majorant, c'est-à-dire s'il existe M tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$.
- On dit que A est *minorée* si A admet un minorant, c'est-à-dire s'il existe m tel que $a \geq m$ pour tout $a \in A$.
- On dit que A est *bornée* si A est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq M$ pour tout $a \in A$.

La propriété suivante est fondamentale, et explique pourquoi on préfère faire de l'analyse dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{Q}$.

**Théorème 1.15 (Propriété de la borne supérieure)**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ à la fois majorée et non vide. Alors A admet une borne supérieure.

De même, si A est minorée et non vide alors A admet une borne inférieure.

**Exercice 1.16**

Pourquoi demande-t-on que A soit non vide ci-dessus ? Autrement dit, pourquoi évite-t-on de parler de $\sup \emptyset$, $\inf \emptyset$? Quelle convention serait raisonnable ?

**Exercice 1.17**

Donner un exemple de partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Il arrive qu'on s'autorise à parler de borne supérieure même quand A n'est pas majorée, ou de borne inférieure même quand A n'est pas minorée ; si A n'est pas majorée on écrit $\sup(A) = +\infty$, et si A n'est pas minorée alors $\inf(A) = -\infty$. La *droite réelle achevée*, souvent notée $\mathbb{R}$, est l'ensemble obtenu en ajoutant $-\infty$, $+\infty$ à $\mathbb{R}$, avec la convention que $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On n'en parlera pas plus ici.

On est fréquemment amené à utiliser une des caractérisations de la borne supérieure rappelées dans l'exercice suivant.

Exercice 1.18

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x = \sup(A)$.
2. x est un majorant de A , et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $a \geq x - \varepsilon$.
3. x est un majorant de A , et il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x .

Exercice 1.19

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) des ensembles suivants :

$$\left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} : p, q \in \mathbb{N}^* \right\} ; \quad \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 1.20

En utilisant le fait que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, démontrer le résultat suivant : *Toute suite croissante et majorée de réels est convergente.*

Exercice 1.21

À l'aide des résultats établis précédemment, montrer le théorème de *Bolzano–Weierstrass* : toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente.

Quand on travaille avec des suites dans $\mathbb{R}^2$, ou plus généralement dans $\mathbb{R}^d$ pour un entier d fixé, le résultat ci-dessous joue un rôle important.

Exercice 1.22

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées de nombres réels. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soient toutes deux convergentes.

Peut-on généraliser ce résultat à trois suites bornées ? Un nombre fini de suites bornées ? Une infinité de suites bornées ? (la dernière question est plus difficile !)

Exercice 1.23

À l'aide de la propriété de la borne supérieure, montrer que $(\mathbb{R}, <)$ est *archimédien*, c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

**Définition 1.24**

On dit que deux suites (u_n) , (v_n) de nombres réels sont *adjacentes* si l'une des deux suites est croissante, l'autre décroissante, et $u_n - v_n$ tend vers 0.

**Exercice 1.25**

Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
2. Toute suite croissante majorée d'éléments de $\mathbb{R}$ est convergente.
3. $\mathbb{R}$ est archimédien ; et si (u_n) , (v_n) sont deux suites adjacentes de nombres réels, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes (nécessairement vers la même limite puisque $u_n - v_n$ tend vers 0).

1.4 Intervalles.**Définition 1.26**

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors I est un *intervalle* s'il satisfait la propriété suivante :
Pour tout $x, y \in I$ et tout z tel que $x \leq z \leq y$, on a $z \in I$.

Soit I un intervalle non vide. Notons $M = \sup(I)$ (éventuellement, $+\infty$), et $m = \inf(I)$ (éventuellement, $-\infty$). Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $m < z < M$.

Par caractérisation des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble, il existe $x, y \in I$ tels que $x < z$ et $z < y$; puisque I est un intervalle, on en déduit que $z \in I$.

On vient d'établir que $] \inf(I), \sup(I) [\subseteq I$. Il suit que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une des quatre formes suivantes (selon que $\inf(I), \sup(I)$ appartiennent ou non à I) :

- $]a, b[$, avec éventuellement $a = -\infty$, $b = +\infty$. On convient que $]a, a[= \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- $]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ (on dit alors que I est un *segment*).

**Exercice 1.27**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on se donne un segment $S_n = [a_n, b_n]$ non vide. On suppose que $S_{n+1} \subseteq S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset$ (c'est le *théorème des segments emboîtés*).

1.5 Dénombrabilité**Définition 1.28**

Un ensemble X est *dénombrable* s'il existe une injection $f: X \rightarrow \mathbb{N}$.

Notons que, avec cette définition, X peut être fini ; on trouve aussi souvent la convention selon laquelle un ensemble dénombrable est nécessairement infini.

Exercice 1.29

Soit X un ensemble non vide. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$.
2. Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X .
3. Il existe une partie A de $\mathbb{N}$ et une bijection de A sur X (montrer aussi que, si X est infini, on peut prendre $A = \mathbb{N}$).

Il est important de bien remarquer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$; en particulier, l'ensemble des nombres premiers est en bijection avec $\mathbb{N}$ (savez-vous montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers ?).

Exercice 1.30

À l'aide du théorème des segments emboîtés, démontrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Connaissez-vous d'autres démonstrations de ce fait ?

Exercice 1.31

Soit X, Y deux ensembles.

1. Montrer que si X est dénombrable et $f: X \rightarrow Y$ est surjective alors Y est dénombrable.
2. Montrer que si Y est dénombrable et $f: X \rightarrow Y$ est injective alors X est dénombrable. En particulier, toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Exercice 1.32

Soit X un ensemble, et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de X . On suppose que chaque A_i est dénombrable. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Indication : commencer par se ramener au cas où les A_i sont disjoints. Puis énumérer l'ensemble des nombres premiers sous la forme d'une suite strictement croissante $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$; pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixer une injection $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N}$, puis considérer $f: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $x \in A_i \mapsto p_i^{f_i(x)+1}$.

On a ainsi montré qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. En particulier, une union finie d'ensembles dénombrables est dénombrable (ci-dessus, certains A_i pouvaient être vides...).

Exercice 1.33

Soit X, Y deux ensembles dénombrables. Montrer que $X \times Y$ est dénombrable.

Exercice 1.34

1. Montrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k$ (pour k un entier) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. Un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable (on pourra commencer par prouver que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable).

On pourrait être tenté de croire que tout ensemble est dénombrable, mais on a déjà vu que ce n'était pas le cas de $\mathbb{R}$ (ni de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; pourquoi?).

Exercice 1.35

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . Soit $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une fonction. En considérant $A = \{x \in X: x \notin f(x)\}$, montrer que f n'est pas surjective.

En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

En particulier, si l'on part de $X_0 = \mathbb{N}$, puis qu'on pose $X_{i+1} = \mathcal{P}(X_i)$, on obtient une suite d'ensembles infinis « de plus en plus gros » ; mais on n'ira pas plus loin dans cette direction ici.

Notons que, si on identifie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (en identifiant un ensemble à sa fonction caractéristique), il suit de cela que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (en fait, il est en bijection avec $\mathbb{R}$) ; un produit dénombrable d'ensembles dénombrables n'est pas dénombrable, en général !