

Continuité et dérivabilité

2.1 Fonctions d'une variable réelle : continuité

On va se restreindre au cas de fonctions définies sur un intervalle, pour simplifier un peu, mais ça ne jouera pas un grand rôle dans la partie sur la continuité (on pourrait considérer comme domaine une partie quelconque de $\mathbb{R}$, au moins dans les définitions). Pour parler de dérivabilité il est important de travailler sur un intervalle, par contre.



Définition 2.1

Soit I un intervalle, et $x \in I$. On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in I |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$



Exercice 2.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. Montrer que f est continue en x si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers x on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$.

On dit que f est continue *sur* I si elle est continue en x pour tout $x \in I$. On s'épargne les preuves que sommes, produits, composées de fonctions continues sont continues ; mais ce sont des choses à savoir faire.



Exercice 2.3

1. Disons que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *vraiment très continue* si :

$$\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon .$$

(autrement dit, le même δ marche pour tout ε et pour tout x).

2. Disons que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *assez peu continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon .$$

(cette fois, δ dépend à la fois de ε , x , et y)

Montrer que les seules fonctions vraiment très continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes ; et que n'importe quelle fonction est assez peu continue.

(Les termes "vraiment très continue" et "assez peu continue" ont été inventés pour l'exercice précédent et ne sont bien sûr pas à retenir ! Le but de l'exercice est surtout d'insister sur le fait que l'emplacement des quantificateurs joue un rôle crucial sur le sens d'un énoncé mathématique...).

Passons aux deux premiers théorèmes à connaître absolument sur les fonctions continues d'une variable réelle (avoir une idée de la preuve ne peut pas faire de mal !)

Exercice 2.4 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Dans cet exercice, on fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ainsi que $a < b \in I$ tels que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

1. Montrer que $E = \{x \in [a, b]: \forall y \in [a, x] f(y) \leq 0\}$ admet une borne supérieure $M \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $a \leq M \leq b$, et que $f(M) \leq 0$.
3. En supposant que $f(M) < 0$, obtenir une contradiction ; conclure que $f(M) = 0$.
4. À l'aide des résultats établis dans les questions précédentes, montrer que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 2.5 (Théorème des extrémums)

Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $M = \sup\{f(x): x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Rappeler pourquoi il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que $f(x_n)$ tend vers M .
2. En utilisant le fait que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, démontrer que $M < +\infty$ et qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M$.
3. Établir le *théorème des extrémums* : une fonction continue sur un segment, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes.

Dans l'énoncé ci-dessus on pourrait plus généralement supposer que le domaine de f est un *compact* de $\mathbb{R}$ (et la preuve serait la même) ; on reviendra sur cela plus tard.

Si $I = [a, b]$ est un segment, et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in [a, b]\}$. C'est un réel positif (et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel formé par les fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 2.6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit : δ ne dépend plus que de ε et pas du point x . Manifestement, cette définition est plus forte que celle de la continuité et est en fait, en général, strictement plus forte.

Exercice 2.7

1. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $x \mapsto P(x)$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On voit que, sur un intervalle non borné, même des fonctions très sympathiques comme $x \mapsto x^2$ ne vont pas être uniformément continues ; et qu'une fonction qui a une limite infinie en 0 ne risque pas d'être uniformément continue sur $]0, 1]$ (pourquoi ?). En utilisant les mêmes idées, on peut se convaincre que, quand l'intervalle I n'est pas un segment, il y a des fonctions continues sur I qui n'y sont pas uniformément continues. Remarquablement, cela n'arrive pas quand I est un segment.

 Exercice 2.8 (Théorème de Heine)

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On souhaite montrer que f est uniformément continue. On raisonne par l'absurde, et on suppose que ce n'est pas le cas.

1. Justifier l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que : pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
2. Justifier qu'il existe deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $\mathbb{N}$.
3. En utilisant judicieusement le théorème de Bolzano–Weierstrass, obtenir une contradiction.

Il ne serait pas inutile pour vous d'essayer de démêler l'exercice sur le théorème de Korovkin présenté dans *Analystan* (exercice 4 dans ma version, du 10 mai 2021), qui permet en particulier d'obtenir une preuve du théorème suivant (exercice 5, à faire aussi !).

 Théorème 2.9 (Théorème)

Théorème de Weierstrass Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge vers f *uniformément*, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup\{|P_n(x) - f(x)| : x \in I\}) = 0$$

 Exercice 2.10

Caractériser toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

2.2 Dérivées

Commençons par revoir, sous forme d'exercices guidés, des propriétés classiques des fonctions dérivées. Je prévois de ne pas traiter la plus grande partie (la totalité ?) de ces exercices au tableau : préparez vos questions si nécessaire !

 Définition 2.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. On dit que f est *dérivable* en x si $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ existe ; dans ce cas on note cette limite $f'(x)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en x pour tout $x \in I$.

Notons que, dans la limite ci-dessus, on suppose implicitement que $y \in I$; ainsi, si $I = [a, b]$, quand on regarde si f est dérivable en a on ne regarde que des $y \geq a$, tandis que pour la dérivée en b on ne regarde que des $y \leq b$. Cela permet aussi de parler de dérivée à droite ou à gauche en un point.

