

Formules de Taylor, développements limités

3.1 Comparaison de fonctions



Définition 3.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à I et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *négligeable devant* g en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| .$$

On note alors $f = o_{x_0}(g)$.

Quand x_0 est clairement précisé, on note simplement $f = o(g)$. Remarquons que, si g ne s'annule pas, alors dire que f est négligeable devant g revient à dire que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 . En particulier, la notation $f = o_{x_0}(1)$ signifie simplement que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 ! La notation $f = o(g)$ est délicate à manipuler et il faut faire très attention au début ; par exemple, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ en x_0 alors on a encore $f_1 + f_2 = o(g)$! En 0, on a par exemple $x^2 = x^3 + o(1)$, mais aussi $x^2 = o(1)$, etc.



Exercice 3.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en x_0 , et $f'(x_0) = l$, si et seulement si on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + o_{x_0}(x - x_0)$.



Définition 3.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à I et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *dominée par* g en x_0 , et on note $f = O_{x_0}(g)$, si

$$\exists M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)| .$$

Quand g ne s'annule pas sur I , $f = O_{x_0}(g)$ revient à dire que f/g est bornée au voisinage de x_0 .



Définition 3.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à I et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *équivalente* à g en x_0 , et on note $f \sim_{x_0} g$, s'il existe $\delta > 0$ et une fonction $h: I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers x_0 , et $f(x) = h(x)g(x)$ pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Quand g ne s'annule pas, dire que $f \sim_{x_0} g$ revient à dire que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0 (et c'est comme ça qu'il faut y penser).

Exercice 3.5

Montrer que $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g \sim_{x_0} f$. Montrer que $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g = f + o_{x_0}(f)$.

Les équivalents sont particulièrement utiles pour calculer des limites : si l est un réel **non nul**, alors dire que $f \sim_{x_0} l$ revient à dire que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 . Pourquoi distinguer le cas où l est nul ? Parce que, si $f \sim_{x_0} 0$, alors la définition d'un équivalent impose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f = 0$ sur $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ce qui est bien sur différent de dire que f tend vers 0 ! Si vous écrivez sur une copie que $f \sim 0$, par exemple en calculant une limite ou en étudiant une intégrale, il est presque certain que vous écrivez une (grosse) bêtise : si la fonction est nulle près de x_0 , on n'a pas besoin de passer par des équivalents pour calculer sa limite ou étudier son comportement en x_0 ...

La nature multiplicative, et non additive, de la définition des équivalents présente quelques périls : si on peut sans danger multiplier des équivalents, on ne peut en général pas les ajouter (ni les soustraire). Voyons un exemple : soit $f(x) = x$ et $g(x) = -x + x^2$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. En 0, on a $f(x) \sim x$ et $g(x) \sim -x \sim -f(x)$; mais puisque $f(x) + g(x) = x^2$, on n'a pas $f(x) + g(x) \sim 0$!

De la même façon, on ne peut pas composer des équivalents sans faire un minimum attention. Dans le même esprit que ci-dessus, considérons les fonctions $f, g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Alors en 0 on a $f(x) \sim g(x)$; pourtant, $e^{g(x)}$ et $e^{f(x)}$ ne sont pas équivalentes, puisque $e^{g(x)} = e^{1/x} e^{f(x)}$ et $e^{1/x}$ ne tend pas vers 1 quand x tend vers 0^+ .

On pourrait énoncer un théorème selon lequel on peut composer des équivalents quand les fonctions équivalentes sont "à gauche" de la composition ; mais ce théorème n'est pas très utile en pratique et **on préférera composer des développements limités**.

Notons que toutes ces définitions (o , O , $\sim$) auraient aussi un sens en $\pm\infty$; c'est un bon exercice d'écrire les définitions correspondantes.

3.2 Les formules de Taylor

Si f est dérivable en x_0 , alors on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$. Autrement dit, la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est une approximation de f en x_0 avec une erreur au plus de l'ordre de $x - x_0$. Plus généralement, les formules de Taylor permettent (sous les bonnes hypothèses) d'approcher f par des fonctions polynomiales.

La première formule de Taylor est celle qui a les hypothèses les plus faibles (et la conclusion aussi la plus faible).

