

Suites et séries de fonctions: modes de convergence

Souvent on essaie d'approcher une fonction comme limite de sommes de fonctions plus simples (ce qui amène aux séries entières, séries de Fourier qu'on reverra bientôt); cela peut entre autres aider à calculer des intégrales, des sommes de séries numériques (en étudiant d'abord une fonction associée à la série et faisant intervenir un paramètre, puis en fixant la valeur de ce paramètre)...

On fixe une partie⁽ⁱ⁾ I de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, une application $f_n : I \rightarrow E$ où E est un espace normé complet⁽ⁱⁱ⁾ – par exemple $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ ou $M_d(\mathbb{C})$ ($d \in \mathbb{N}$). La norme sur E sera souvent notée avec une seule barre, comme s'il s'agissait de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On suppose que $(f_n(x))$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ convergent pour tout $x \in I$, et on s'interroge sur la possibilité de transférer des propriétés des f_n à la limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou à la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Questions typiques (sous réserve d'existence de ces limites) :

- a-t-on $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$?
- a-t-on $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x_0)$?
- a-t-on $\int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$?

Ainsi, les questions typiques sont des questions de permutations de limites.

En général, la réponse à chacune de ces questions est négative.

Exercice 5.1

Donner des suites de fonctions (f_n) qui convergent simplement (cf. la définition à la section suivante si nécessaire) vers une fonction f avec les propriétés suivantes.

- (a) Pour tout n , f_n est continue mais f n'est pas continue.
- (b) Pour tout n , f_n est dérivable mais f n'est pas dérivable.
- (c) Pour tout n , f_n est continue et f l'est aussi mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$.

D'où l'idée d'imposer des hypothèses plus contraignantes sur la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour assurer le transfert des propriétés qui nous intéressent (régularité, limite, intégrale...).

(i). Le plus souvent, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un disque de $\mathbb{C}$.

(ii). Un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ complet est un espace vectoriel normé où toute suite de Cauchy est convergente. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$.

5.1 Convergence simple et uniforme

5.1.1 Définitions

Définition 5.2

On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I (en abrégé, f_n CVS vers f) si pour tout x de I $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(Ici, on peut permuter librement « $\forall \varepsilon > 0$ » et « $\forall x \in I$ ».)

On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I (en abrégé : (f_n) CVU vers f sur I) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(Autrement dit, à ε fixé, on doit trouver un n_0 qui convient pour tous les x de I .)

On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de I si, pour tout compact ^a K inclus dans I , la suite des restrictions $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f|_K$ sur K .

^a. On rappelle que dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ ou dans tout espace normé de dimension finie, un compact est un fermé borné. Plus généralement, un espace métrique K est compact si toute suite d'éléments de K admet une suite extraite qui converge dans K .

Remarque 5.3

Si I est un intervalle, dire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les compacts de I revient à dire que $(f_n|_{[a,b]})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f|_{[a,b]}$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I .

Si I est un disque, il est équivalent de dire que $(f_n|_D)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f|_D$ sur tout disque D fermé inclus dans I .

Remarque 5.4

On a la chaîne d'implications :

$$(f_n) \text{ CVU sur } I \Rightarrow (f_n) \text{ CVU sur tout compact de } I \Rightarrow (f_n) \text{ CVS sur } I$$

et les deux réciproques sont fausses.

Exercice 5.5

Montrer que les fonctions $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto nxe^{-nx}$ et $[0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n/(1-x)$ donnent des contre-exemples aux réciproques.

Les notions de convergence plus fortes (convergence uniforme ou uniforme sur les compacts) ont de meilleures propriétés de préservation de la régularité que la convergence simple.

5.1.2 Critère de Cauchy uniforme

★ Théorème 5.6

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p, q \geq n_0 \forall x \in I \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce critère est surtout utile pour les séries.

Démonstration. On laisse en exercice la preuve du fait que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors elle satisfait le critère de Cauchy uniforme (il n'y a pas de difficulté particulière).

