

Convexité

Dans le programme, seules les fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$ apparaissent ; dans les notes ci-dessous j'explique le contexte plus général des fonctions convexes continues, mais en pratique il s'agit surtout de comprendre le cas $\mathcal{C}^1$ (où une fonction est convexe ssi sa dérivée est croissante) et le cas $\mathcal{C}^2$ (où une fonction est convexe ssi sa dérivée seconde est positive), et arriver à démontrer des inégalités en utilisant la convexité.

4.1 Convexité : définition et premières propriétés

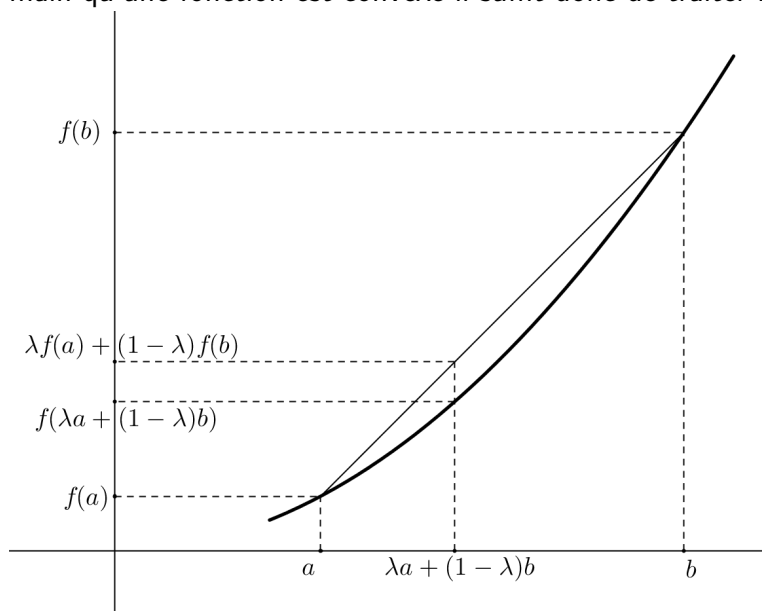


Définition 4.1

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle vérifie l'*inégalité de convexité* suivante :

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Notons que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ l'inégalité est manifestement vraie, si on essaie de démontrer à la main qu'une fonction est convexe il suffit donc de traiter le cas $\lambda \in]0, 1[$.



En observant la représentation graphique ci-dessus, on obtient la traduction géométrique suivante de la convexité d'une fonction :



Théorème 4.2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Alors f est convexe si et seulement si pour tout couple (A, B) de points distincts de $\mathcal{C}$, l'arc $\widehat{AB}$ sur $\mathcal{C}$ est au-dessous de la corde $[AB]$.

Définition 4.3

Une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$ est dite *concave* si $-g$ est convexe, ou encore si elle vérifie l'*inégalité de concavité* suivante :

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1], g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b);$$

ou de manière équivalente si pour tout couple (A, B) de points distincts de sa courbe représentative, l'arc $\widehat{AB}$ est au-dessus de la corde $[AB]$.

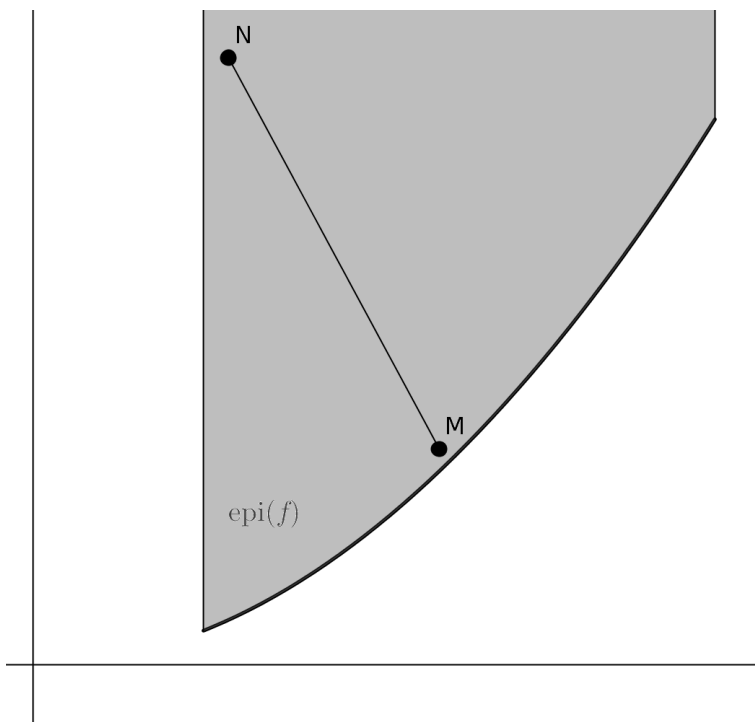
On peut également traduire la convexité d'une fonction par la convexité de son *épigraphe* en tant que partie de $\mathbb{R}^2$:

★ Théorème 4.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle *épigraphe* de f la partie de $\mathbb{R}^2$ notée $\text{epi}(f)$ et définie par

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$$

Alors f est convexe si et seulement si $\text{epi}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire pour tout couple (M, N) de points de $\text{epi}(f)$, on a $[M, N] \subseteq \text{epi}(f)$.