★ Théorème 3.6 (Formule de Taylor–Young)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et f une fonction $n - 1$ fois dérivable sur I et telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Alors on a $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$.

En notation plus condensée : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$.

On dira que $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ est le *développement limité* de f en x_0 à l'ordre n (dans ce cas particulier, le développement limité est obtenu en calculant le *polynôme de Taylor* de f à l'ordre n), et $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ est le *reste* du développement limité ; la formule de Taylor-Young nous permet simplement de dire que le reste du développement limité à l'ordre n est un $o((x - x_0)^n)$.

On ne va pas donner la preuve de la formule de Taylor-Young ; pour $n = 1$ c'est une reformulation de la dérivabilité de f en x_0 . La difficulté principale de la preuve est le cas $n = 2$, une fois ce cas établi on peut raisonner par récurrence en appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre $n - 1$ à f' puis en intégrant (et là on utilise que f' est continue au voisinage de x , ce qui n'est pas une conséquence des hypothèses de Taylor-Young dans le cas $n = 2$... Des trois formules de Taylor c'est celle dont la démonstration requiert le plus d'attention).

Sans insister trop, notons ici une subtilité : admettre un développement limité à l'ordre 1 en x_0 revient, par définition, à être dérivable en x_0 ; et la formule de Taylor-Young nous garantit que si f est n fois dérivable en x_0 alors elle admet un développement limité à l'ordre n en x_0 . Mais la réciproque est fautive pour $n \geq 2$: **avoir un développement limité à l'ordre n en x_0 ne garantit pas que f soit n fois dérivable en x_0** , ni même 2 fois dérivable, comme le montre l'exemple ci-dessous.



Exercice 3.7

On fixe $n \geq 2$, et on définit

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0 (on pourra essayer de prouver que f' n'est même pas continue en 0).

Avec des hypothèses plus fortes sur f , on peut avoir une estimation plus précise du reste.



Théorème 3.8 (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit $a < b$ deux réels, $n \geq 0$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Alors pour tout $x, x_0 \in [a, b]$ il existe $c \in]x_0, x[$ tel que l'on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) .$$

Démonstration. Notons que pour $n = 0$ on obtient exactement l'égalité des accroissements finis, et on sait donc déjà que la formule de Taylor-Lagrange est vraie à l'ordre 0. Pour montrer qu'elle est vraie à un ordre $n > 0$, on va utiliser le théorème de Rolle ; soit donc f , $n > 0$, x_0 et x comme dans l'énoncé et considérons la fonction auxiliaire φ définie sur le segment $[x_0, x]$ par

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k - \lambda \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de telle façon que $\varphi(x_0) = 0$. On a aussi $\varphi(x) = 0$ par définition de φ , de plus les hypothèses sur f assurent que φ est dérivable sur $]x_0, x[$ et continue sur $[x_0, x]$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle pour conclure qu'il existe $c \in]x_0, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Cette égalité est équivalente à

$$-\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x - c)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!} (x - c)^{k-1} + \lambda \frac{(x - c)^n}{n!} = 0 .$$

En décalant les indices dans la deuxième somme, ceci revient à

$$-\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x - c)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x - c)^k + \lambda \frac{(x - c)^n}{n!} = 0 .$$

Après simplification, on est donc arrivé à $\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \lambda \frac{(x-c)^n}{n!}$, autrement dit $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ (notons qu'ici on utilise le fait que $c \neq x$!). En revenant à la définition de λ et au fait que $\varphi(x_0) = 0$ on a obtenu

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - f^{(n+1)}(c) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

et on a donc bien démontré la formule de Taylor-Lagrange. $\square$

Et si on renforce encore les hypothèses sur f , on obtient même une formule explicite pour le reste.

★ Théorème 3.9 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^{n+1} sur I . Alors pour tout $x, x_0 \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Cette formule est la plus facile à démontrer des trois, une fois qu'on sait manipuler des intégrales sur un segment (en particulier, le théorème fondamental de l'analyse et la formule d'intégration par parties); comme on n'a pas encore revu les propriétés de l'intégrale je laisse la preuve de côté mais c'est un bon exercice de révision (on peut par exemple mener une rédaction par récurrence).

3.3 Développements limités

Définition 3.10

Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) = P(x-x_0) + o_{x_0}((x-x_0)^n)$.