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme. En particulier, pour tout $x \in I$ fixé la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente (nos fonctions prennent leurs valeurs dans un espace complet) ; appelons sa limite $f(x)$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in I$ on ait $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. En faisant tendre m vers $+\infty$ tout en gardant n et x fixés, on obtient que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$ et tout $n \geq N$, ce qui prouve que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . $\square$

5.1.3 Premières propriétés

★ Théorème 5.7

On suppose que

1. pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en $x_0 \in \bar{I}$;
2. la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I ;

alors^a la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et f admet pour limite ℓ en x_0 .

a. Rappel : on a supposé que les fonctions f_n sont à valeurs dans un espace complet.

Démonstration. Commençons par montrer que $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ; pour cela, puisqu'on ne connaît pas a priori sa limite mais qu'on travaille dans un espace complet, on établit que la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$ on a

$$|\ell_n - \ell_m| \leq |l_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - l_m|$$

Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , cette suite satisfait le critère de Cauchy : il existe N tel que pour tout $n, m \geq N$ on ait $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Fixons un tel N , puis considérons $n, m \geq N$. Puisque $f_n(x)$ tend vers ℓ_n et $f_m(x)$ tend vers ℓ_m quand x tend vers x_0 , pour tout x suffisamment proche de x_0 on a $|f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon$ et $|f_m(x) - \ell_m| \leq \varepsilon$. Finalement on conclut que pour tout $n, m \geq N$ on a $|\ell_n - \ell_m| \leq 3\varepsilon$, et $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy.

Notons ℓ la limite de ℓ_n . On exploite à nouveau l'inégalité triangulaire pour obtenir que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\ell_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon$; pour x suffisamment proche de x_0 on a $|f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon$ et donc $|f(x) - \ell| \leq 3\varepsilon$. $\square$

Comme corollaire, toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

★ Corollaire 5.8

Si f_n est continue sur I pour tout n et si (f_n) converge uniformément vers f , alors f est continue sur I .

Démonstration. En effet, le théorème précédent affirme en particulier que pour tout $x_0 \in I$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

autrement dit (en utilisant la continuité de chaque f_n , et le fait que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout x fixé)

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Donnons une preuve directe du corollaire : pour tout $x, y \in I$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Fixons n tel que $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ pour tout z , puis considérons $x \in I$ fixé. Puisque f_n est continue en x , pour tout $y \in I$ suffisamment proche de x on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$, donc aussi $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$, ce qui prouve que f est continue en x . $\square$

Dans toute la suite, quand on mentionne des intégrales, on suppose que nos fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

★ Théorème 5.9

Supposons que chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $I = [a, b]$ et que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Si f est continue par morceaux, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

🔪 Exercice 5.10

Démontrer le théorème. Constater l'importance de l'hypothèse de compacité de I .

🔪 Exercice 5.11

Donner un exemple de suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}^+$, qui converge uniformément vers la fonction nulle mais dont l'intégrale ne tend pas vers zéro.

Le théorème de dérivation d'une limite (uniforme) de suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est en fait un théorème d'intégration appliqué à la suite des dérivées. C'est ce qui explique l'hypothèse qui surprend au premier abord.

★ Théorème 5.12

Soit I un intervalle. Supposons que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout n , que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I et que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour au moins un élément x_0 de I . Alors $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour tout $x \in I$; si on note $f(x)$ la limite, la fonction f ainsi définie est dérivable et $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$. De plus, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment contenu dans I .

🔗 Exercice 5.13

Motiver l'hypothèse portant sur la convergence en un point x_0 . Justifier que l'on impose à I d'être un intervalle.

📢 Remarque 5.14

Remarque sur les hypothèses : l'existence de f'_n est la moindre des choses si on espère calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$ et sa continuité permet de l'intégrer; on a vu que la convergence de $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ en un point x_0 au moins est nécessaire; l'hypothèse la plus importante est tout de même la convergence *uniforme* de la suite dérivée $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Notons g la limite uniforme de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ le théorème fondamental de l'analyse nous donne l'égalité

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Quand n tend vers $+\infty$, f'_n converge uniformément vers une fonction g et on obtient en particulier que, à x fixé, $f_n(x)$ tend vers $f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$ par le théorème de permutation limite-intégrale pour la convergence uniforme sur un segment énoncé plus haut.

Notons $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$; c'est une fonction dérivable (puisque g est continue), qui est la limite simple des fonctions f_n . Reste à montrer la convergence uniforme de f_n vers f sur chaque segment $[a, b]$ contenu dans I .