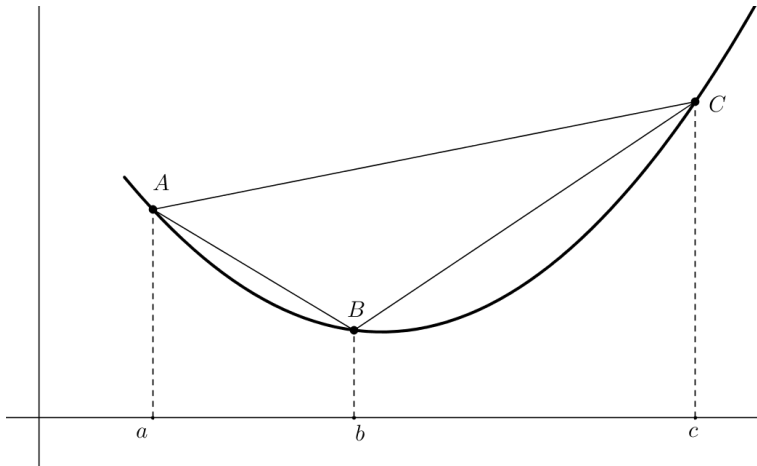
Exercice 4.5

Démontrer cette propriété. On pourra utiliser le fait que le graphe de f est contenu dans son épigraphe...

★ Théorème 4.6

Une fonction convexe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'inégalité des pentes :

$$\forall a, b, c \in I, a < b < c \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$



Cette propriété suit géométriquement du fait que le point B est au-dessous de la corde $[AC]$, et est en fait équivalente à la convexité de f .

✏ Exercice 4.7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a < b \in I$ et tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$.

En déduire une preuve de l'inégalité des pentes.

Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, on considère la fonction $\Delta_a f$ définie par

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Les inégalités précédentes (inégalité des pentes) sur une fonction f se traduisent en terme de croissance des fonctions $\Delta_a f$:

★ Théorème 4.8

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $\Delta_a f$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

✏ Exercice 4.9

Vérifier que l'inégalité des pentes est équivalente au fait que pour tout $a \in I$, la fonction $\Delta_a f$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Nous allons maintenant démontrer un lemme un peu plus difficile qui permet d'établir que toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue et admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de cet intervalle ouvert (toute cette partie, jusqu'au moment où on parle de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, peut parfaitement être ignorée par la lectrice souhaitant se cantonner au programme, où je rappelle qu'on ne considère que des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$).

★ Lemme 4.10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. Si g est une fonction à valeurs réelles définie et croissante sur $I \setminus \{a\}$ alors g admet en a une limite à gauche et une limite à droite finies telles que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x).$$

Démonstration. Comme $a \in \overset{\circ}{I}$, il existe $\eta > 0$ tel que $[a - \eta, a + \eta] \subset I$ et cela a donc un sens d'étudier l'existence d'éventuelles limites à gauche et à droite de g . On considère

$$X = \{g(x) : x \in I \text{ et } x < a\}.$$

Par croissance de g , cette partie X est majorée par $g(a + \eta)$. Notons l_1 sa borne supérieure. Encore par croissance de g , il suit que l_1 est la limite à gauche de g en a : en effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in X$ tel que $l_1 - \varepsilon < g(x_0) \leq l_1$ et alors pour tout x tel que $x_0 < x < a$, on a $l_1 - \varepsilon < g(x_0) \leq g(x) \leq l_1$ et en particulier $|l_1 - g(x)| < \varepsilon$.

De manière analogue, l'ensemble $X' = \{g(x') : x' \in I \text{ et } x' > a\}$ est minoré et sa borne inférieure l_2 correspond à la limite à droite de g en a . Enfin, comme pour tout $x \in X$ et tout $x' \in X'$, on a $x < a < x'$ et donc $g(x) \leq g(x')$, il suit que $l_1 \leq l_2$.