Une autre façon de reformuler la définition de la dérivée : f est dérivable en x de dérivée l si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon: I \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in I$ on ait

$$f(y) = f(x) + l(y - x) + (y - x)\varepsilon(y) \text{ et } \lim_{y \rightarrow x} \varepsilon(y) = 0.$$

En particulier, $f(y)$ tend vers $f(x)$ quand y tend vers x : si f est dérivable en x alors elle est nécessairement continue en x . La réciproque est fautive : par exemple $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Cela dit, elle y

admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ce n'est donc pas un exemple très convaincant ; en fait, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de dérivée à droite, ni à gauche, en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.12

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $g_n: x \mapsto x^n$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier). Montrer que :

1. Si $n > 0$ alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'_n(x) = nx^{n-1}$.
2. Si $n < 0$ alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $g'_n(x) = nx^{n-1}$.

Il faut savoir démontrer les formules classiques sur la dérivation d'un produit ou d'une composée.

Exercice 2.13

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x \in I$. Montrer que fg est dérivable, et que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Par conséquent, si f et g sont dérivables sur I alors fg l'est aussi et $(fg)' = f'g + fg'$.

Exercice 2.14

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(J) \subseteq I$. Si $x \in J$ est tel que g est dérivable en x et f est dérivable en $g(x)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x et on a

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Exercice 2.15

Énoncer et démontrer un théorème sur la dérivabilité d'un quotient de deux fonctions.

Parfois, pour décider si une fonction est dérivable en un point, on est obligé de revenir à la définition : considérons par exemple le cas de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notons que cette fonction est continue en 0 : comme $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ pour tout $x > 0$, on a bien

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Manifestement, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$ et sa dérivée en un point $x \neq 0$ est égale à $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Notons que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0^+ (pourquoi?). Cela ne signifie pas, a priori, que f n'est pas dérivable en 0 ! Pour décider si elle est dérivable, on forme le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On conclut que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 : f est bien dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

Mais f' n'est pas continue en 0. Il est important de connaître un exemple de fonction dérivée qui n'est pas continue, comme celui qu'on vient de voir.

2.3 Théorème de Rolle et des accroissements finis.

Exercice 2.16

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x un extremum local de f . Si f est dérivable en x alors on doit avoir $f'(x) = 0$.

Notons par contre que la condition $f'(x) = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que x est un extremum local de f ! Par exemple, si on considère la fonction $f: x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local de f . Les développements limités, qu'on va revoir plus bas, sont utiles pour étudier le comportement local d'une fonction en un point où $f'(x) = 0$.

Exercice 2.17 (Théorème de Rolle)

Soit $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(On pourra essayer de justifier, puis d'utiliser, le fait que, si f n'est pas constante sur $[a, b]$, alors elle doit admettre un extremum local dans $]a, b[$)

Exercice 2.18 (Égalité des accroissements finis)

Soit $a < b$ deux réels, et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) .$$

(Appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$)

Notons que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ (qu'on appelle une *corde* entre deux points du graphe de f) tandis que $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en c . Le théorème des accroissements finis nous dit donc que, étant donné une corde reliant deux points sur le graphe de f , on peut trouver quelque part entre ces deux points une tangente au graphe qui est parallèle à la corde en question.

Une application fondamentale de l'égalité des accroissements finis est de nous donner un lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction, qui justifie l'utilisation de la dérivée pour dresser des tableaux de variations.

Exercice 2.19

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est croissante sur I si, et seulement si, on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$; et f est décroissante sur I si, et seulement si, on a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. De plus, si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement croissante, et si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement décroissante.

On voit aussi que si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ alors f est constante; et, pour conclure que f est strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, l'égalité des accroissements finis nous dit qu'il suffit de vérifier que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Citons une autre conséquence fréquemment utilisée de l'égalité des accroissements finis.

Exercice 2.20

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si de plus $x \in I$ est tel que f est dérivable sur $I \setminus \{x\}$, et $\lim_{y \rightarrow x, y \neq x} f'(y) = l$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est dérivable en x et $f'(x) = l$.

Attention : l'énoncé précédent ne se démontre *pas* en faisant un prolongement par continuité de f' en x ! Souvent, pour étudier des fonctions et calculer des limites, on a besoin d'établir des inégalités. L'égalité des accroissements finis (et sa généralisation, la *formule de Taylor-Lagrange*, qu'on va revoir plus bas) nous fournit une méthode utile.

Exercice 2.21 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $k = \sup_{c \in]a, b[} |f'(c)| < +\infty$, alors pour tout $x, y \in [a, b]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Exercice 2.22

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq x$.

Notons que les fonctions dérivées partagent des propriétés des fonctions continues, même si elles ne le sont pas nécessairement (plus haut dans ces notes on a vu un exemple de fonction dérivée dont la dérivée n'était pas une fonction continue).

Exercice 2.23 (Théorème de Darboux)

Montrer que les fonctions dérivées satisfont la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , alors $f'(I)$ est un intervalle. (commencer par traiter le cas où il existe $a < b \in I$ tels que $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ et montrer qu'alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ en considérant le minimum de f sur $[a, b]$)

En particulier, si une dérivée ne s'annule pas, elle ne peut pas changer de signe, et la fonction étudiée est strictement monotone. Comme on a vu qu'il existe des fonctions dérivées non continues, le théorème de Darboux nous montre qu'il existe des fonctions non continues qui satisfont la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.