Pour cela, on fixe $[a, b] \subseteq I$ (dont on peut supposer, quitte à l'agrandir, qu'il contient x_0) et on écrit pour tout $x \in [a, b]$ que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x_0) - f_n(x_0) + \int_{x_0}^x (g(t) - f'_n(t)) dt \right| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x (g(t) - f'_n(t)) dt \right| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |x - x_0| \sup\{|g(t) - f'_n(t)| : t \in I\} \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |b - a| \sup\{|g(t) - f'_n(t)| : t \in I\} \end{aligned}$$

Le terme de droite de la dernière inégalité ci-dessus est une suite qui tend vers 0, ce qui prouve que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend uniformément vers f sur $[a, b]$.

□

On peut affaiblir les hypothèses tout en conservant la dérivabilité de la limite ; la preuve est nettement plus délicate (et ne passe plus par des intégrales : avec notre notion d'intégrale on ne peut pas intégrer f' a priori, elle pourrait ne pas être continue par morceaux !). L'exercice suivant n'est à traiter que si vous vous sentez à l'aise avec toutes les autres notions présentées dans ces notes.



Exercice 5.15

Démontrer le théorème de dérivation des suites de fonctions en remplaçant l'hypothèse “chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ ” par “chaque f_n est dérivable”.

Indication. Déjà, commencer par montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que chaque suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

5.1.4 Convergence uniforme sur tout compact et régularité

Une remarque simple : la convergence uniforme sur tout compact suffit à établir des propriétés locales (continuité, dérivabilité). Voici un énoncé précis.



Théorème 5.16

Soit I un intervalle. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I .

- (i) Si f_n est continue pour tout n et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f , alors f est continue.
- (ii) Si f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout n , si $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour un x_0 de I et si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f qui est dérivable et telle que $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$: il existe $\alpha > 0$ tel que le compact $K = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ est inclus dans I – à moins que x_0 ne soit une borne de I , auquel cas on remplace K par $[x_0, x_0 + \alpha]$ ou $[x_0 - \alpha, x_0]$. Comme la fonction f est continue en x_0 (resp. dérivable en x_0 et f' est continue en x_0) si et seulement si la restriction de f à K l'est, on peut conclure par les théorèmes précédents appliqués à la suite de restrictions $(f_n|_K)$. $\square$



Remarque 5.17

Une autre façon de faire pour démontrer le résultat sur la continuité : si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , alors $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact (pourquoi ?), sur lequel les hypothèses entraînent que f est continue (pourquoi ?), donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, ce qui termine la démonstration. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le même argument pour le résultat sur les dérivées ?

5.2 Convergence dominée

★ Théorème 5.18

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I quelconque. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I , que f est continue par morceaux et qu'il existe une fonction g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n (assez grand).

Alors f est intégrable et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

La démonstration de ce théorème, en se restreignant à des fonctions continues par morceaux, est délicate et assez technique ; une raison en est que l'ensemble des fonctions que l'on sait intégrer n'est pas stable par passage à la limite simple, et que l'hypothèse de continuité par morceaux de la limite n'est là que pour garantir qu'on peut parler de son intégrale. Notre version de l'intégrale se comporte bien avec les limites uniformes, et on peut établir le résultat en passant à une sous-suite bien choisie (via un théorème de Dini) pour utiliser des limites uniformes. Pour l'agrégation externe, on peut utiliser la version "théorie de la mesure" du théorème de convergence dominée, qui se démontre plus facilement et est plus générale, mais nécessite d'avoir d'abord développé des notions sur la théorie de la mesure et les intégrales de fonctions sur des espaces mesurés.

5.3 Convergence monotone

Il y a un autre théorème d'échange limite-intégrale au programme ; l'intérêt par rapport à l'énoncé du théorème de convergence dominée est que l'énoncé donne une équivalence pour la convergence de $\int f_n$, pas seulement une implication. L'inconvénient est que l'hypothèse est beaucoup plus forte.

★ Théorème 5.19

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions intégrables à valeurs réelles, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I . Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite $\int_I f_n$ est majorée ; dans ce cas on a $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$.

Souvent, on utilise le théorème dans le cas où chaque f_n est à valeurs positives ; on peut toujours se ramener à ce cas en considérant $f_n - f_0$ en lieu et place de f_n .