□

★ Théorème 4.11

Soit I un intervalle ouvert et f une fonction à valeurs réelles, définie et convexe sur I . Alors f est continue sur I et admet des dérivées à gauche et à droite en tout point a de I , vérifiant de plus $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

De plus, pour tout $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Comme I est ouvert, on a $a \in \overset{\circ}{I}$, et comme f est convexe, la fonction $\Delta_a f$ est croissante. On peut appliquer le lemme précédent sur cette fonction, ce qui permet de conclure car les limites à gauche et droite de $\Delta_a f$ en a correspondent exactement aux dérivées à gauche et à droite de f en a . Bien sûr, la dérivabilité à droite et à gauche en a impliquent en particulier que $f(x) - f(a)$ tend vers 0 quand x tend vers a , et donc que f est continue en a .

Pour démontrer les inégalités apparaissant à la dernière ligne de l'énoncé ci-dessus, choisissons $x \in]a, b[$; la croissance de la fonction $\Delta_x f$ nous donne $\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$. En faisant tendre x vers a et en utilisant la continuité de f , on obtient l'inégalité de gauche; en faisant tendre x vers b on obtient celle de droite.

□

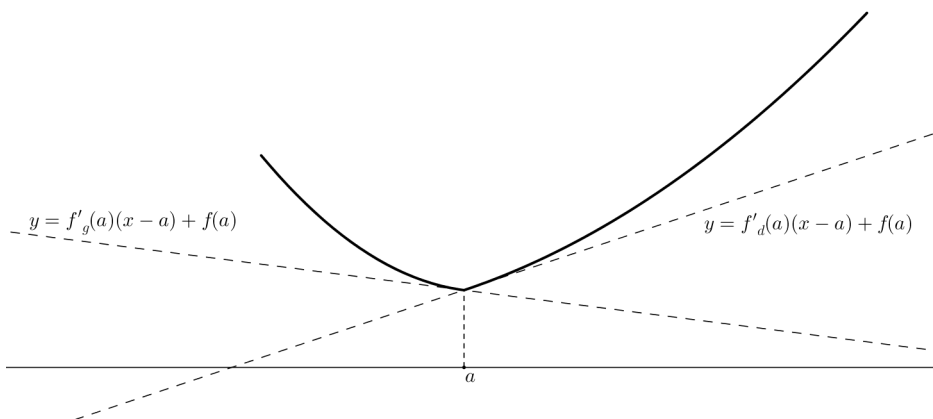
Notons qu'il est immédiat que $f'_g(a) \leq f'_d(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (la limite à gauche d'une fonction croissante est toujours inférieure à sa limite à droite!); en particulier, si f est convexe alors f'_g et f'_d sont toutes deux des fonctions croissantes.

★ Théorème 4.12

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout $a \in I$ on a pour tout $x \in I$ que $f(x) \geq f'_d(a)(x-a) + f(a)$ et $f(x) \geq f'_g(a)(x-a) + f(a)$. En particulier, il existe une fonction affine g telle que $g(a) = f(a)$ et $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. Soit $a \in I$. D'après les inégalités à la fin de la proposition 1.11 on a pour tout $x > a$ que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq f'_d(a)$ et donc $f(x) \geq f'_d(a)(x-a) + f(a)$. De même, pour tout $x < a$ on a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'_g(a)$; en multipliant par $x - a$ (qui est négatif!) on a donc que pour tout $x < a$ $f(x) \geq f(a) + f'_g(a)(x-a)$.

De plus, on sait que $f'_g(a) \leq f'_d(a)$; par conséquent, pour $x < a$ $f'_g(a)(x-a) \geq f'_d(a)(x-a)$, et on voit finalement que l'inégalité $f(x) \geq f'_d(a)(x-a) + f(a)$ est valide pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement s'applique pour montrer que l'autre inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$



Dans le cas où $f'_d(a) = f'_g(a)$, c'est-à-dire quand f est dérivable en a , on vient d'obtenir que le graphe de f est au-dessus de sa tangente en a .

★ Théorème 4.13

Toute fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et majorée est constante.

Démonstration. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. D'après le résultat précédent, on a $f(x) \geq f'_d(a)(x-a) + f(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; comme f est majorée ceci impose que $f'_d(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (faites un dessin et considérez les limites en $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $f'_d(a)$). De même on doit avoir $f'_g(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; par conséquent $f'_d(a) = f'_g(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f est dérivable et $f' = 0$: f est constante. $\square$

Exercice 4.14

Donner un exemple de fonction convexe sur $[0, 1]$ qui n'est ni continue en 0, ni continue en 1.