On dit alors que P est la *partie régulière* du développement limité, tandis que $f - P$ est appelé le *reste*.

La formule de Taylor-Young nous permet d'assurer que, si f est n fois dérivable en x_0 , alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , et que la partie régulière de ce développement limité est

$$f(x_0) + f'(x_0)X + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}X^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}X^n.$$

En particulier, quand f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'on sait calculer la suite des dérivées successives $f^{(n)}(0)$, alors on peut donner les développements limités de f à tout ordre en 0. On reviendra plus tard sur les calculs pratiques de développements limités et leurs applications, pour l'instant on va développer un peu leurs propriétés théoriques (qui nous permettront de simplifier certains calculs).

★ Théorème 3.11

La partie régulière d'un développement limité est unique. Plus précisément, si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont tels que $P(x-x_0) - Q(x-x_0) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$ pour un certain x_0 de $\mathbb{R}$, alors $P = Q$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $x_0 = 0$. Écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Alors on a bien sûr

$$P(X) - Q(X) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) X^k.$$

Si un des termes $c_k = a_k - b_k$ est différent de 0, alors on prend le plus petit k tel que cela arrive (appelons-le k_0) et on a

$$P(X) - Q(X) = c_{k_0} x^{k_0} \left(1 + \sum_{k=k_0+1}^n \frac{c_k}{c_{k_0}} X^{k-k_0} \right).$$

En particulier, on voit que dans ce cas on a $P(x) - Q(x) \sim_0 c_{k_0} x^{k_0}$, et donc $P(x) - Q(x)$ n'est pas négligeable devant x^n . Par conséquent, si jamais $P(x) - Q(x) = o_0(x^n)$ alors on doit avoir $P = Q$. $\square$

On voit ainsi que si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , de partie régulière P , alors pour tout $k \leq n$ la partie régulière du développement limité de f en x_0 à l'ordre k est obtenue en enlevant de P ses termes de degré $\geq k+1$.

★ Théorème 3.12

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier, $x_0 \in I$ et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en x_0 de parties régulières P, Q respectivement. Alors :

1. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.
2. fg admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , de partie régulière obtenue en ne retenant que les termes de degré $\leq n$ du polynôme $P.Q$.

Il est très important que, dans l'énoncé ci-dessus, les développements limités de f et de g sont calculés **au même ordre** !

La démonstration est sans surprise et on se l'épargne ici ; il faut bien comprendre que, pour tout $m > n$, on a $x^m = o(x^n)$ (en 0)

On peut aussi composer des développements limités, mais bien sûr il faut faire attention aux points où on compose !

★ Théorème 3.13

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$, $g: I \rightarrow J$ et $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g ait un développement limité à l'ordre n en x_0 (de partie régulière Q) et f ait un développement limité à l'ordre n en $g(x_0)$ (de partie régulière P). Alors $f \circ g$ a un développement limité à l'ordre n en x_0 , dont la partie régulière est le polynôme obtenu en enlevant à $P \circ (Q - Q(0))$ tous ses termes de degré $> n$.

Encore une fois, on ne compose les développements limités que s'ils ont été calculés au même ordre pour f et pour g .

Démonstration. Si $n = 0$ il s'agit de montrer que $f \circ g$ est continue en x_0 , ce qu'on sait déjà. Sinon, puisque g admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en x_0 on a en particulier $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, ce dont on tire que $o_{x_0}((g(x) - g(x_0))^n) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$. De plus, on voit en développant que

$$P(Q(x - x_0) - Q(0) + o((x - x_0)^n)) = P(Q(x - x_0) - Q(0)) + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Enfin, on a par définition d'un développement limité que $Q(0) = g(x_0)$. Une fois ces informations rassemblées, il nous suffit d'écrire

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= P(g(x) - g(x_0)) + o_{x_0}((g(x) - g(x_0))^n) \\ &= P(Q(x - x_0) - Q(0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \\ &= P(Q(x - x_0) - Q(0)) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

En notant R le polynôme obtenu en ne retenant que les termes de degré $\leq n$ de $P \circ (Q - Q(0))$, on vient d'arriver à

$$f(g(x)) = R(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

□

On ne compose presque toujours que des développements limités avec $Q(0) = 0$ et il s'agit simplement de calculer une composée ; l'énoncé du théorème ci-dessus est un peu pénible mais si l'on se force à toujours calculer des développements limités en 0 (quitte à translater les variables) alors ça ne pose aucun problème en pratique.