5.4 Séries de fonctions

On se donne une suite de fonctions $u_n : I \rightarrow E$ et on pose $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S'intéresser à la série $\sum u_n$, c'est s'intéresser à la suite des sommes partielles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L'idée fondamentale est qu'une suite ou une série sont deux façons de voir le même objet : si $\sum u_n$ est une série, on s'intéresse aux propriétés de la suite des *sommes partielles* $\left(\sum_{n=0}^N f_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$; et si

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions alors (en posant $u_{-1} = 0$ pour initialiser) la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ est une série de fonctions dont la suite des sommes partielles est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Penser en termes de séries est naturel en analyse : pour étudier la convergence d'une suite, on peut avoir envie de mesurer l'écart entre u_{n+1} et u_n , et de voir chaque u_n comme la somme de ces écarts.

5.4.1 Reformulations des définitions



Définition 5.20

On dit que $\sum u_n$ *converge simplement vers f sur I* (en abrégé : $\sum u_n$ CVS sur I) si pour tout x de I , $\sum u_n(x)$ converge et a pour somme $f(x)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=0}^n u_k(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

On dit que $\sum u_n$ *converge uniformément vers f sur I* (en abrégé : $\sum u_n$ CVU sur I) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=0}^n u_k(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

On dit que $\sum u_n$ *converge uniformément vers f sur tout compact de I* si, pour tout compact K inclus dans I , la suite des restrictions $\sum u_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$ sur K .

Le critère de Cauchy s'exprime de la façon suivante.



Lemme 5.21

On garde les notations ci-dessus. Alors $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \forall x \in I, \left| \sum_{k=p}^q u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

5.4.2 Convergence normale

Voici une condition suffisante de convergence uniforme.



Définition 5.22

On dit que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *normalement* sur I (en abrégé : CVN) s'il existe une suite de réels $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- (a) $\forall x \in I, |u_n(x)| \leq b_n$;
- (b) $\sum b_n$ converge.

De manière plus compacte : $\sum \sup\{|u_n(x)| : x \in I\}$ est convergente.

★ Lemme 5.23

Toute série de fonctions qui converge normalement converge uniformément.

Par conséquent, si chaque u_n est continue et $\sum u_n$ converge normalement, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue, en tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues.

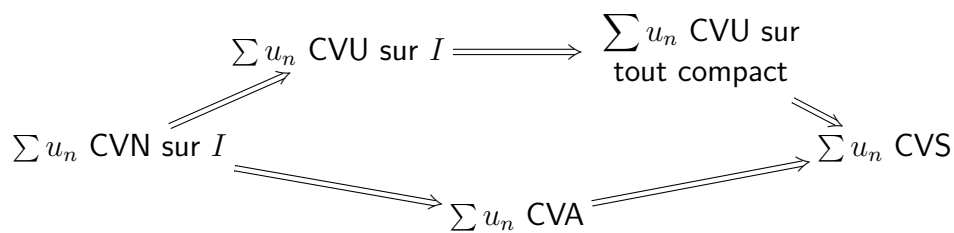
Démonstration. Cela résulte du critère de Cauchy et de l'inégalité triangulaire. Pour $p \leq q$, on a :

$$\left| \sum_{k=p}^q u_k(x) \right| \leq \sum_{k=p}^q |u_k(x)| \leq \sum_{k=p}^q b_k,$$

que l'on peut rendre arbitrairement petit à partir d'un certain rang. □

5.4.3 Comparaison des modes de convergence

On a la chaîne d'implications suivante :



et toutes les réciproques sont fausses.

🔍 Exemple 5.24

[CVA $\not\Rightarrow$ CVN] Soit $I =]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose $u_n(x) = x^n$.

Alors $\sum |u_n(x)|$ converge pour tout $x \in I$ alors que $\sup_{x \in I} |x|^n = 1$ pour tout n , de sorte que le meilleur b_n possible serait $b_n = 1$, ce qui ne convient pas puisque $\sum 1$ diverge. Par conséquent, la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur I .

🔍 Exemple 5.25

[CVU $\not\Rightarrow$ CVN] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. Le critère spécial des séries alternées donne la convergence uniforme (voir l'exercice 5.37 en fin de ces notes). En revanche, $\sum |u_n(x)|$ diverge pour tout x donc il ne saurait y avoir convergence normale.