4.2 Fonctions convexes dérivables

Au programme de l'agrégation interne, seules sont mentionnées les fonctions $\mathcal{C}^1$; quand f est dérivable, ce qu'on a vu ci-dessus entraîne en particulier que f' est croissante (et donc f'' est positive si jamais f est 2 fois dérivable). On a travaillé en plus grande généralité que nécessaire ci-dessus ; un avantage est qu'on obtient maintenant facilement toutes les propriétés classiques des fonctions convexes (et je pense que c'est utile d'avoir en tête l'inégalité des pentes...).

★ Théorème 4.15

Soit I un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est convexe sur I .
2. Pour tout $x, y \in I$ $f(x) \geq (x - y)f'(y) + f(y)$.
3. La fonction f' est croissante sur I .

Notons l'interprétation géométrique du second point ci-dessus : le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration. Supposons f convexe et dérivable. Alors en tout $x \in I$ on a $f'(x) = f'_d(x) = f'_g(x)$, donc la deuxième condition est vraie d'après le théorème 1.12.

Supposons maintenant (2) vraie, et considérons $x < y \in I$.

Alors on a à la fois $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$ et $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$, ce qui nous donne $f'(x)(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y - x)$. On en déduit que $f'(x) \leq f'(y)$ et donc f' est croissante.

Enfin, supposons f' croissante, fixons $x < y \in I$ et considérons la fonction $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y) .$$

Notre but est de démontrer que g est à valeurs positives. Notons qu'on a $g(0) = g(1) = 0$, et que g est dérivable, de dérivée donnée par la formule

$$g'(t) = f(x) - f(y) + (y - x)f'(tx + (1 - t)y) .$$

L'hypothèse selon laquelle f' est croissante entraîne donc que g' est décroissante ; et le théorème de Rolle nous garantit l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$. Ainsi, g' est positive sur $[0, c]$ et négative sur $[c, 1]$, ce qui signifie que g est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$. Comme $g(0) = g(1) = 0$, on vient d'établir que g ne prend que des valeurs positives. $\square$

 Exercice 4.16

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction convexe sur I et dérivable. Montrer que $a \in I$ est un minimum de f sur I si et seulement si $f'(a) = 0$.

 Théorème 4.17

Soit I un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I .

Démonstration. Il suffit de remarquer que f'' est positive si et seulement si f' est croissante, et d'appliquer le résultat précédent. $\square$

Remarquons ici qu'une fonction dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires (c'est le contenu du théorème de Darboux); et une fonction croissante vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires est nécessairement continue (pourquoi?). Ainsi, si une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert est dérivable, sa dérivée est nécessairement continue.

4.3 Exercices

Dans les exercices toutes les fonctions convexes considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$.

 Exercice 4.18

Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x.$
2. $\forall x > 0 \quad \ln(x) \leq x - 1.$
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$
4. $\forall x > -1 \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$

 Exercice 4.19

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

 Exercice 4.20

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x - \cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f: I \rightarrow]0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 4.21

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 4.22

Montrer que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 4.23

Montrer que si f est une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert et à valeurs réelles, et a est un minimum local de f , alors a est un minimum global.

Exercice 4.24

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 4.25

Montrer que le sup de deux fonctions convexes est convexe (on pourra penser à utiliser la caractérisation de la convexité par l'épigraphe).

Exercice 4.26

Soit I un intervalle, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Montrer que pour tout $x_1, \dots, x_n \in I$ on a

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i)$$

Utiliser cette inégalité, ainsi que des sommes de Riemann, pour démontrer le cas particulier suivant de l'*inégalité de Jensen* : soit g une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[a, b]$ et $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que

$$\varphi \left(\int_0^1 g(x) dx \right) \leq \int_0^1 \varphi(g(x)) dx$$

 Exercice 4.27

Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

Indication : utiliser l'identité $\frac{x^2}{x+y} = x \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$ et utiliser (après l'avoir justifiée...) la convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

 Exercice 4.28

Soit ABC un triangle dans le plan, d'angles a, b, c . Montrer qu'on a les inégalités suivantes :

$$1. \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(Interpréter ce résultat géométriquement, pour décrire le triangle inscrit dans un cercle de rayon 1 et d'aire maximale ; généralisation de ce résultat aux polygones convexes ?)

$$2. \cos(a) + \cos(b) + \cos(c) \leq \frac{3}{2}.$$

Indication : combien vaut $a + b + c$? Pour la deuxième inégalité, on pourra supposer $a \geq b \geq c$ et distinguer les cas $a \leq \frac{\pi}{2}$ et $a \geq \frac{\pi}{2}$.

 Exercice 4.29

1. Soit $a, b \in]0, +\infty[$, et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant judicieusement la fonction

$$\ln, \text{ montrer que } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. Soit $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathbb{C}^n$. Dédurre de la question précédente l'*inégalité de Hölder* :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ on pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.