Les deux résultats précédents nous disent que les développements limités sont plus faciles à manipuler que les équivalents : comme les équivalents, on peut les multiplier, mais contrairement aux équivalents on peut aussi les ajouter et les composer. La proposition suivante nous dit qu'on peut aussi les intégrer !

★ Théorème 3.14

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$ et f une fonction dérivable sur I telle que f' soit continue et ait un développement limité à l'ordre n en x_0 , de partie régulière P . Alors f a un développement limité à l'ordre $n + 1$ en x_0 , dont la partie régulière est la primitive Q de P telle que $Q(0) = f(x_0)$.

On s'épargne de nouveau la preuve (qui nécessite d'intégrer un reste, comme dans la preuve de la formule de Taylor-Young).

Par contre, **on ne peut pas en général dériver un développement limité** : il peut arriver que f ait un développement limité à l'ordre n en 0, mais que f' n'ait pas de développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0... Si jamais f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 alors on l'obtient en dérivant celui de f à l'ordre $n + 1$ en 0, grâce au lien établi par le théorème d'intégration ; mais si on veut calculer le développement de f' à partir de celui de f , il faut d'abord justifier que f' admet un développement limité ! Pouvez-vous donner un exemple de ce phénomène, en utilisant un des exercices précédents ?

3.4 Les développements limités classiques

Ci-dessous on ne va écrire que des développements limités en 0 (et on écrira $o(x^n)$ au lieu de $o_0(x^n)$) ; en général si on calcule un développement limité de f en $x_0 \neq 0$ il est souvent plus pratique de poser $x = x_0 + h$ et de se ramener à un développement limité de $h \mapsto f(x_0 + h)$ en 0.

Puisque on a $\exp'(x) = \exp(x)$, on a immédiatement $\exp^{(n)}(0) = 1$, et la formule de Taylor-Young nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) .$$

Pour les fonctions trigonométriques, c'est à peine plus difficile : on a $\sin'(x) = \cos(x)$, et $\cos'(x) = -\sin(x)$, ce dont on déduit les formules

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n .$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \text{ et } \cos^{(2n+1)}(0) = 0 .$$

La formule de Taylor-Young nous donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) .$$

On voit ci-dessus que, dans le développement limité de $\cos$, n'apparaissent que des termes pairs, et dans celui de $\sin$ que des termes impairs. La raison en est explicitée dans la proposition suivante.

★ Théorème 3.15

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière P . Si f est paire, alors tous les coefficients de degré impair de P sont nuls ; et si f est impaire alors tous les coefficients de degré pair de P sont nuls.

Démonstration. C'est une conséquence de l'unicité de la partie régulière d'un développement limité.

De l'égalité $f(x) = P(x) + o(x^n)$ on déduit que $f(-x) = P(-x) + o((-x)^n) = P(-x) + o(x^n)$. Si $f(x) = f(-x)$, alors $P(x)$ et $P(-x)$ sont donc tous les deux des parties régulières du développement limité de f à l'ordre n en 0, d'où $P(x) = P(-x)$, et P n'a que des coefficients de degré pair. De même si $f(x) = -f(-x)$ on déduit que $P(x) = -P(-x)$ et P n'a que des coefficients d'ordre impair. $\square$

Continuons notre liste de développements limités ; par la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} + o(x^n) .$$

Autrement dit, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) .$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) .$$

En intégrant, on obtient

$$-\ln(1 - x) = \ln(1) + \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) , \text{ et donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(1 - x) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) .$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(1 + x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$$

De même, à partir de $\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$, on obtient en intégrant que

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) .$$

Voyons une dernière formule à connaître : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie par récurrence que, pour $n \geq 1$, la dérivée n -ième de $f_\alpha: x \mapsto (1+x)^\alpha$ est égale à $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. En particulier, pour $n \geq 1$ on a $f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$, et la formule de Taylor-Young nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Récapitulons tous les développements que nous venons d'obtenir :

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$.
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ (valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

Les résultats ci-dessus ont été obtenus à partir de la formule de Taylor-Young ; **en général, c'est une mauvaise idée de calculer un développement limité à l'ordre n en calculant n dérivées successives de f , car c'est beaucoup trop lourd en calcul.**

On préférera si possible déduire les développements limités à partir des développements classiques ci-dessus (à connaître ou à savoir retrouver très vite) et les méthodes de calcul : produit, composition, intégration... Pour les développements limités des quotients, on peut soit raisonner par composition comme on va le voir ci-dessous, soit appliquer la méthode des *divisions par puissances croissantes* qu'on va aussi se contenter d'illustrer sur des exemples.