5.4.4 Reformulations des théorèmes en termes de séries

★ Théorème 5.26

Soit $x_0 \in \bar{I}$. On suppose que $\sum u_n$ converge uniformément vers f sur I , que $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \ell_n$ pour tout n , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sum_{n \geq 0} \ell_n$.

★ Corollaire 5.27

Si chaque u_n est continue sur I et $\sum u_n$ converge uniformément vers f sur I alors f est continue.

★ Théorème 5.28

Si chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, si $\sum u'_n$ converge uniformément et s'il existe x_0 tel que $\sum u_n(x_0)$ converge, alors on peut dériver sous le signe $\sum$: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dérivable, de dérivée égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ (et la série $\sum u_n$ converge uniformément sur les compacts de I).

5.4.5 Intégration terme à terme

Le théorème suivant n'est pas tout à fait une conséquence de notre théorème de convergence dominée, mais presque : si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est continue par morceaux, alors la dernière hypothèse revient (grâce au théorème de convergence monotone) à affirmer que cette fonction est intégrable sur I , et elle nous fournit la fonction de domination permettant d'appliquer le théorème de convergence dominée.

★ Théorème 5.29

On suppose que :

- u_n est intégrable pour tout n ;
- $\sum u_n$ converge simplement vers f ;
- f est continue par morceaux ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n| < +\infty$;

alors on peut échanger somme et intégrale (en particulier, toutes les quantités présentes dans l'égalité qui suit sont convergentes) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 5.30

On voit que ce théorème est très semblable au théorème de Fubini. D'ailleurs, dans la théorie de l'intégration de Lebesgue, c'est exactement le théorème de Fubini pour l'espace mesuré $I \times \mathbb{N}$ muni de la mesure $dx \otimes \text{card}$ (qui est σ -fini parce que $\mathbb{N}$ est dénombrable).

On peut également le déduire du théorème de Fubini au programme en posant, pour $(x, y) \in I \times \mathbb{R}^+$:

$$f(x, y) = u_{[y]}(x),$$

en constatant que pour un entier N , on a $\int_0^{N+1} u_{[y]}(x) dy = \sum_{k=0}^N u_k(x)$.

5.4.6 Quelques exercices**Exercice 5.31**

Soit I un intervalle et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si chaque f_n est convexe alors f est convexe.
2. Montrer que si chaque f_n est croissante alors f est croissante.
3. Montrer que si chaque f_n est k -lipschitzienne (pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}$ ne dépendant pas de n) alors f est k -lipschitzienne.
4. Est-il vrai que si chaque f_n est lipschitzienne alors f est lipschitzienne? Et si on remplace la convergence simple par la convergence uniforme?

Exercice 5.32

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f . Montrer que f est un polynôme.

Exercice 5.33

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = n \left[\arctan \left(x + \frac{1}{n} \right) - \arctan \left(x - \frac{1}{n} \right) \right]$.

Déterminer si cette suite de fonctions converge (simplement, ou uniformément) vers une limite f , et le cas échéant déterminer cette limite.

Exercice 5.34

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f_n(x) = x^2 \sin \left(\frac{1}{nx} \right)$, et on convient que $f_n(0) = 0$.

Montrer que f_n converge uniformément sur les compacts mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.35

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque la série converge.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ , puis montrer que f y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Étudier les variations et la convexité de ζ .
3. Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$. En déduire un équivalent de ζ en 1.
4. Dresser le tableau de variations de ζ .
5. Pour $x > 0$ on pose $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
 - a) Justifier que T est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
 - b) Exprimer $T(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ pour $x > 1$.

Exercice 5.36

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Cette série converge-t-elle normalement ? Uniformément ?
3. Montrer que $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Prouver que f admet une limite en 0 et en $+\infty$, et déterminer ces limites.

Exercice 5.37

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2 + e^x} dx \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} dx$$

Exercice 5.38

En cherchant des idées d'exercices, un préparateur peu inspiré et qui restera anonyme a trouvé la question suivante sur une fiche d'une autre préparation, dont l'anonymat sera également préservé pour des raisons évidentes :

« Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x$. »

Pouvez-vous expliquer pourquoi cet énoncé a plongé notre préparateur anonyme dans des abîmes de perplexité ?