3.5 Exemples de calculs de développements limités

Commençons par utiliser trois méthodes différentes pour calculer le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 5.

Première méthode : la division selon les puissances croissantes, qui ressemble à une division euclidienne, sauf qu'on fait en sorte d'éliminer successivement les termes de plus bas degré (je ne recommande pas cette méthode ; la deuxième méthode ci-dessous est plus rapide une fois qu'on s'est un peu entraîné).

On commence par écrire

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}.$$

Puis on utilise la méthode de division par les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l}
 x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\
 - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + o(x^5) & \hline
 & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\
 \hline
 & \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5) \\
 & - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) \\
 \hline
 & \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)
 \end{array}$$

On a donc obtenu la relation

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5) + o(x^5),$$

qui nous donne finalement $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Deuxième méthode : par composition, en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1-u}$ (ci-dessous, les termes en gris clair sont ceux qu'on aurait pu se passer d'écrire, puisqu'ils font apparaître des termes de degré > 5 ; en pratique on ne les écrit pas, ce qui permet de gagner beaucoup de temps de calcul).

$$\begin{aligned}
 \tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
 &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})} + o(x^5) \\
 &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^3 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^4 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^5) + o(x^5) \\
 &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}) + o(x^5) \\
 &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).
 \end{aligned}$$

(Note : dans la dernière ligne, on n'a pas fait apparaître les termes de degré > 5 , même pas en gris, puisque ce sont tous des $o(x^5)$)

Troisième méthode : en utilisant une équation différentielle. On a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. En écrivant le développement de $\tan'$ en 0 à l'ordre 4 sous la forme $a + bx^2 + cx^4 + o(x^4)$ (il n'y pas de termes d'ordre impair : $\tan$ est impaire, donc $\tan'$ est paire), le fait que $\tan(0) = 0$ et le théorème d'intégration des développements limités nous donnent que le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 5 est de la forme

$$\tan(x) = x + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

La formule $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ nous donne alors (par composition) :

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + (ax + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5})^2 + o(x^4).$$

Autrement dit, on a

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + a^2x^2 + \frac{2ab}{3}x^4 + \frac{b^2}{9}x^6 + o(x^4)$$

Le théorème d'unicité des développements limités nous permet d'identifier les deux développements terme à terme : ceci donne $a = 1$, $b = a^2 = 1$, et $c = \frac{2ab}{3} = \frac{2}{3}$.

En reportant cela dans la formule donnant le développement de $\tan$ à l'ordre 5 en 0 en fonction de a, b, c , on obtient de nouveau $\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Voyons brièvement deux autres exemples. Si l'on veut calculer le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1 - \sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0, on peut utiliser la méthode de composition (en ne faisant pas du tout apparaître dans le calcul les termes de trop haut degré) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sin(x)} &= \frac{1}{1 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x^2 + x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) . \end{aligned}$$

A la deuxième ligne ci-dessus, on n'a pas pris la peine d'écrire les « $\frac{x^3}{6}$ » quand on a composé après l'ordre 2 : dans le développement, ils auraient contribué des termes négligeables devant x^3 .

De même, calculons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{\cos(x)}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2) . \end{aligned}$$

Attention, on ne calcule pas des développements limités seulement en 0 ! Par exemple, essayons de développer $x \mapsto e^x$ à l'ordre 3 en 1. On écrit $x = 1 + h$, et on se ramène à développer $h \mapsto 1 + h$ à l'ordre 3 en 0, ce qui nous amène au calcul suivant :

$$\begin{aligned} e^{1+h} &= e \cdot e^h \\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) . \end{aligned}$$

En revenant à la relation $h = x - 1$, on a obtenu le développement limité

$$e^x = e\left(1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{6}\right) + o((x - 1)^3)$$

3.6 Quelques exercices issus des archives de la préparation

3.6.1 Mise en jambes

$1 + x + 3x^2$, ordre 4 en 0,	$1 + x + 3x^2$, ordre 4 en 1,
$\ln(x)$, ordre 2 en 0,	$\ln(x)$, ordre 2 en 1,
$\ln(1+x) \cdot \cos(x)$, ordre 4 en 0,	$(e^{x^2} - 1)x \sin(x)$, ordre 7 en 0,
$\ln(\cos(x))$, ordre 5 en 0,	$\cos(\sqrt{1+x})$, ordre 1 en 0,
$(1 + \operatorname{ch}(x))^{-1}$, ordre 4 en 0,	$\sin(x)$, ordre 5 en $\pi/6$,
$\tan(x)$, ordre 5 en 0,	$\tan^2(x)$, ordre 5 en 0.

3.6.2 Un rien plus dur

$\sqrt{\tan(x)}$, ordre 3 en $\pi/4$,	$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}$, ordre 2 en 0,
$\frac{\ln(1+x)}{1+2x}$, ordre 4 en 0,	$\tan^3(x) \cdot ((\cos x)^{x^2} - 1)$, ordre 10 en 0,
$(\tan(x))^{\cos(2x)}$, ordre 4 en $\pi/4$,	$\ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))$, ordre 8 en 0,
$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\cos(x)}$, ordre 5 en 0,	$(\sin(x))^x$, ordre 4 en $\pi/2$,
$\frac{e^x - 1}{x^2 - x}$, ordre 4 en 0,	$\sqrt{x(e^x - 1)}$, ordre 3 en 0,
$\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x}}{e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e}$, ordre 2 en 1,	$\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))$, ordre 7 en 0,
$\frac{e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e}{\tan(x)}$, ordre 3 en 0,	$\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x}$, ordre 5 en 0.

3.6.3 Calcul de limites

$\frac{\sqrt{1+2x+3x^2} - 3\sqrt{1+3x+2x^2}}{x^2}$ en 0,	$(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$ en 0,
$\frac{x^a - a^x}{x - a}$ en a ,	$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\ln(x) - \ln(a)}$ en a ,
$\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en 0,	$\frac{1}{1 - \cos(x)} - \frac{1}{1 - \cos(\pi x)}$ en 0,
$\frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$ en 1,	$\frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$ en 0,
$(2^x + 3^x - 12)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$ en 2,	$\frac{\sin(x)}{x}$ en 0.

3.6.4 Encore des limites, mais en $+\infty$

$$x^{\frac{x+1}{x}} - (x-1)^{\frac{x}{x-1}} \quad \frac{x^{1515} + \sqrt{x}e^x - 1789 \ln(x)}{(\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3})\operatorname{ch}(x)}$$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)} \quad \left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} + 5^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$$

3.6.5 Équivalent pour une suite récurrente

On fixe un réel $u_0 \in]0, \pi[$, et on pose : $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est à valeurs dans $[0, 1]$, décroissante et donc convergente. Quelle est sa limite ?

On voudrait calculer un équivalent de u_n .

2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $(\sin(x))^{-\alpha} - x^{-\alpha}$ possède une limite ℓ finie et non nulle lorsque x tend vers 0. Calculer ℓ .
3. On pose $w_n = u_n^{-\alpha}$. Vérifier que la suite $(w_{n+1} - w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
4. Déterminer un équivalent de w_n au voisinage de l'infini. (On ((re)démontrera et on) appliquera le théorème de Cesàro : si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = \ell$.)
5. Déterminer un équivalent de u_n au voisinage de l'infini.

Pour pousser cette idée plus loin, on peut regarder l'exercice d'Analystan où cette suite est étudiée plus en détail (on vient de traiter les deux premières questions).

3.6.6 Irrationalité de $\cos(1)$

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 pour la fonction cosinus à l'ordre $2n + 1$ (pour n entier naturel quelconque).
On suppose que $\cos 1$ est rationnel, disons $\cos 1 = p/q$ avec p et q entiers non nuls. On choisit n de sorte que $2n + 2 \geq q$.
2. Démontrer que le cosinus qui apparaît dans la formule de Taylor précédente est un entier.
3. Conclure que $\cos(1)$ est irrationnel.